Segundo parcial de Lógica

4 de julio 2023

Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **60** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en el teórico y en el práctico del mismo. En esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (15 puntos)

Considere un lenguaje de primer orden de tipo de similaridad $\langle 1; 2, 1; 1\rangle$ con símbolo de predicado Q, símbolos de función f y g y símbolo de constante c_1 y la estructura $\mathcal{M} = \langle \mathbb{Z}, \mathbb{N}, +, ^2, 1\rangle$.

a. Defina el conjunto $\texttt{TERM}_C$ de términos cerrados (sin constantes extendidas) del lenguaje.
b. Demuestre por inducción que $(\bar{\forall} t \in \texttt{TERM}_C)\ \mathcal{M} \models Q(t)$.
c. Considere un término cualquiera s tal que $V(s) = \{x\}$. Pruebe usando la parte anterior que $(\bar{\forall} t \in \texttt{TERM}_C) s[t/x]^{\mathcal{M}} \geq 0$.

Propuesta de solución

a. Se define $\texttt{TERM}_C$ como:

   i $c_1 \in \texttt{TERM}_C$
   ii si $t_1 \in \texttt{TERM}_C$ y $t_2 \in \texttt{TERM}_C$, entonces $f(t_1, t_2) \in \texttt{TERM}_C$
   iii si $t \in \texttt{TERM}_C$, entonces $g(t) \in \texttt{TERM}_C$

b. En primer lugar, se observa que:

$$\begin{array}{l}(\bar{\forall} t \in \texttt{TERM}_C)\ \mathcal{M} \models Q(t) \\ \Leftrightarrow \text{(def} \models) \\ (\bar{\forall} t \in \texttt{TERM}_C)\ v^{\mathcal{M}}(Q(t)) = 1 \\ \Leftrightarrow \text{(def } v^{\mathcal{M}} \text{ y } \mathcal{M}) \\ (\bar{\forall} t \in \texttt{TERM}_C)\ t^{\mathcal{M}} \in \mathbb{N}\end{array}$$

Probaremos esto último por inducción en $\texttt{TERM}_C$. La propiedad a probar es:

$$P(t) := t^{\mathcal{M}} \in \mathbb{N}$$

Paso Base

T) $P(c_1) : {c_1}^{\mathcal{M}} \in \mathbb{N}$

Demo.

Por interpretación de términos cerrados en $\mathcal{M}$ se cumple que ${c_1}^{\mathcal{M}} = 1$, que pertenece a los naturales.

Paso Inductivo 1

HI1) $P(t_1) : t_1^{\mathcal{M}} \in \mathbb{N}$

HI2) $P(t_2) : t_2^{\mathcal{M}} \in \mathbb{N}$

TI) $P(f(t_1, t_2)) : f(t_1, t_2)^{\mathcal{M}} \in \mathbb{N}$

Demo.

$f(t_1, t_2)^{\mathcal{M}} = t_1^{\mathcal{M}} + t_2^{\mathcal{M}}$ por interpretación de términos cerrados en $\mathcal{M}$.

Luego, por HI, sabemos que se cumple:

- $t_1^{\mathcal{M}} \in \mathbb{N}$
- $t_2^{\mathcal{M}} \in \mathbb{N}$

Entonces, se cumple: $t_1^{\mathcal{M}} + t_2^{\mathcal{M}} \in \mathbb{N}$ (la suma de dos naturales es un natural).

Paso Inductivo 2

HI) $P(t) : t^{\mathcal{M}} \in \mathbb{N}$

TI) $P(g(t)) : g(t)^{\mathcal{M}} \in \mathbb{N}$

Demo.

$g(t)^{\mathcal{M}} = (t^{\mathcal{M}})^2$ por interpretación de términos cerrados en $\mathcal{M}$.

Luego, por HI, sabemos que se cumple: $t^{\mathcal{M}} \in \mathbb{N}$.

Entonces, se cumple: $(t^{\mathcal{M}})^2 \in \mathbb{N}$ (el cuadrado de un natural es un natural).

