Señales y Sistemas

Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

23 de julio de 2019

Indicaciones

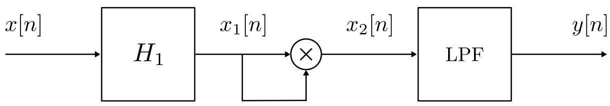
- La prueba tiene una duración total de 4 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas. Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones. En las gráficas o bosquejos deben indicarse claramente los ejes y puntos relevantes.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Problema 1

Una señal de audio de ancho de banda 8000 Hz debe ser muestreada para ser procesada en tiempo discreto.

(a) Hallar la mínima frecuencia de muestreo que permita representar la señal sin pérdida de información.

De ahora en más se trabajará con la señal muestreada $x[n]$ utilizando la frecuencia de muestreo hallada en la parte anterior.
Se desea identificar en qué secciones del audio hay una voz hablada. Una forma de estimarlo consiste en calcular la potencia de la señal en el rango de frecuencias entre 200 Hz y 3800 Hz con un sistema completo como el que muestra la siguiente figura.



Para esto se debe diseñar un filtro causal pasabanda H_1, de tercer orden y de coeficientes reales que cumpla las siguientes condiciones:

- Debe tener un polo en cero y dos polos conjugados de módulo 0.9 en las frecuencias correspondientes a 2000 Hz.
- La ganancia debe ser nula en frecuencia 0 y en frecuencia 4000 Hz.
- La ganancia debe ser 0,1 en 8000 Hz.

(b) Dar un diagrama de polos y ceros del sistema.

(c) Hallar la respuesta en frecuencia $H_1(e^{j\theta})$.

(d) Bosquejar el módulo de la respuesta en frecuencia $H_1(e^{j\theta})$.

La potencia de $x_1[n]$, se estima como el cuadrado de la señal, $x_2[n] = x_1^2[n]$ y luego se filtra $x_2[n]$ con un filtro pasabajos no ideal, definido por la ecuación en recurrencia definida más abajo.

(e) Estimar el ancho de banda de $x_2[n]$.

El filtro pasabajos tiene la forma $y[n] = 0.99\, y[n-1] + 0.01\, x_2[n]$

(f) Estudiar la estabilidad del filtro.

(g) Hallar la respuesta al impulso $h_2[n]$ del filtro pasabajos.

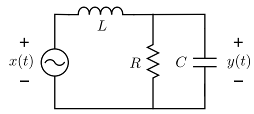
(h) Dar una expresión que permita calcular la salida $y[n]$ en función de la entrada $x[n]$ al sistema completo.

(i) Indicar si el sistema completo es un SLIT. ¿Es posible calcular la salida en función de la entrada y la respuesta al impulso?

Problema 2

Sea el sistema descripto por el circuito de la figura, donde la entrada $x(t)$ es voltaje de la fuente y la salida $y(t)$ el voltaje en la resistencia de la segunda rama. Este sistema es modelado por la siguiente ecuación diferencial

$$LC\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{dy}{dt} + y(t) = x(t).$$

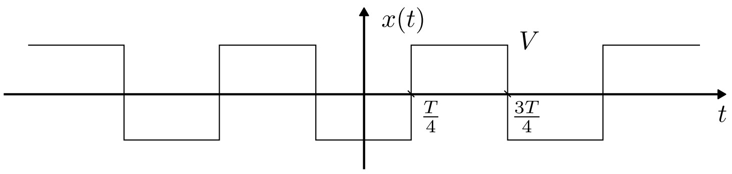


(a) Determinar si el sistema es estable.

(b) Hallar el menor valor de R para que la respuesta al escalón no presente oscilaciones.

(c) Para este valor de R, hallar y bosquejar la respuesta en frecuencia $H_C(j\omega)$.

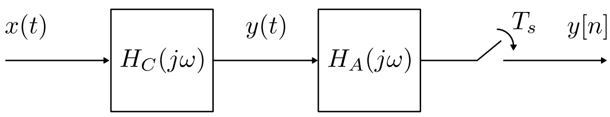
Se inyecta a la entrada la señal cuadrada $x(t)$ de la figura de período T.



(d) Hallar la serie de Fourier de $x(t)$.

(e) Calcular la salida $y(t)$ cuando la entrada es $x(t)$. Puede expresarse $y(t)$ como una suma infinita.

Se muestrea la salida $y(t)$ con período de muestreo $T_s = {}^2\!/_5\, T$, obteniendo la señal de tiempo discreto $y[n]$ según la siguiente figura, donde $H_A(j\omega)$ representa el filto antialiasing ideal asociado al muestreo.



(f) Hallar y bosquejar la transformada de tiempo discreto de Fourier de $y[n]$.

(g) Hallar la salida $y[n]$.

Pregunta 1

Considerar la señal de tiempo discreto $x[n]$ con transformada Z $X(z)$.

(a) Mostrar que $X(z) = \mathcal{F}\{x[n]|z|^{-n}\}$ donde $\mathcal{F}\{\cdot\}$ es la Transformada de Fourier correspondiente.

