Señales y Sistemas

Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

12 de diciembre de 2019

Indicaciones

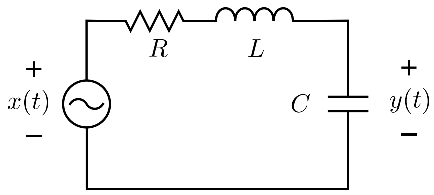
- La prueba tiene una duración total de 4 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas. Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones. En las gráficas o bosquejos deben indicarse claramente los ejes y puntos relevantes.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Problema 1

Sea un sistema de tiempo continuo, lineal, invariante en el tiempo, causal y estable. Sea $h(t)$ su respuesta al impulso, y $s(t)$ su respuesta al escalón.

(a) Demostrar que si $h(t) \geq 0$ para todo $t \geq 0$ entonces la respuesta al escalón no presenta sobretiro, esto es $\lim_{t\to\infty} s(t) \geq s(t)$ para todo $t \geq 0$.

Sea el sistema definido por el circuito RLC de la siguiente figura, con el voltaje $x(t)$ de la fuente como entrada y el voltaje en el capacitor como salida $y(t)$.



(b) Hallar la transferencia del sistema en el dominio de Laplace.

(c) Hallar la respuesta al impulso en función de R, L y C.

(d) Usando el resultado de la parte (a), determinar la relación que deben cumplir R, L y C para que la respuesta al escalón no presente sobretiro (sobretensión en el caso de un circuito RLC).

(e) Para el menor valor de R hallado en la parte anterior, hallar y bosquejar la Transformada de Fourier de este sistema.

(f) Calcular la salida en régimen cuando la entrada es $x(t) = u(t)(\cos(\omega_a t) + \frac{1}{2}\sin(\omega_b t + \pi/3))$ para el mismo valor de R que en la parte anterior y con $\omega_a = 1/\sqrt{LC}$, $\omega_b = R/L$.

Problema 2

Sea un filtro de tiempo discreto de entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ simétrico de la forma

$$y[n] = ax[n-2] + bx[n-1] + cx[n] + bx[n+1] + ax[n+2] \tag{1}$$

(a) Determinar si el filtro es estable, y mostrar que no es causal.

(b) Obtener su respuesta en frecuencia en función de los parámetros a, b y c.

Se desea diseñar el filtro pasabajos con frecuencia de corte $\theta_0 = \pi/4$. Para ello se fuerza a que $H(e^{j\theta})$ pase por tres puntos seleccionados ($\theta = \{0, \pi/4, \pi\}$).

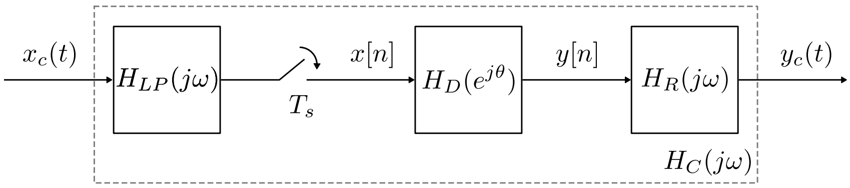
(c) Hallar los coeficientes, a, b y c tales que $H(e^{j\theta})_{\theta=0} = 1$, $H(e^{j\theta})|_{\theta=\pi/4} = 0.5$ y $H(e^{j\theta})|_{\theta=\pi} = 0$.

(d) Bosquejar $|H(e^{j\theta})|$ para los valores a, b, y c hallados en la parte anterior.

Se desea trabajar con una versión causal, H_D, del filtro de la expresión (1) con el menor retardo posible, y cuya respuesta frecuencial sea igual en módulo, esto es $|H_D(e^{j\theta})| = |H(e^{j\theta})|, \forall\theta$.

(e) Dar la expresión de la ecuación en recurrencia del filtro causal H_D.

Considerar el filtro de tiempo continuo $H_C(j\omega)$ de la siguiente figura, compuesto por un filtro pasabajos ideal H_{LP} de ancho de banda π/T_s seguido de un muestreador de período T_s, el filtro de tiempo discreto causal H_D diseñado en la parte anterior, y un filtro reconstructor ideal H_R de período T_s y ancho de banda π/T_s.



(f) Hallar la transferencia $H_C(j\omega)$ del sistema global en tiempo continuo.

(g) Determinar si el sistema H_C: (i) es estable, (ii) es causal, (iii) introduce distorsión de fase.

(h) Hallar la salida $y_c(t)$ cuando la entrada es $x_c(t) = \cos(2\pi f_a t) + \frac{1}{2}\sin(2\pi f_b t)$ para los valores $T_s = 20\ \mu s$, $f_a = 10$ kHz y $f_b = 100$ kHz.

