Señales y Sistemas

Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

21 de febrero de 2020

Indicaciones

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y media.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones. En las gráficas o bosquejos deben indicarse claramente los ejes y puntos relevantes.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Problema 1

(a) Definir la estabilidad BIBO para un sistema de tiempo continuo con entrada x y salida y.

(b) Dado un sistema lineal con respuesta al impulso $h(t)$, demostrar que si $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|dt < \infty$ entonces el sistema es BIBO estable.

Un sistema H con entrada x y salida y es modelado mediante la siguente ecuación diferencial:

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bx(t)$$
$$y(t) = Cz(t) + Dx(t)$$

donde $A, B, C, D \in \mathbb{R}$.

(c) Determinar la transferencia del sistema $H(s)$.

(d) Bosquejar el diagrama de ceros y polos de $H(s)$ en función de los parámetros del problema. Determinar e identificar en el diagrama la región de convergencia. Discutir según los parámetros A, B, C, D.

(e) Determinar una condición en los parámetros del sistema para que el mismo sea BIBO estable.

(f) Determirar la respuesta al impulso del sistema $h(t)$ en función de los parámetros del sistema.

A partir de ahora considere los siguientes valores para lo que resta del probema: $A = -1, B = 3, C = 1$.

(g) Para los casos $D = 0$ y $D = 1$, bosquejar la respuesta en frecuencia del sistema.

(h) Para los casos $D = 0$ y $D = 1$, determinar y graficar la respuesta a un escalón unitario.

(i) Para cada caso, determinar si se cumple el Teorema de Valor Final.

Problema 2

Se considera un sistema formado por un muestreador que trabaja a frecuencia $f_s = 90$ kHz, seguido por un filtro digital dado por la siguiente ecuación en recurrencia, donde la entrada es x y la salida y:

$$y[n] + \beta y[n-1] \;=\; x[n] + \alpha x[n-1] + x[n-2] \tag{1}$$

(a) Calcular α y β para que cuando se ingresa al sistema con la señal $x_1(t) = \cos(2\pi 30000 t)$, la salida en régimen sea nula, y cuando al sistema ingresa una señal constante, la ganancia del filtro digital sea +2.

A partir de ahora se utilizarán los valores de α y β de la parte anterior.

(b) Dar un diagrama de polos y ceros del sistema hallado.

(c) Estudiar la estabilidad del filtro.

(d) Calcular la respuesta al impulso del filtro digital. Sugerencia: puede ser de ayuda descomponer el filtro como un filtro recursivo, seguido por un filtro no recursivo.

(e) Dar el diagrama de bloques del filtro digital utilizando únicamente dos elementos de retardo.

Pregunta 1

Enunciar y demostrar el *Teorema de Muestreo*. Nota: La demostración debe incluir las operaciones y su explicación, dejando claro en qué condiciones y cómo obtener la reconstrucción. También debe quedar explicado cómo las muestras se relacionan unívocamente con la señal original. En los bosquejos se debe identificar los ejes y puntos importantes, aclarando si existe periodicidad.

Solución

Problema 1

(a) Un sistema con entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ es BIBO estable si para toda entrada x acotada, la salida del sistema $y = S(x)$ es también acotada.

(b) La respuesta del sistema ante una entrada x se puede determinar como:

$$y(t) = S(x)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

Enonces, para todo x acotado (llamándole a la cota $M_x < \infty$):

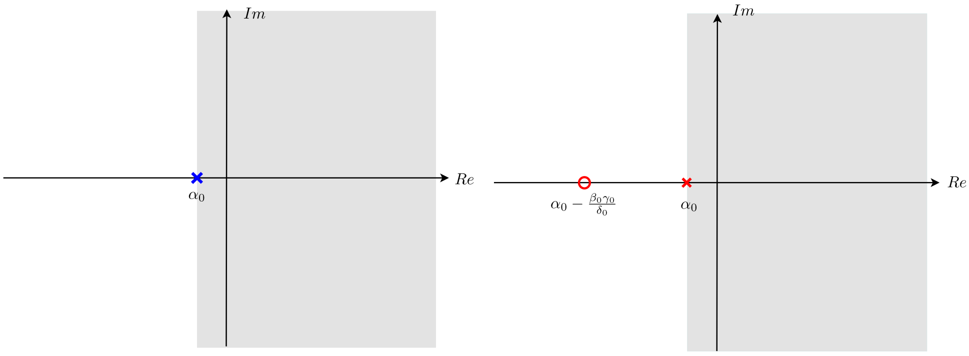
$$|y| = |\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau| \leq |\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)||x(t-\tau)|d\tau| = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|M_x d\tau = M\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|d\tau = M_x||h|| < \infty$$

Por lo tanto, para toda entrada acotada (en este caso por M_x) la respuesta es acotada (y la cota es $M_x|h|$). Por esto puede entenderse $|h|$ como la "máxima amplificación" del sistema.

(c)

$$H(s) = \frac{CB}{s-A} + D$$

(d) Si $D = 0 \Rightarrow H(s) = \frac{CB}{s-A}$. Si $D \neq 0 \Rightarrow H(s) = \frac{CB}{s-A} + D = D\frac{s-(A-\frac{CB}{D})}{s-A}$.



