Segundo parcial de Lógica

5 de julio 2022

Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **60** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en el teórico y en el práctico del mismo. En esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (15 puntos)

Considere un lenguaje $\mathcal{L}$ de fórmulas de primer orden **sin igualdad** de tipo de similaridad $\langle 1; -; 0\rangle$ y que tiene sólo los conectivos $\to, \forall$

a. Escriba definiciones inductivas libres de $TERM_{\mathcal{L}}$ y de $\mathcal{L}$.
b. Defina una función MV : $\mathcal{L} \to \mathbb{N}$ que devuelva el máximo índice de variable que aparece en la fórmula. Ej: $\mathrm{MV}((P(x_2) \to (\forall x_1)P(x_1))) = 2$ o $\mathrm{MV}((P(x_1) \to (\forall x_2)P(x_1))) = 2$
c. Pruebe por inducción que para todo $\varphi \in \mathcal{L}$ se cumple que $x_{\mathrm{MV}(\varphi)} \in V(\varphi)$

Solución

a. Dado que el tipo de similaridad es $\langle 1; -; 0\rangle$, el lenguaje de los términos sólo va a tener variables y el de las fórmulas un predicado con un sólo parámetro. De esta forma, los lenguajes son los siguientes:

$Term_{\mathcal{L}}$

I $x_i \in Term_{\mathcal{L}}$ si $i \in \mathbb{N}$

$\mathcal{L}$

I $P(x_i) \in \mathcal{L}$, si $i \in \mathbb{N}$
II $(\varphi \to \psi) \in \mathcal{L}$, si $\varphi, \psi \in \mathcal{L}$
III $((\forall x_i)\varphi) \in \mathcal{L}$, si $i \in \mathbb{N}$ y $\varphi, \psi \in \mathcal{L}$

b. La función pedida es la siguiente:

$$
\begin{array}{lcl}
MV : \mathcal{L} \to \mathbb{N} & & \\
MV(P(x_i)) & = & i \\
MV(\varphi \to \psi) & = & max(MV(\varphi), MV(\psi)) \\
MV((\forall x_i)\varphi) & = & max(i, MV(\varphi))
\end{array}
$$

c. Pruebe que para cualquier $\varphi \in \mathcal{L}$ se cumple que $x_{MV(\varphi)} \in V(\varphi)$.

Se probará la afirmación por inducción en $\mathcal{L}$, utilizando la propiedad $\mathcal{P}(\varphi) := x_{MV(\varphi)} \in V(\varphi)$.

PB.
T) $x_{MV(P(x_i))} \in V(P(x_i))$
Dem.

Por definición de MV se cumple que:

$$MV(P(x_i)) = i$$

Por lo tanto:

$$x_{MV(P(x_i))} = x_i$$

Por definición de V entonces se cumple se cumple que:

$$x_i \in V(P(x_i))$$

y por lo tanto se cumple la tesis:

$$x_{MV(P(x_i))} \in V(P(x_i))$$

$\blacksquare$
PI₁ $:\rightarrow$
H)

$$x_{MV(\varphi)} \in V(\varphi) \tag{1}$$
$$x_{MV(\psi)} \in V(\psi) \tag{2}$$

T) $x_{MV(\varphi\rightarrow\psi)} \in V(\varphi \rightarrow \psi)$
Dem.

Por definición de V, se cumple que

$$V(\varphi \rightarrow \psi) = V(\varphi) \cup V(\psi) \tag{3}$$

Por definición de MV se cumple que:

$$MV(\varphi \rightarrow \psi) = max(MV(\varphi), MV(\psi))$$

Entonces, por definición de max se cumple uno de los siguientes casos:

$$MV(\varphi \rightarrow \psi) = MV(\varphi) \tag{4}$$
$$MV(\varphi \rightarrow \psi) = MV(\psi) \tag{5}$$

