Segundo parcial de Lógica

15 de julio 2024

Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **60** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en el teórico y en el práctico del mismo. En esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (15 puntos)

Considere un lenguaje de tipo $\langle -; 2; 1\rangle$, con símbolo de función f y constante c, y la siguiente estructura $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, +, k\rangle$ donde k es un natural arbitrario.

a. Defina $\texttt{TERM}_C$, el conjunto de los términos cerrados para ese tipo de similaridad.
b. Defina la función $Cant_f : \texttt{TERM}_C \to \mathbb{N}$ tal que cuenta la cantidad de símbolos f que aparecen en un término. Ej: $Cant_f(c) = 0, Cant_f(f(f(c,c),c)) = 2$
c. Pruebe por inducción que para cualquier término $t \in \texttt{TERM}_C$, $t^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{M}} * (Cant_f(t) + 1)$

Propuesta de solución

a. i $c \in \texttt{TERM}_C$

 ii Si $t_1, t_2 \in \texttt{TERM}_C$, entonces $f(t_1, t_2) \in \texttt{TERM}_C$

b.

$$\begin{aligned} Cant_f(c) &= 0 \\ Cant_f(f(t_1,t_2)) &= Cant_f(t_1) + Cant_f(t_1) + 1 \end{aligned}$$

c. Queremos probar: $(\bar{\forall} t \in \texttt{TERM}_C) t^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{M}} * (Cant_f(t) + 1)$

Se hará una prueba utilizando el PIP para $\texttt{TERM}_C$, con la propiedad:

$$\mathcal{P}(t) := t^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{M}} * (Cant_f(t) + 1)$$

PB.
T) $\mathcal{P}(c) : c^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{M}} * (Cant_f(c) + 1)$
Dem.

$Cant_f(c) = 0$ por definición de $Cant_f$
Por esto, se cumplen las siguientes igualdades:

$$c^{\mathcal{M}} * (Cant_f(c) + 1) = c^{\mathcal{M}} * (0 + 1) = c^{\mathcal{M}}$$

■
PI.
H) $\mathcal{P}(t_1) : t_1^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{M}} * (Cant_f(t_1) + 1)$
$\mathcal{P}(t_2) : t_2^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{M}} * (Cant_f(t_2) + 1)$
T) $\mathcal{P}(f(t_1, t_2)) : f(t_1, t_2)^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{M}} * (Cant_f(f(t_1, t_2)) + 1)$
Dem.

$f(t_1, t_2)^{\mathcal{M}} = t_1^{\mathcal{M}} + t_2^{\mathcal{M}}$ por definición de $\mathcal{M}$
Sustituyendo la dos hipótesis inductivas en la igualdad anterior, se obtiene:

$$f(t_1, t_2)^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{M}} * (Cant_f(t_1) + 1) + c^{\mathcal{M}} * (Cant_f(t_2) + 1)$$

Sacando factor común y reordenando, se obtiene:

$$f(t_1, t_2)^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{M}} * (Cant_f(t_1) + Cant_f(t_2) + 1 + 1)$$

Sustituyendo la segunda ecuación de la definición de $Cant_f$ en la expresión anterior, se obtiene lo que se quería demostrar:

$$f(t_1, t_2)^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{M}} * (Cant_f(f(t_1, t_2)) + 1)$$

■
Las demostraciones anteriores, prueban que la propiedad

$$\mathcal{P}(t) := t^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{M}} * (Cant_f(t) + 1)$$

está en las hipótesis del PIP de $\texttt{TERM}_C$. Aplicando este PIP, se obtiene que es verdadero que $(\bar{\forall} t \in \texttt{TERM}_C) t^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{M}} * (Cant_f(t) + 1)$.

Ejercicio 2 (15 puntos)

Se considera un lenguaje de primer orden con igualdad con tipo de similaridad $\langle 1; 1; 0 \rangle$. Se usará el símbolo de predicado P y símbolo de función f.

Sean las siguientes definiciones:

- $\varphi_1 := (\forall x) P(f(x))$
- $\varphi_2 := (\exists x) \neg P(x)$
- $\Gamma := \{\varphi_1, \varphi_2\}$

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.

a. $\models \varphi_1 \land \varphi_2$
b. Existe M modelo de Γ con universo $\mathbb{N}$.
c. Existe M modelo de Γ con universo $\{\bullet\}$.