(i) Bosquejar el espectro a la entrada y salida de cada uno de los filtros $H_{LP}(j\omega)$, $H(e^{j\theta})$ y $H_R(j\omega)$.

Pregunta 1

Considerar un sistema de tiempo discreto con respuesta al impulso $h[n]$.

(a) Demostrar que si el sistema es lineal e invariante en el tiempo, entonces su salida $y[n]$ se obtiene como la convolución de la entrada $x[n]$ con $h[n]$.

(b) Hallar la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema $y[n] = (x[n])^2$.

(c) Para el sistema de la parte (b), dar una entrada $x_1[n]$ tal que la salida $y_1[n] \neq x_1[n] * h[n]$, donde $*$ es el operador de convolución.

(d) ¿Qué falla para no poder aplicar el resultado de la parte (a) en el sistema de la parte (b)?

Solución

Problema 1

(a)

$$
\begin{aligned}
s(t) &= u(t) * h(t) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} u(v)h(t-v)dv \\
&= \int_{0}^{\infty} h(t-v)dv \\
&= \int_{0}^{t} h(t-v)dv
\end{aligned}
$$

dado que $h(t) > 0$ para todo t, entonces $s(t)$ es creciente, por lo tanto se cumple que:

$$
\lim_{t\to\infty} s(t) \quad \geq \quad s(t)
$$

para todo t.

(b) Resolviendo la malla: $X(s) = Y(s) + RI(s) + +LsI(s)$. Además se tiene que $I(s) = CsI(s)$. Sustituyendo esta última en la primer ecuación:

$$
X(s) = \left(1 + RCs + LCs^2\right) Y(s)
$$

$$
\begin{aligned}
H(s) &= \frac{Y(s)}{X(s)} \\
&= \frac{1}{(1 + RCs + LCs^2)}
\end{aligned}
$$

(c)

$$
h(t) = \frac{e^{-\frac{R}{2L}t}}{C\sqrt{R^2 - 4\frac{L}{C}}} \left(e^{\frac{\sqrt{R^2-4\frac{L}{C}}}{2L}t} - e^{-\frac{\sqrt{R^2-4\frac{L}{C}}}{2L}t} \right)
$$

(d)

$$
R^2 > 4\frac{L}{C}
$$

De esta forma los dos polos del sistemas son reales y negativos.

(e) $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. Entonces

$$
H(s) = \frac{1}{LC\left(s^2 + \frac{2}{\sqrt{LC}}s + \frac{1}{LC}\right)}
$$

(f) Tenemos que $x(t) = u(t)\left(\cos(\omega_a t) + \frac{1}{2}\sin(\omega_b t + \pi/3)\right)$, por lo que su transformada de Fourier es:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{s}{s^2+\omega_a^2} + \frac{1}{2}\left(\cos(\pi/3)\frac{\omega_b}{s^2+\omega_b^2} + \sin(\pi/3)\frac{s\omega_b}{s^2+\omega_b}\right) \\ &= \frac{s}{s^2+\omega_a^2} + \frac{1}{4}\frac{\omega_b}{s^2+\omega_b^2}(1+\sqrt{3}s) \end{aligned}$$

Para $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, $H(s)$ queda:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{LC\left(s+\frac{R}{2L}\right)^2} \\ &= \frac{\omega_a^2}{\left(s+\frac{\omega_b}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

La salida para esta entrada es:

$$y(t) = F^{-1}\{H(s)X(s)\}$$

Problema 2

(a) El filtro es del tipo FIR, por lo tanto es estable. Pero no es causal porque el mismo depende de dos muestras del futuro con respecto a la muestra actual en n.

(b)

$$H(e^{j\theta}) = a2\cos(2\theta) + b2\cos(\theta) + c$$

(c) Al evaluar la transferencia en las tres frecuencias se obtienen tres ecuaciones para tres parámetros. Entonces los parámetros se pueden despejar de forma fácil: $a = \frac{\sqrt{2}}{8}$, $b = \frac{1}{4}$, $c = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$.

(d)

(e) Para que el filtro sea causal alcanza con un retardo de dos muestras. Esto no afecta en nada el módulo de la transferencia. Entonces la ecuación recurrencia queda:

$$y[n] = ax[n-4] + bx[n-3] + cx[n-2] + bx[n-1] + ax[n]$$

(f)

$$H_C(j\omega) = H_{LP}(j\omega)H_D(j\omega)H_R(j\omega)$$

donde

$$H_D(j\omega) = \begin{cases} H(e^{jT_s\omega}), & |\omega| \leq \frac{\omega_s}{2} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(g) (i) Es estable dado que es un combinación de filtros estables.
(ii) Es causal, porque todos los filtro individualmente son causales.
(iii) Si introduce distorsión de fase, ya que $H_D(e^{j\theta})$ tiene un retardo de grupo de 2.