Si se está en el caso (4), entonces $x_{MV(\varphi\rightarrow\psi)} = x_{MV(\varphi)}$ y por 1 y 3 se cumple que[1]:

$$x_{MV(\varphi)} \in V(\varphi \rightarrow \psi)$$

Si se está en el caso (5), entonces $x_{MV(\varphi\rightarrow\psi)} = x_{MV(\psi)}$ y por 2 y 3 se cumple que[2]:

$$x_{MV(\psi)} \in V(\varphi \rightarrow \psi)$$

En cualquiera de los dos casos se cumple la tesis:

$$x_{MV(\varphi\rightarrow\psi)} \in V(\varphi \rightarrow \psi)$$

[1] Observar que $V(\varphi) \subseteq V(\varphi \rightarrow \psi)$
[2] Observar que $V(\psi) \subseteq V(\varphi \rightarrow \psi)$

■

PI$_2$: $\forall$
H) $x_{MV(\varphi)} \in V(\varphi)$
T) $x_{MV((\forall x_i)\varphi)} \in V((\forall x_i)\varphi)$
Dem.

Por definición de MV se cumple que:

$$MV((\forall x_i)\varphi) = max(i, MV(\varphi))$$

Entonces, por definición de max se cumple que uno de los siguientes casos:

$$\begin{aligned} MV((\forall x_i)\varphi) &= i & (1) \\ MV((\forall x_i)\varphi) &= MV(\varphi) & (2) \end{aligned}$$

Si se está en el caso (1), entonces $x_{MV((\forall x_i)\varphi)} = x_i$ y por definición de V se cumple que:

$$x_i \in V((\forall x_i)\varphi)$$

Si se está en el caso (2), entonces $x_{MV((\forall x_i)\varphi)} = x_{MV(\varphi)}$ y por hipótesis se cumple que:

$$x_{MV(\varphi)} \in V((\forall x_i)\varphi)$$

En cualquiera de los casos se cumple la tesis:

$$x_{MV((\forall x_i)\varphi)} \in V((\forall x_i)\varphi)$$

■

Las demostraciones anteriores prueban que la propiedad está en las hipótesis del PIP de $\mathcal{L}$ por lo que se cumple que:

$$(\bar{\forall}\varphi \in \mathcal{L})(x_{MV(\varphi)} \in V(\varphi))$$

Ejercicio 2 (15 puntos)

Considere un lenguaje con tipo de similaridad $\langle 1; -; 0\rangle$ con igualdad y símbolo de predicado P.

Considere las siguientes estructuras:

$$\mathcal{M}_1 = \langle\{0\}, \emptyset\rangle \text{ y } \mathcal{M}_2 = \langle\{0,1,2\}, \emptyset\rangle$$

Considere además la siguiente fórmula:

$$\varphi = (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)\neg P(x)$$

a. Dé $\alpha \in \texttt{FORM}$ tal que $\mathcal{M}_1 \models \alpha$ y $\mathcal{M}_2 \not\models \alpha$.
b. Dé $\beta \in \texttt{FORM}$ tal que $\mathcal{M}_1 \not\models \beta$ y $\mathcal{M}_2 \not\models \beta$ y β no equivalente a $\bot$.
c. Dé $\mathcal{M}_3$ estructura de tipo adecuado que cumpla que $\mathcal{M}_3 \models \varphi$.
d. Sea $\mathcal{M}_4$ cualquier estructura de tipo adecuado que cumpla $\mathcal{M}_4 \models \varphi$. ¿Cuál es la cardinalidad mínima que debe tener el universo de $\mathcal{M}_4$? Justifique.

Solución

a. Dé $\alpha \in \texttt{FORM}$ tal que $\mathcal{M}_1 \models \alpha$ y $\mathcal{M}_2 \not\models \alpha$. Damos $\alpha = (\exists x)(\forall y)x =' y$.

Para que se cumpla $\mathcal{M} \models \alpha$, se debe cumplir lo siguiente ($*^1$)

$\mathcal{M} \models \alpha$
$\Leftrightarrow$ (def. de α)
$\mathcal{M} \models (\exists x)(\forall y)x =' y$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5 x2)
$(\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}|)(\bar{\forall} b \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models \bar{a} =' \bar{b})$
$\Leftrightarrow$ (interpretación de fórmulas atómicas)
$(\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}|)(\bar{\forall} b \in |\mathcal{M}|)a = b$

Probemos que α cumple lo pedido.