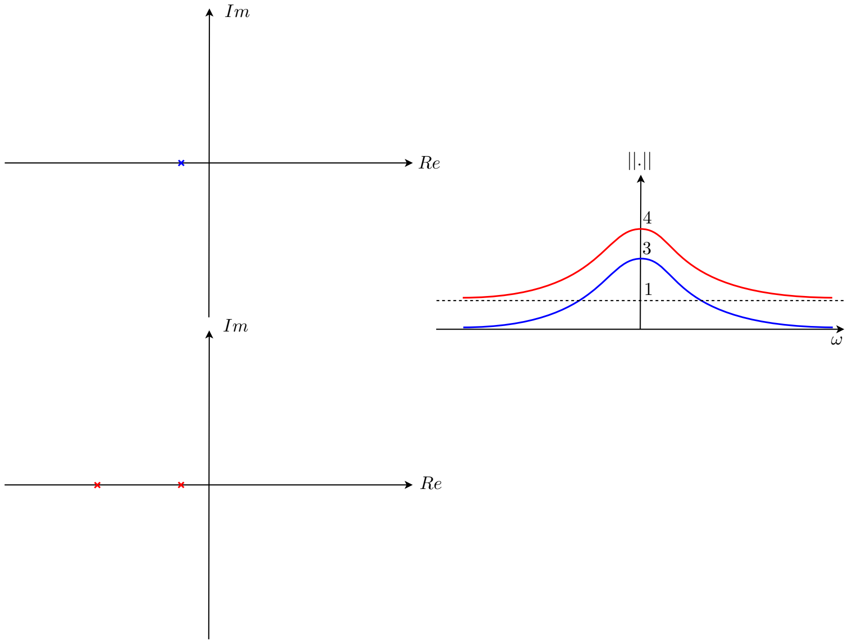
(e) Gracias al análisis realizado en la parte anterior, las condiciones para asegurar la estabilidad BIBO son:

$$A < 0, \; si: \; BC \neq 0$$
$$BIBO\; estable, \; si: \; BC = 0$$

(f) Si $D = 0 \Rightarrow H(s) = \frac{CB}{s-A} \Rightarrow h(t) = u(t)CBe^{At}$.
Si $D \neq 0 \Rightarrow H(s) = \frac{CB}{s-A} + D = D\frac{s-(A-\frac{CB}{D})}{s-A}$.
Entonces, si $D \neq 0$ y $CB \neq 0 \Rightarrow h(t) = u(t)CBe^{At} + D\delta(t)$.

(g) Con los datos del problema: $H(s) = \frac{3}{s+1} + D$.
Entonces: $H_0(s) = \frac{3}{s+1}$, $H_1(s) = \frac{s+4}{s+1}$. Por lo tanto:$H_0(j\omega) = \frac{3}{j\omega+1}$, $H_1(j\omega) = \frac{j\omega+4}{j\omega+1}$.

(h) $Y_0(s) = \frac{3}{(s+1)s} \Rightarrow y_0(t) = u(t)3(1-e^{-t})$.
$Y_1(s) = \frac{s+4}{(s+1)s} \Rightarrow y_1(t) = u(t)(4-3e^{-t})$.



(i) No se cumple el TVF dado que la respuesta al impulso tiene una singularidad en el origen ($\delta(t)$).

Problema 2

(a) $x_1[n]$ es una sinusoidal a frecuencia $\theta_1 = \frac{2\pi}{3}$, por lo cual deben existir un par de ceros sobre el circulo unidad a frecuencias $\pm\theta_1$.
Entonces, el numerador debe ser proporcional a $(z - e^{j\theta_1})(z - e^{-j\theta_1}) = z^2 - 2z\cos(\theta_1) + 1$. Por lo tanto, $\alpha = -2\cos(\theta_1) = +1$.
En continua, la ganancia es +2, por lo tanto (sustituyendo $x[n] = 1$ en la ecuación de recurrencia y estudiando la salida en régimen), $2(1+\beta) = 1+1+1$, entonces $\beta = 1/2$.

(c) $|\beta| < 1$, por lo cual el filtro es estable (notar que el polo del filtro está en $z = -\beta$).

(d) Para simplificar el estudio de $h[n]$, considero 2 filtros en cascada: $k[n] + \beta k[n-1] = x[n]$ seguido por $y[n] = k[n] + \alpha k[n-1] + k[n-2]$.
El filtro recursivo tiene respuesta $h_1[n] = (-1/2)^n u[n]$, y el filtro no recursivo tiene respuesta $h_2[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]$.
Haciendo la convolución de estos 2 filtros, queda $h[n] = h_1[n] + h_1[n-1] + h_1[n-2] = (-1/2)^n\{u[n] - 2u[n-1] + 4u[n-2]\}$.

(e) Para realizar un filtro de orden dos con sólo dos elemenos de retardo, se debe recurrir a la forma canónica. El coeficiente recursivo es $-\beta$, y los tres coeficientes no recursivos valen 1.

Pregunta 1

Ver teórico.