Vectores de respuestas de las versiones:

- Versión 1. Primer ejercicio de Integrales triples:
  1 (B); 2 (B); 3 (C); 4 (C); 5 (B).

- Versión 2. Primer ejercicio de sucesiones:
  1 (A); 2 (B); 3 (A); 4 (A); 5 (B).

- Versión 3. Primer ejercicio de Integrales Impropias:
  1 (C); 2 (B); 3 (C); 4 (B); 5 (C).

Ejercicio de desarrollo

Parte i. Ver notas capítulo 7, Teorema 7.2.
Parte ii. Es falso el recíproco como lo muestra el siguiente ejemplo:
Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin(\frac{1}{x^2+y^2}) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Primero vamos a probar que f es diferenciable en $(0,0)$. Un simple cálculo muestra que $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. Como $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, hay que probar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$. Entonces

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)\sin(\frac{1}{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\sqrt{(x^2+y^2)}}_{\to 0} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}_{\text{acot}} = 0$$

Resta probar que f_x y f_y no son continuas en el origen. Para $(x,y) \neq (0,0)$ se tiene que

$$f_x(x,y) = 2x\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\frac{2x}{(x^2+y^2)}$$

De donde se deduce que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) = \nexists$ (basta tomar la restricción $y = x$). Por tanto f_x no es continua en $(0,0)$. Un cálculo análogo muestra que f_y no es continua en $(0,0)$.