Dado que para la propiedad definida se cumplen las hipótesis del PIP para $\texttt{TERM}_C$, se cumple que $(\bar{\forall} t \in \texttt{TERM}_C) t^{\mathcal{M}} \in \mathbb{N}$.

c. Hay que probar: $(\bar{\forall} t \in \texttt{TERM}_C) s[{}^{t}\!/\!_{x}]^{\mathcal{M}} \geq 0$.

Sea $t \in \texttt{TERM}_C$ arbitrario.

Como se cumple $V(s) = \{x\}$ y t es un término cerrado, entonces $s[{}^{t}\!/\!_{x}] \in \texttt{TERM}_C$.

Luego, por parte anterior, vemos que $s[{}^{t}\!/\!_{x}]^{\mathcal{M}} \in \mathbb{N}$, por lo que se cumple: $s[{}^{t}\!/\!_{x}]^{\mathcal{M}} \geq 0$.

Como t es un término arbitrario de $\texttt{TERM}_C$, se cumple: $(\bar{\forall} t \in \texttt{TERM}_C) s[{}^{t}\!/\!_{x}]^{\mathcal{M}} \geq 0$.

Ejercicio 2 (15 puntos)

Se considera un lenguaje de primer orden con igualdad, con tipo de similaridad $\langle 2; 1; 0 \rangle$, con símbolo de predicado P y símbolo de función f.

Sean las fórmulas:

- $\varphi := (\forall x) P(f(x), x)$
- $\psi := (\forall z)(\exists y) P(y, z)$

a. Pruebe que $\varphi \vdash \psi$.

b. Encontrar una estructura $\mathcal{M}_1$ tal que $\mathcal{M}_1 \models \varphi$ y $\mathcal{M}_1 \not\models \psi$. Si no fuera posible indique por qué.

c. Encontrar una estructura $\mathcal{M}_2$ tal que $\mathcal{M}_2 \not\models \varphi$ y $\mathcal{M}_2 \models \psi$. Si no fuera posible indique por qué.

d. Indicar cuáles de las siguientes afirmaciones se cumplen y cuáles no. Justifique.

   I. $\models \varphi$

   II. $\models \neg\varphi \vee \psi$

Propuesta de solución

a. Probamos que: $\varphi \vdash \psi$ con la siguiente derivación.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x)P(f(x), x)}{P(f(z), z)}\ E\forall(*_1)}{(\exists y)P(y, z)}\ I\exists(*_2)}{(\forall z)(\exists y)P(y, z)}\ I\forall(*_3)$$

$(*_1)$ z libre para x en $P(f(x), x)$

$(*_2)$ $f(z)$ libre para y en $P(y, z)$

$(*_3)$ z no ocurre libre en $(\forall x)P(f(x), x)$

b. No es posible dar una estructura que cumpla lo pedido.

Por la parte anterior, se cumple que $\varphi \vdash \psi$.

Por corrección concluímos que $\varphi \vDash \psi$.

Aplicando la definición de $\vDash$ queda probado que no es posible obtener un modelo de φ que no sea modelo de ψ.

c. Definimos $\mathcal{M}_2 = \langle \{\bullet, \diamond\}, R, F\rangle$ donde:

- $F(x) = \diamond \quad ((\bar{\forall} x) \in \{\bullet, \diamond\})$
- $R = \{(\bullet, \bullet), (\bullet, \diamond)\}$

Probaré que $\mathcal{M}_2 \nvDash (\forall x)P(f(x), x)$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}_2 \vDash (\forall x)P(f(x), x)\\
&\Leftrightarrow \text{(2.4.5)}\\
&(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}_2|)\ \mathcal{M}_2 \models P(f(\bar{a}), \bar{a})\\
&\Leftrightarrow \text{(definición de } \models)\\
&(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}_2|)\ v^{\mathcal{M}_2}(P(f(\bar{a}), \bar{a})) = 1\\
&\Leftrightarrow \text{(definición de } v^{\mathcal{M}_2})\\
&(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}_2|)\ (f(\bar{a})^{\mathcal{M}_2}, \bar{a}^{\mathcal{M}_2}) \in R\\
&\Leftrightarrow \text{(definición de } -^{\mathcal{M}_2})\\
&(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}_2|)\ (F(a), a) \in R
\end{aligned}$$

La última afirmación no se cumple ya que si consideramos $a = \bullet$, tenemos $F(a) = \diamond$ y $(\diamond, \bullet) \notin R$.