Propuesta de solución

En primer término, vamos a considerar una estructura genérica $M := \langle U, A, F\rangle$ donde U es el cojunto universo, $A \subseteq U$ y F es una función con dominio y codominio en U.

Veamos qué debe cumplir M para ser modelo de φ_1 $(*_1)$:

$M \models (\forall x)P(f(x))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$(\bar{\forall} a \in U)M \models P(f(\bar{a})$
$\Leftrightarrow$ (def. de $\models$)
$(\bar{\forall} a \in U)v^M(P(f(\bar{a}))) = 1$
$\Leftrightarrow$ (def. de v^M)
$(\bar{\forall} a \in U)f(\bar{a})^M \in A$
$\Leftrightarrow$ (def. de $-^M$)
$(\bar{\forall} a \in U)F(a) \in A$

Veamos que debe cumplir una estructura M para modelar φ_2 $(*_2)$:

$M \models (\exists x)\neg P(x)$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$(\bar{\exists} a \in U)M \models \neg P(\bar{a})$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$(\bar{\exists} a \in U)M \not\models P(\bar{a})$
$\Leftrightarrow$ (def. de $\models$)
$(\bar{\exists} a \in U)v^M(P(\bar{a})) = 0$
$\Leftrightarrow$ (def. de v^M)
$(\bar{\exists} a \in U)\bar{a}^M \notin A$
$\Leftrightarrow$ (def. de $-^M$)
$(\bar{\exists} a \in U)a \notin A$

a. **Falsa**.

$\models \varphi_1 \wedge \varphi_2$
$\Leftrightarrow$ (def. de $\models$)
$(\bar{\forall} M : eta)M \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$(\bar{\forall} M : eta)(M \models \varphi_1 \text{ y } M \models \varphi_2)$

Para que no se cumpla lo último alcanza con encontrar una estructura M_1 tal que $M_1 \nvDash \varphi_1$.

Según $(*_1)$ alcanza con que exista un elemento del universo cuya imagen en la función no pertenezca al conjunto asociado con el predicado P.

Podemos definir $M_1 := \langle \{\bullet\}, \emptyset, id\rangle$.

Como $F(\bullet) = \bullet$ y $\bullet \notin \emptyset$, se cumple que $M_1 \not\models \varphi_1$ y por lo tanto $M_1 \not\models \varphi_1 \wedge \varphi_2$.

Se concluye que la sentencia $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ no es verdad lógica ya que encontramos una estructura que no la modela.

b. **Verdadero**.

Sea $M_2 := \langle \mathbb{N}, \{0\}, G\rangle$ donde $G(n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Aplicando $(*_1)$:

$$M_2 \models \varphi_1 \Leftrightarrow (\bar{\forall} n \in \mathbb{N})\ G(n) \in \{0\}$$

lo cual se cumple por definición de G.

Aplicando $(*_2)$:

$$M_2 \models \varphi_2 \Leftrightarrow (\bar{\exists} n \in \mathbb{N}) n \notin \{0\}$$

lo cual se cumple ya que existen naturales distintos de 0.

c. **Falso**.

Consideremos una estructura $M := \langle \{\bullet\}, A, F \rangle$.

Observamos que

- la función F sólo puede ser la función identidad.
- El conjunto A puede ser igual a $\{\bullet\}$ o puede ser vacío.

Si $A = \emptyset$ entonces $F(\bullet) \notin A$ y por lo tanto no se cumple $(\bar{\forall} a \in \{\bullet\}) F(a) \in A$. Luego: $M \not\models \varphi_1$ (por $(*_1)$)

Si $A = \{\bullet\}$ entonces no existen elementos del universo que no estén en A y no se cumple $(\bar{\exists} a \in \{\bullet\}) a \notin A$. Luego: $M \not\models \varphi_2$ (por $(*_2)$).

En los dos casos posibles, vemos que M no modela alguna sentencia de Γ. Luego $M \not\models \Gamma$.