$\mathcal{M}_1 \models \alpha$
$\Leftrightarrow$ (por $*^1$ y def de $\mathcal{M}_1$)
$(\bar{\exists} a \in \{0\})(\bar{\forall} b \in \{0\})a = b$
y esto se cumple ya que 0 es el único elemento del universo por tanto $a = b = 0$.

$\mathcal{M}_2 \not\models \alpha$
$\Leftrightarrow$ (por $*^1$ y def de $\mathcal{M}_2$)
$(\bar{\forall} a \in \{0, 1, 2\})(\bar{\exists} b \in \{0, 1, 2\})a \neq b$
Si $a = 0$ se toma $b = 1$,
si $a = 1$ se toma $b = 2$
y si $a = 2$ se toma $b = 0$

b. Dé $\beta \in \texttt{FORM}$ tal que $\mathcal{M}_1 \not\models \beta$ y $\mathcal{M}_2 \not\models \beta$ y β no equivalente a $\perp$. Damos $\beta = (\forall x)P(x)$.

Para que se cumpla $\mathcal{M} \models \beta$, se debe cumplir lo siguiente ($*^2$)

$\mathcal{M} \models \beta$
$\Leftrightarrow$ (def. de β)
$\mathcal{M} \models (\forall x)P(x)$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models P(\bar{a}))$
$\Leftrightarrow$ (interpretación de fórmulas atómicas)
$(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|)a \in P^{\mathcal{M}}$

Probemos que β cumple lo pedido.

$\mathcal{M}_1 \not\models \beta$
$\Leftrightarrow$ (por $*^1$ y def de $\mathcal{M}_1$)
$(\bar{\exists} a \in \{0\})a \notin \emptyset$

$\mathcal{M}_2 \not\models \beta$
$\Leftrightarrow$ (por $*^1$ y def de $\mathcal{M}_2$)
$(\bar{\exists} a \in \{0, 1, 2\})a \notin \emptyset$
y esto se cumple ya que $\emptyset$ no tiene elementos.

Resta probar que β no es equivalente a $\perp$, para esto necesitamos probar que β no es una contradicción, es decir $\beta \not\vdash \perp$. Para demostrar que $\beta \not\vdash \perp$ vamos a dar una estructura $\mathcal{M}_b$ tal que $\mathcal{M}_b \models \beta$.

Sea $\mathcal{M}_b \langle \{0\}, \{0\} \rangle$, veamos $\mathcal{M}_b \models \beta$.

$$
\begin{array}{l}
\mathcal{M}_b \models \beta \\
\Leftrightarrow \text{ (por } *^1 \text{ y def de } \mathcal{M}_b) \\
(\bar{\forall} a \in \{0\}) \;\; a \in \{0\} \\
\text{y esto se cumple ya que } 0 \in \{0\}.
\end{array}
$$

c. Dé $\mathcal{M}_3$ estructura de tipo adecuado que cumpla que $\mathcal{M}_3 \models \varphi$.

Sea $\mathcal{M}_3 = \langle \{0,1\}, \{1\} \rangle$, veamos que $\mathcal{M}_3 \models \varphi$.

$$
\begin{array}{l}
\mathcal{M}_3 \models \varphi \\
\Leftrightarrow \text{ (def. de } \varphi) \\
\mathcal{M}_3 \models (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)\neg P(x) \\
\Leftrightarrow \text{ (2.4.5)} \\
\mathcal{M}_3 \models (\exists x)P(x) \text{ y } \mathcal{M}_3(\exists x)\neg P(x) \\
\Leftrightarrow \text{ (2.4.5 x3)} \\
(\bar{\exists} a \in \{0,1\})(\mathcal{M}_3 \models P(\bar{a}) \text{ y } (\bar{\exists} b \in \{0,1\})(\mathcal{M}_3 \not\models P(\bar{b})) \\
\Leftrightarrow \text{ (interpretación de fórmulas atómicas)} \\
(\bar{\exists} a \in \{0,1\})(a \in \{1\}) \text{ y } (\bar{\exists} b \in \{0,1\})(b \notin \{1\}) \\
\text{Se cumple tomando } a = 1 \text{ y } b = 0 \text{ como testigos}
\end{array}
$$

d. Sea $\mathcal{M}_4$ cualquier estructura de tipo adecuado que cumpla $\mathcal{M}_4 \models \varphi$, ¿cuál es la cardinalidad mínima que debe tener el universo de $\mathcal{M}_4$? Justifique.