(h) El primer filtro pasa bajo tiene un ancho de banda de $\pi/T_s = \pi(50kHz)$, por lo que el segundo termino correspondiente al seno de ancho de banda $\pi(100kHz)$, es totalmente neutralizado al pasar por el filtro. Por lo que a la salida del filtro la salida es $x_{LP}(t) = \cos(2\pi f_a t)$, por lo tanto su transformada es $X_{LP}(j\omega) = \frac{1}{2}\left(\delta(\omega - 2\pi f_a) + \delta(\omega + 2\pi f_a)\right)$.

El siguiente filtro su transferencia es:

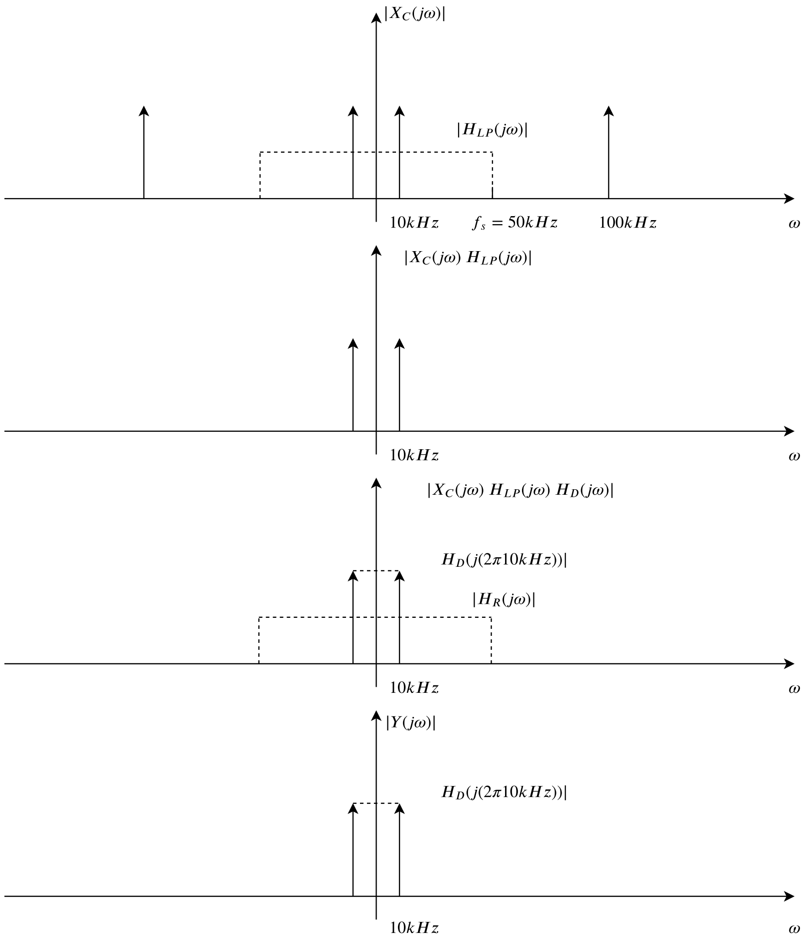
$$H_D(j\omega) = \begin{cases} e^{-2jT_s\omega}\left[2a\cos(2T_s\omega) + 2b\cos(T_s\omega) + c\right], & |\omega| \le \frac{\omega_s}{2} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces al filtrar la señal $X_{LP}(j\omega)$ por este se tiene:

$$X_D(j\omega) = \frac{1}{2}\left(2a\cos(4T_s\pi f_a) + 2b\cos(2T_s\pi f_a) + c\right) 2\cos(4T_s\pi f_a)\left[\delta(\omega - 2\pi f_a) + \delta(\omega + 2\pi f_a)\right]$$

Luego el filtro reconstructor tiene un ancho de banda $\pi(50kHz)$, por lo que no afecta a la señal $X_D(j\omega)$, por lo tanto para obtener la salida del sistema alcanza con antitransformar esta última.

$$y(t) = \left[\left(2a\cos(4T_s\pi f_a) + 2b\cos(2T_s\pi f_a) + c\right) 2\cos(4T_s\pi f_a)\right]\,\cos(2\pi f_a t)$$



(i)

Pregunta 1

(a) Ver Teórico.

(b)

$$h[n] = \delta[n]$$

(c) Tomando la señal $x_1[n] = 2\delta[n]$, entonces $y_1[n] = 4\delta[n]$, y $x_1[n] * h[n] = 2\delta[n]$

(d) Que el sistema no es lineal.