(b) Mostrar que si $x[n] = 0, \forall n > N_1$ y la circunferencia de radio r_0 está en la región de convergencia de $X(z)$, entonces todos los z complejos con $|z| > r_0$ también están en la región de convergencia $X(z)$.

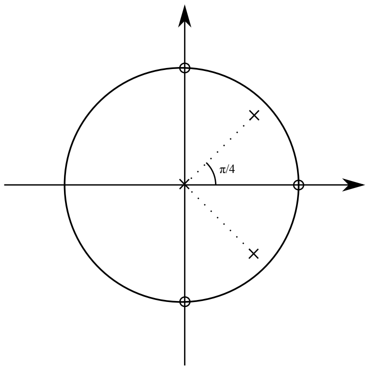
Considerar ahora un SLIT de tiempo discreto con respuesta al impulso $h[n]$ y función de transferencia $H(z)$ racional.

(c) Mostrar las condiciones que deben cumplir los polos de $H(z)$ respecto al círculo unidad para que $h[n]$ sea estable BIBO.

Solución

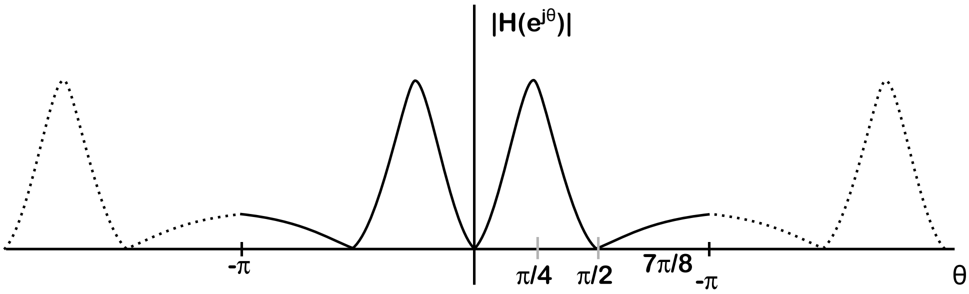
Problema 1

(a) La frecuencia de muestreo debe ser mayor al doble del ancho de banda de la señal. Es decir $f_s = 16$ kHz



(b)

(c) El sistema tendrá dos polos en $z = 0.9e^{\pm j\pi/4}$ dos ceros en $z = \pm j$ y un cero en $z = 1$. La transferencia del sistema tiene la forma $H(z) = A\frac{(z-1)(z-j)(z+j)}{z(z-0.9e^{j\pi/4})(z-0.9e^{-j\pi/4})}$. $|H(-1)| = 0.1$
Sólo resta calcular el valor de la constante A.
Se debe cumplir que $|H(-1)| = 1.3A = 0.1$, por lo tanto $A = 0.077$.



(d)

(e) En el tiempo se tiene: $x_2[n] = x_1^2[n]$ por lo tanto $H_2(e^{j\theta}) = H_1(e^{j\theta}) * H_1(e^{j\theta})$.
Entonces el soporte de la $H_2(e^{j\theta})$ tendrá del doble de ancho que el de $H_1(e^{j\theta})$ que había sido limitado hasta aproximadamente 4kHz. por lo tanto en ancho de banda aproximado de H_2 será 8kHz.

(f) El sistema es causal y tiene un polo en $z = 0.99$ que está dentro de la circunferencia unidad. Por lo tanto la ROC incluye a la circunferencia unidad y por lo tanto el filtro es estable.

(g) $h[n] = 0.01u[n]0.99^n$

(h) $y[n] = (x[n] * h_1[n])^2 * h_2[n]$

(i) No, el sistema completo no es lineal, por lo tanto no es un SLIT, y no podemos caracterizarlo simplemente con la respuesta al impulso.

Problema 2

(a) La transferencia es

$$H_C(s) = \frac{1}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1}$$

con polos

$$p = \frac{1}{2LC}\left(-\frac{L}{R} \pm \sqrt{\left(\frac{L}{R}\right)^2 - 4LC}\right)$$

Dado que el sistema es causal, y los polos están en el semiplano izquierdo, entonces el sistema es BIBO estable.

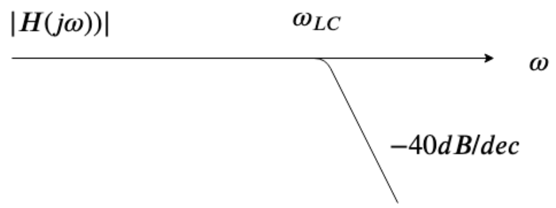
(b) Buscamos que la transferencia tenga polos reales, lo que se cumple cuando $\left(\frac{L}{R}\right)^2 - 4LC \geq 0 \leftrightarrow R \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$. El mayor valor de R es entonces