Ejercicio 3 (15 puntos)

Construya derivaciones que justifiquen los siguientes juicios:

a. $(\forall x)(P(x, f(x), g(x)) \leftrightarrow f(x) =' g(x)), (\forall x) g(x) =' x, (\forall x) f(x) =' c \vdash (\exists y) P(y, f(y), g(y))$

b. $(\forall x)(\exists y) f(y) =' x \vdash (\forall x) P(f(x)) \leftrightarrow (\forall x) P(x)$

Nota: En ningún caso se aceptan justificaciones semánticas.

Propuesta de solución

a. $(\forall x)(P(x, f(x), g(x)) \leftrightarrow f(x) =' g(x)), (\forall x) g(x) =' x, (\forall x) f(x) =' c \vdash (\exists y) P(y, f(y), g(y))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x)(P(x, f(x), g(x)) \leftrightarrow f(x) =' g(x))}{P(c, f(c), g(c)) \leftrightarrow f(c) =' g(c)}\; E\forall(*3) \qquad \dfrac{\dfrac{(\forall x) f(x) =' c}{f(c) =' c}\; E\forall(*2) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x) g(x) =' x}{g(c) =' c}\; E\forall(*1)}{c =' g(c)}\; RI_2}{}}{f(c) =' g(c)}\; RI_3}{P(c, f(c), g(c))}\; E\leftrightarrow}{(\exists y) P(y, f(y), g(y))}\; I\exists(*4)$$

$(*1)$ c libre para x en $g(x) =' x$
$(*2)$ c libre para x en $f(x) =' c$
$(*3)$ c libre para x en $P(x, f(x), g(x)) \leftrightarrow f(x) =' g(x)$
$(*4)$ c libre para y en $P(y, f(y), g(y))$

b. $(\forall x)(\exists y)f(y) =' x \vdash (\forall x)P(f(x)) \leftrightarrow (\forall x)P(x)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x)(\exists y)f(y) =' x}{(\exists y)f(y) =' x}\,E\forall(*3) \qquad \dfrac{[f(y) =' x]^2 \qquad \dfrac{[(\forall x)P(f(x))]^1}{P(f(y))}\,E\forall(*5)}{P(x)}\,RI4(*4)}{P(x)}\,E\exists^2(*2)}{(\forall x)P(x)}\,I\forall(*1) \qquad \dfrac{\dfrac{[(\forall x)P(x)]^1}{P(f(x))}\,E\forall(*7)}{(\forall x)P(f(x))}\,I\forall(*6)}{(\forall x)P(f(x)) \leftrightarrow (\forall x)P(x)}\,I\leftrightarrow^1$$

$(*1)$ $x \notin FV(\{(\forall x)(\exists y)f(y) =' x, (\forall x)P(f(x))\})$
$(*2)$ $y \notin FV(\{(\forall x)P(f(x)), P(x)\})$
$(*3)$ x libre para x en $(\exists y)f(y) =' x$
$(*4)$ $f(y)$ libre para z en $P(z)$
x libre para z en $P(z)$
$(*5)$ y libre para x en $P(f(x))$
$(*6)$ $x \notin FV(\{(\forall x)P(x)\})$
$(*7)$ $f(x)$ libre para x en $P(x)$

Ejercicio 4 (15 puntos)

Considere el lenguaje de primer orden con igualdad de tipo de similaridad $\langle 1; 2; 1\rangle$, y alfabeto con símbolo de predicado P, símbolo de función f y símbolo de constante c.

Sean:

- $\varphi := (\forall x)(\forall y)(P(x) \to f(x, y) =' c)$
- $M_1 := \langle \mathbb{N}, \{0\}, *, 0\rangle$
- $M_2 := \langle \{\bullet, \circ\}, \{\bullet, \circ\}, F, \circ\rangle$, donde para cualquier a y b del universo, $F(a, b) = \circ$.
- $\mathcal{K} := \{M_1, M_2\}$

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.

a. $\varphi \in Th(\mathcal{K})$
b. $Mod(\{\varphi\}) \neq \emptyset$
c. $Th(Mod(\{\varphi\}))$ es consistente maximal

Propuesta de solución

a. **Verdadero.**

Sea $\mathcal{M}$ una estructura cualquiera del tipo dado. Entonces:

$\mathcal{M} \models \varphi$
$\Leftrightarrow$ (def. φ)
$\mathcal{M} \models (\forall x)(\forall y)(P(x) \to f(x,y) =' c)$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \models (\forall y)(P(\bar{a}) \to f(\bar{a},y) =' c)$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|)(\bar{\forall} b \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \models P(\bar{a}) \to f(\bar{a},\bar{b}) =' c$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|)(\bar{\forall} b \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models P(\bar{a}) \Rightarrow \mathcal{M} \models f(\bar{a},\bar{b}) =' c)$
$\Leftrightarrow$ (def. v^M)
$(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|)(\bar{\forall} b \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models P(\bar{a}) \Rightarrow f(\bar{a},\bar{b})^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{M}})$

Por lo tanto, instanciando para M_1:

$M_1 \models \varphi$
$\Leftrightarrow$ (def. M_1)
$(\bar{\forall} n \in \mathbb{N})(\bar{\forall} m \in \mathbb{N})(n \in \{0\} \Rightarrow n * m = 0)$
que se cumple por aritmética.

Y para M_2:

$M_2 \models \varphi$
$\Leftrightarrow$ (def. M_1)
$(\bar{\forall} a \in \{\bullet, \circ\})(\bar{\forall} b \in \{\bullet, \circ\})(a \in \{\bullet, \circ\} \Rightarrow F(a,b) = \circ)$
que se cumple por definición de F.

Entonces, como $M_1 \models \varphi$ y $M_2 \models \varphi$, queda demostrado que:

$$\varphi \in Th(\mathcal{K})$$

b. **Verdadero.**

En la parte anterior se probó que $M_1 \models \varphi$, entonces $M_1 \in Mod(\{\varphi\})$ y por lo tanto $Mod(\{\varphi\}) \neq \emptyset$.

c. **Falso.**

Sea la sentencia $\psi := (\forall x)P(x)$.

Probaremos que $\psi \notin Th(Mod(\{\varphi\}))$, pero que $Th(Mod(\{\varphi\})) \cup \{\psi\}$ es consistente, y por lo tanto el conjunto no puede ser consistente maximal.

$\psi \notin Th(Mod(\{\varphi\}))$
$\Leftrightarrow$ ($Th(Mod(\Gamma)) = \textsc{Cons}(\Gamma)$)
$\psi \notin \textsc{Cons}(\{\varphi\})$
$\Leftrightarrow$ (def. $\textsc{Cons}$)
$\varphi \nvdash \psi$
$\Leftrightarrow$ (corrección y completitud)
$\varphi \not\models \psi$
$\Leftrightarrow$ (def. $\models$)
$(\bar{\exists} \mathcal{M}\ eta)(\mathcal{M} \models \varphi \text{ y } \mathcal{M} \not\models \psi)$

Tomamos M_1 como testigo para probar esta afirmación. En la parte anterior se probó que $M_1 \models \varphi$. Falta probar que no modela a ψ:

$M_1 \vDash \psi$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$(\bar{\forall} n \in \mathbb{N}) M_1 \vDash P(\bar{n})$
$\Leftrightarrow$ (def. $\vDash$ y v^M)
$(\bar{\forall} n \in \mathbb{N})\ n \in \{0\}$
y esto es claramente falso, por ejemplo para $n = 1$.

Por otra parte, probamos que $Th(Mod(\{\varphi\})) \cup \{\psi\}$ es consistente, ya que M_2 lo modela.

Primero vemos que $M_2 \models Th(Mod(\{\varphi\}))$:

(por parte a)
$M_2 \models \varphi$
$\Rightarrow$ (def. Mod)
$M_2 \in Mod(\{\varphi\})$
$\Rightarrow$ (def. Th)
$M_2 \models Th(Mod(\{\varphi\}))$

M_2 también modela a ψ:

$M_2 \models \psi$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$(\bar{\forall} a \in \{\bullet, \circ\}) M_2 \vDash P(\bar{a})$
$\Leftrightarrow$ (def. $\vDash$ y v^M)
$(\bar{\forall} a \in \{\bullet, \circ\})\ a \in \{\bullet, \circ\}$
lo que se cumple trivialmente.

Entonces $M_2 \models Th(Mod(\{\varphi\})) \cup \{\psi\}$ y por lo tanto $Th(Mod(\{\varphi\}))$ no es consistente maximal.