Las estructuras que modelan a φ tienen que tener como mínimo dos elementos. Sabemos por parte c que existe una estructura que modela a φ cuyo universo tiene dos elementos. Vamos a probar que no puede haber una estructura con un universo unitario que modele a φ.

Por absurdo, supongamos que existe $\mathcal{M}_4$ tal que $|\mathcal{M}_4|$ tiene un solo elemento y $\mathcal{M}_4 \models \varphi$.

$$
\begin{array}{l}
\mathcal{M}_4 \models \varphi \\
\Leftrightarrow \text{ (por parte anterior)} \\
(\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}_4|)(a \in P^{\mathcal{M}_4}) \text{ y } (\bar{\exists} b \in |\mathcal{M}_4|)(b \notin P^{\mathcal{M}_4}) \\
\text{Como } |\mathcal{M}_4| \text{ tiene un único elemento } a = b \\
\text{y se debería cumplir } a \in P^{\mathcal{M}_4} \text{ y } a \notin P^{\mathcal{M}_4} \\
\text{y esto es absurdo}
\end{array}
$$

Ejercicio 3 (15 puntos)

Nota: En este ejercicio no se aceptan consideraciones semánticas.

Escribir derivaciones para:

a. $(\exists z)(t_1 =' z \wedge t_2 =' z) \vdash t_1 =' t_2$
Considere que $z \notin V(t_1) \cup V(t_2)$.

b. $\vdash (\exists z)(t_1 =' z \wedge t_2 =' z) \leftrightarrow (\forall x)(t_1 =' x \to t_2 =' x)$
   Considere que x y z no pertenecen a $V(t_1) \cup V(t_2)$.

   Sugerencia: Use la derivación de la parte a para construir la derivación b.

Solución

a.

$$\dfrac{(\exists z)(t_1 =' z \wedge t_2 =' z) \qquad \dfrac{\dfrac{[t_1 =' z \wedge t_2 =' z]^{(1)}}{t_1 =' z}\,\text{E}\wedge \qquad \dfrac{\dfrac{[t_1 =' z \wedge t_2 =' z]^{(1)}}{t_2 =' z}\,\text{E}\wedge}{z =' t_2}\,RI_2}{t_1 =' t_2}\,RI_3}{t_1 =' t_2}\,\text{E}\exists_1^{(*_1)}$$

$(*_1)$ $z \notin FV(t_1 =' t_2)$, ya que por letra $z \notin V(t_1) \cup V(t_2)$.

b.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[(\exists z)(t_1 =' z \wedge t_2 =' z)]^{(1)} \\ \vdots\ \text{parte a} \\ t_1 =' t_2\end{matrix}}{t_2 =' t_1}\,RI_2 \qquad [t_1 =' x]^{(2)}}{t_2 =' x}\,RI_3}{t_1 =' x \to t_2 =' x}\,\text{I}\!\to_2}{(\forall x)(t_1 =' x \to t_2 =' x)}\,\text{I}\forall^{(*3)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{t_1 =' t_1}\,RI_1 \qquad \dfrac{\dfrac{[(\forall x)(t_1 =' x \to t_2 =' x)]^{(1)}}{t_1 =' t_1 \to t_2 =' t_1}\,\text{E}\forall^{(*1)} \qquad \dfrac{}{t_1 =' t_1}\,RI_1}{t_2 =' t_1}\,\text{E}\!\to}{t_1 =' t_1 \wedge t_2 =' t_1}\,\text{I}\wedge}{(\exists z)(t_1 =' z \wedge t_2 =' z)}\,\text{I}\exists^{(*2)}}{(\exists z)(t_1 =' z \wedge t_2 =' z) \leftrightarrow (\forall x)(t_1 =' x \to t_2 =' x)}\,\text{I}\!\leftrightarrow_1$$

$(*1)$ t_1 libre para x en $t_1 =' x \to t_2 =' x$.