De lo anterior concluimos que $\mathcal{M}_2 \not\models \varphi$.

Probaremos que $\mathcal{M}_2 \models (\forall z)(\exists y)P(y, z)$:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{M}_2 \models (\forall z)(\exists y)P(y,z)\\
&\Leftrightarrow \text{(2.4.5)}\\
&(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}_2|)\ \mathcal{M}_2 \models (\exists y)P(y,\bar{a})\\
&\Leftrightarrow \text{(2.4.5)}\\
&(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}_2|)(\bar{\exists} b \in |\mathcal{M}_2|)\ \mathcal{M}_2 \models P(\bar{b},\bar{a})\\
&\Leftrightarrow \text{(definición de } \models)\\
&(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}_2|)(\bar{\exists} b \in |\mathcal{M}_2|)\ v^{\mathcal{M}_2}(P(\bar{b},\bar{a})) = 1\\
&\Leftrightarrow \text{(definición de } v^{\mathcal{M}_2})\\
&(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}_2|)(\bar{\exists} b \in |\mathcal{M}_2|)\ (\bar{b}^{\mathcal{M}_2},\bar{a}^{\mathcal{M}_2}) \in R\\
&\Leftrightarrow \text{(definición de } -^{\mathcal{M}_2})\\
&(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}_2|)(\bar{\exists} b \in |\mathcal{M}_2|)\ (b,a) \in R
\end{aligned}
$$

La última afirmación se cumple. Sólo hay que verificar dos casos:

1. $a = \bullet$: tomamos $b = \bullet$ y se cumple por definición de $\mathcal{M}_2$ que $(\bullet,\bullet) \in R$
2. $a = \diamond$: tomamos $b = \bullet$ y se cumple por defínción de $\mathcal{M}_2$ que $(\bullet,\diamond) \in R$

Del desarrollo anterior se concluye que $\mathcal{M}_2 \models \psi$.

d. I. **No se cumple**.

En la parte (b) dimos una estructura $\mathcal{M}_2$ que no es modelo de φ por lo tanto φ no es verdad lógica.

II. **Sí, se cumple**.

En la parte (a) se probó que $\varphi \vdash \psi$. Usando esa derivación y aplicando la regla de introducción del implica, se obtiene que $\vdash \varphi \to \psi$ y por corrección: $\models \varphi \to \psi$.

Como $\varphi \to \psi$ es equivalente a $\neg\varphi \lor \psi$ (equivalencia conocida) se concluye que $\models \neg\varphi \lor \psi$

Ejercicio 3 (15 puntos)

Construya derivaciones que justifiquen los siguientes juicios.

a. $(\forall x)x =' f(x) \vdash \neg(\exists x)(\exists y)\neg(P(x,y) \to P(f(x),f(y)))$
b. $(\forall x)f(x,c_0) =' x, (\forall x)f(x,c_1) =' x, (\forall x)(\forall y)f(x,y) =' f(y,x) \vdash c_0 =' c_1$

Nota: En ningún caso se aceptan justificaciones semánticas.

Propuesta de solución

a. $(\forall x)x =' f(x) \vdash \neg(\exists x)(\exists y)\neg(P(x,y) \to P(f(x),f(y)))$

$$
\dfrac{\dfrac{[(\exists x)(\exists y)\neg(P(x,y) \to P(f(x),f(y)))]^1 \qquad \dfrac{[(\exists y)\neg(P(x,y) \to P(f(x),f(y)))]^2 \qquad \dfrac{[\neg(P(x,y) \to P(f(x),f(y)))]^3 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x)x =' f(x)}{x =' f(x)}E\forall(*4) \quad \dfrac{(\forall x)x =' f(x)}{y =' f(y)}E\forall(*5) \quad [P(x,y)]^4}{P(f(x),f(y))}RI4(*3)}{P(x,y) \to P(f(x),f(y))}I\to(4)}{\bot}E\neg}{\bot}E\exists(3)(*2)}{\bot}E\exists(2)(*1)}{\neg(\exists x)(\exists y)\neg(P(x,y) \to P(f(x),f(y)))}I\neg(1)
$$