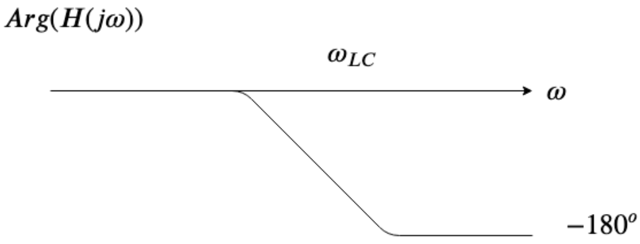
$$R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

(c) La respuesta en frecuencia es

$$H_(j\omega) = \frac{1}{LC(j\omega)^2 + \frac{L}{R}j\omega + 1} = \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{\omega_{LC}} + 1\right)^2}$$

Los diagramas de Bode toman la forma





(d) Es más sencillo definir $g(t) = -x(t) + V$ y calcular los coeficientes de $g(t)$

$$C_k^g = \frac{1}{T}\int_{-T/4}^{T/4} g(t)e^{-j\frac{2\pi}{T}kt}dt = \frac{1}{T}\int_{-T/4}^{T/4} 2Ve^{-j\frac{2\pi}{T}kt}dt = \frac{2V}{\pi k}\sin\frac{\pi k}{2} = C_{-k}^g$$

Luego

$$x(t) = -g(t) + V = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2V}{\pi k}\sin\frac{\pi k}{2}\left(e^{j\frac{2\pi}{T}kt} + e^{-j\frac{2\pi}{T}kt}\right) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4V}{\pi k}\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)$$

Se observa que por simetría la componente DC de $x(t)$ es nula.

(e) Definiendo $\omega_k := \frac{2\pi}{T}k$ entonces

$$H_C(j\omega_k) = \frac{1}{\left(\frac{j\omega_k}{\omega_{LC}} + 1\right)^2} = A_k + jB_k$$

donde

$$A_k = \frac{1 - (\omega_k/\omega_{LC})^2}{\left((\omega_k/\omega_{LC})^2 + 1\right)^2}, \quad B_k = \frac{-2\,(\omega_k/\omega_{LC})}{\left((\omega_k/\omega_{LC})^2 + 1\right)^2}$$

Luego

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k^x H_C(j\omega_k) e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2V}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)\left((A_k + jB_k)e^{j\frac{2\pi}{T}kt} + (A_k - jB_k)e^{-j\frac{2\pi}{T}kt}\right)$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4V}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)\left(A_k \cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) - B_k \sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)\right)$$

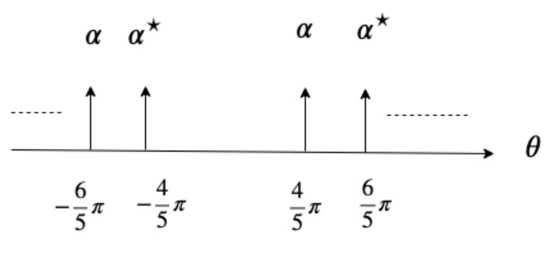
(f) El filtro antialiasing deja pasar solo las componentes en frecuencias ω_1 y ω_2 pero esta última es nula. Por tanto la salida del filtro antialiasing tiene una transformada de Fourier compuesta por dos deltas en ω_1 y $-\omega_1$. Correspondientemente, la transformada de Fourier consta de dos deltas a frecuencias θ_1 y $-\theta_1$ con

$$\theta_1 = \omega_1 \frac{2\pi}{\omega_s} = \frac{2\pi}{T}\frac{2\pi}{2\pi/T_s} = \frac{4}{5}\pi$$

Las delta con soporte en θ_1 va multiplicada por

$$\alpha = \frac{1}{T_s}\frac{2V}{\pi k}\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)(A_k + jB_k)\bigg|_{k=1} = \frac{2V}{\pi T_s}\frac{1}{\left(\frac{j\omega_1}{\omega_{LC}} + 1\right)^2} = \frac{5V}{\pi T}\frac{1}{\left(j\frac{2\pi\sqrt{LC}}{T} + 1\right)^2}$$

y la delta en $-\theta_1$ por $\alpha^\star$, esto es, su conjugada.
Al considerar lo anterior, y tomando en cuenta que la DTFT es periódica de período 2π, el bosquejo de la DTFT $Y(e^{j\theta})$ toma la forma



(g) La componente en frecuencia ω_1 muestreada en $t = nT_s$ toma la forma

$$y[n] = -\frac{4V}{\pi}\left(A_1 \cos\left(\frac{4\pi}{5}n\right) - B_1 \sin\left(\frac{4\pi}{5}n\right)\right)$$

con

$$A_1 = \frac{1 - (\omega_1/\omega_L C)^2}{\left((\omega_1/\omega_L C)^2 + 1\right)^2} = \frac{1 - \left(2\pi\sqrt{LC}/T\right)^2}{\left(\left(2\pi\sqrt{LC}/T\right)^2 + 1\right)^2}$$

y

$$B_1 = \frac{-2\left(2\pi\sqrt{LC}/T\right)}{\left(\left(2\pi\sqrt{LC}/T\right)^2 + 1\right)^2}$$

Pregunta 1

(a) Ver teórico.

(b) Ver teórico.

(c) Ver teórico.