$(*2)$ t_1 libre para z en $t_1 =' z \wedge t_2 =' z$.

$(*3)$ $x \notin FV((\exists z)(t_1 =' z \wedge t_2 =' z))$, porque por letra, $x \notin V(t_1) \cup V(t_2)$.

Ejercicio 4 (15 puntos)

a. Probar para toda $\varphi \in \texttt{SENT}$ que:

   Existe $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \not\models \varphi$ si y solo si $\textsc{Cons}(\{\neg\varphi\}) \neq \texttt{SENT}$.

b. Probar que:

   I. Para todo $\Gamma \subseteq \texttt{SENT}$ y para toda estructura $\mathcal{M}$ del tipo adecuado:

      Si Γ es consistente maximal y $\mathcal{M} \models \Gamma$ entonces $\Gamma = Th(\{\mathcal{M}\})$.

   II. Para todo $\Gamma \subseteq \texttt{SENT}$:

      Γ es consistente maximal si y solo si existe una estructura $\mathcal{M}$ tal que $\Gamma = Th(\{\mathcal{M}\})$

Solución

a. Probamos el resultado por la siguiente cadena de equivalencias:

$(\bar{\exists}\mathcal{M} : eta)\ \mathcal{M} \not\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad$ (2.4.5)
$(\bar{\exists}\mathcal{M} : eta)\ \mathcal{M} \models \neg\varphi \quad \Leftrightarrow \quad$ (caracterización semántica de consistencia)
$\{\neg\varphi\}$ es consistente $\quad \Leftrightarrow \quad$ (definición de consistencia)
$\neg\varphi \nvdash \bot \quad \Leftrightarrow \quad$ (definición de Cons)
$\bot \notin \text{Cons}(\{\neg\varphi\}) \quad \Leftrightarrow \quad$ (La única teoría inconsistente es SENT)
$\text{Cons}(\{\neg\varphi\}) \neq \texttt{SENT}$
$\square$

b. I. Consideramos Γ consistente maximal y $\mathcal{M} \models \Gamma$. Probaremos que $\Gamma = Th(\{\mathcal{M}\})$.

Primero probamos que: $(\bar{\forall}\alpha \in \Gamma)\ \alpha \in Th(\{\mathcal{M}\})$

$\alpha \in \Gamma \quad \Rightarrow \quad$ (hipótesis $\mathcal{M} \models \Gamma$)
$\mathcal{M} \models \alpha \quad \Rightarrow \quad$ (definición de Th)
$\alpha \in Th(\{\mathcal{M}\})$
$\square$

Luego probamos que : $(\bar{\forall}\alpha \in Th(\{\mathcal{M}\}))\ \alpha \in \Gamma$:

$\alpha \in Th(\{\mathcal{M}\}) \quad \Rightarrow \quad$ (definición de Th)
$\mathcal{M} \models \alpha \quad \Rightarrow \quad$ (hipótésis: $\mathcal{M} \models \Gamma$)
$\mathcal{M} \models \Gamma \cup \{\alpha\} \quad \Rightarrow \quad$ (caracterización semántica de consistencia)
$\Gamma \cup \{\alpha\}$ es consistente $\quad \Rightarrow \quad$ (Γ es consistente maximal)
$\alpha \in \Gamma$
$\square$

II. ($\Rightarrow$) Γ es consistente por ser consistente maximal.
Por caracterización semántica de la consistencia: existe $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \models \Gamma$.
Aplicando la parte anterior: $\Gamma = Th(\{\mathcal{M}\})$.

($\Leftarrow$) Por ejercicio 10 del práctico 9, sabemos que $Th(\{\mathcal{M}\})$ es consistente maximal para cualquier estructura $\mathcal{M}$.
Por lo tanto, si existe $\mathcal{M}$ tal que $\Gamma = Th(\{\mathcal{M}\})$ se concluye que Γ es consistente maximal.