$(*_1)\ x \notin \mathrm{FV}(\{\bot, (\forall x)x =' f(x)\})$
$(*_2)\ y \notin \mathrm{FV}(\{\bot, (\forall x)x =' f(x)\})$

$(*_3)$ x libre para z_1 en $P(z_1, z_2)$, $f(x)$ libre para z_1 en $P(z_1, z_2)$, y libre para z_2 en $P(z_1, z_2)$ y $f(y)$ libre para z_2 en $P(z_1, z_2)$
$(*_4)$ x libre para x en $x =' f(x)$
$(*_5)$ y libre para x en $x =' f(x)$

b. $(\forall x)f(x, c_0) =' x, (\forall x)f(x, c_1) =' x, (\forall x)(\forall y)f(x, y) =' f(y, x) \vdash c_0 =' c_1$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x)f(x,c_1) =' x}{f(c_0,c_1) =' c_0}\,E\forall\star_1}{c_0 =' f(c_0,c_1)}\,RI2 \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x)(\forall y)f(x,y) =' f(y,x)}{(\forall y)f(c_0,y) =' f(y,c_0)}\,E\forall\star_4}{f(c_0,c_1) =' f(c_1,c_0)}\,E\forall\star_3 \quad \dfrac{(\forall x)f(x,c_0) =' x}{f(c_1,c_0) =' c_1}\,E\forall\star_2}{f(c_0,c_1) =' c_1}\,RI3}{c_0 =' c_1}\,RI3$$

$(*_1)$ c_0 libre para x en $f(x, c_1) =' x$
$(*_2)$ c_1 libre para x en $f(x, c_0) =' x$
$(*_3)$ c_1 libre para y en $f(c_0, y) =' f(y, c_0)$
$(*_4)$ c_0 libre para x en $f(x, y) =' f(y, x)$

Ejercicio 4 (15 puntos)

Considere los siguientes elementos:

- Un lenguaje de primer orden con igualdad de tipo $\langle -; -; 0\rangle$.
- $\Gamma = \text{Cons}(\{(\exists x)(\exists y)(\neg x =' y)\})$

a. Defina dos estructuras $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ tales que ambas modelen Γ y tengan universos con cardinalidad finita y diferente. Justifique su respuesta.
b. Sea $\psi = (\exists x)(\exists y)(\exists z)(\neg\, x =' y \wedge \neg\, x =' z \wedge \neg\, y =' z)$

   Pruebe que: $\psi \notin \Gamma$. Justifique su respuesta.
c. Pruebe que Γ **NO** es Consistente Maximal. Justifique su respuesta.

Propuesta de solución

a. Las estructuras $\mathcal{M}_1 = \langle\{0, 1\}\rangle$ y $\mathcal{M}_2 = \langle\{0, 1, 2\}\rangle$ modelan Γ. La prueba es la misma para las dos estructuras basada en la aplicación del teorema 2.4.5:

   H) $\mathcal{M} \in \{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2\}$
   T) $\mathcal{M} \models \Gamma$
   Dem.

   Por la hipótesis, $\mathcal{M}$ tiene al menos 2 elementos en su dominio.

   De esta forma, se puede afirmar que: $(\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}|)(\bar{\exists} b \in |\mathcal{M}|)a \neq b$.

A partir de esta afirmación en el metalenguaje, se puede aplicar 2.4.5 de la siguiente forma:

$$(\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}|)(\bar{\exists} b \in |\mathcal{M}|)\ a \neq b$$
$$\Leftrightarrow \text{(Def. de } v^{\mathcal{M}})$$
$$(\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}|)(\bar{\exists} b \in |\mathcal{M}|)\ v^{\mathcal{M}}(\bar{a} =' \bar{b}) = 0$$
$$\Leftrightarrow \text{(Def. de } \models)$$
$$(\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}|)(\bar{\exists} b \in |\mathcal{M}|)\ \mathcal{M} \not\models \bar{a} =' \bar{b}$$
$$\Leftrightarrow \text{(Por 2.4.5 para } \neg)$$
$$(\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}|)(\bar{\exists} b \in |\mathcal{M}|)\ \mathcal{M} \models \neg\bar{a} = \bar{b}$$
$$\Leftrightarrow \text{(Por 2 veces de 2.4.5 para } \exists\text{)}$$
$$\mathcal{M} \models (\exists x)(\exists y)(\neg x =' y)$$

Con esto queda probado que cualquiera de las estructuras dadas modela el único axioma de Γ.

Dado que todas las fórmulas de Γ son consecuencia sintáctica de ese axioma (por def. de CONS), son consecuencia semántica por el teorema de Corrección y por lo tanto, esas fórmulas son modeladas por $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$.

■

b. **H)** $\psi = (\exists x)(\exists y)(\exists z)(\neg x =' y \land \neg x =' z \land \neg y =' z)$
T) $\psi \notin \Gamma$
Dem.

$\psi \notin \Gamma$ se cumple si, por definición de CONS, $\Gamma \nvdash \psi$.

Es necesario aplicar el recíproco del teorema de Corrección y probar que $\Gamma \not\models \psi$.

Para probar esto, es necesario encontrar un modelo de Γ que no sea modelo de ψ.

En particular, ψ expresa que hay al menos 3 elementos en el dominio. Esto hace que $\mathcal{M}_1$ definido en la la parte a. no pueda modelar ψ:

$$\mathcal{M}_1 \models (\exists x)(\exists y)(\exists z)(\neg x =' y \land \neg x =' z \land \neg y =' z)$$
$$\Leftrightarrow \text{(3 veces de 2.4.5 para } \exists\text{)}$$
$$(\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}|)(\bar{\exists} b \in |\mathcal{M}|)(\bar{\exists} c \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M}_1 \models (\neg\bar{a} =' \bar{b} \land \neg\bar{a} =' \bar{c} \land \neg\bar{b} =' \bar{c})$$
$$\Leftrightarrow \text{(2.4.5 para } \land \text{ y } \neg)$$
$$(\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}|)(\bar{\exists} b \in |\mathcal{M}|)(\bar{\exists} c \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M}_1 \not\models \bar{a} =' \bar{b} \text{ y } \mathcal{M}_1 \not\models \bar{a} =' \bar{c} \text{ y } \mathcal{M}_1 \not\models \bar{b} =' \bar{c})$$
$$\Leftrightarrow \text{(def. } \models \text{ y } v^{\mathcal{M}_1}\text{, def } \mathcal{M}_1)$$
$$(\bar{\exists} a \in \{0,1\})(\bar{\exists} b \in \{0,1\})(\bar{\exists} c \in \{0,1\})(a \neq b \text{ y } a \neq c \text{ y } b \neq c)$$

Veamos que esto último no se cumple:

Si $a = 0$: Si $b = 0$ entonces $a = b$. Si $b = 1$ entonces no importa el valor que tome c, se cumplirá $a = c$ o $b = c$.

Si $a = 1$: Si $b = 0$ entonces no importa el valor que tome c, se cumplirá $a = c$ o $b = c$. Si $b = 1$ entonces $a = b$.

Por este motivo, se cumple que:

$$\psi \notin \Gamma$$

■

c. **T)** Γ no es Consistente Maximal
Dem.

Considere los $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ definidos en la parte a. y además ψ de la parte b..

Observar que $\mathcal{M}_2 \models \psi$ y además, como se probó en a. $\mathcal{M}_2 \models \Gamma$.

Por esto, se puede afirmar que $\mathcal{M}_2 \models \Gamma \cup \{\psi\}$.

Por la Condición Suficiente de Consistencia, $\Gamma \cup \{\psi\}$ es consistente.

Además, en la parte b. se probó que $\psi \notin \Gamma$. Por estos resultados, se ve que es posible agregar una fórmula a Γ que no está en él y el resultado es consistente, por lo que Γ no es Consistente maximal.

■