Segundo parcial de Lógica

12 de julio 2021

Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **60** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (15 puntos)

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad con tipo de similaridad $\langle 1; 1, 2; 1\rangle$ con símbolo de predicado P, símbolos de función unario f, binario g y símbolo de constante c.

a. Defina inductivamente el conjunto $\mathtt{TERM}_C$ de los términos cerrados (sin constantes extendidas) de $\mathcal{L}$.

b. Considere la estructura $\mathcal{Z} = \langle \mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathtt{Menos2}, +, 1\rangle$, donde $\mathtt{Menos2}$ es la función que resta 2 y $+$ la función suma de enteros.

   I. Dé $s_1, s_2 \in \mathtt{TERM}_C$ tales que $s_1^{\mathcal{Z}} = -1$ y $s_2^{\mathcal{Z}} = 0$.

   II. Demuestre o dé un contraejemplo de la siguiente afirmación:

$$(\bar{\forall} t_1 \in \mathtt{TERM}_C)(\bar{\forall} t_2 \in \mathtt{TERM}_C)(t_1 \neq t_2 \Rightarrow t_1^{\mathcal{Z}} \neq t_2^{\mathcal{Z}})$$

c. Considere la estructura $\mathcal{M} = \langle \mathtt{PROP}, \mathtt{CONT}, F, G, \neg\bot\rangle$, donde

   $\mathtt{CONT} = \{\varphi \in \mathtt{PROP} : \not\models \varphi \text{ y } \not\models \neg\varphi\}$ y $F : \mathtt{PROP} \to \mathtt{PROP}$, $G : \mathtt{PROP} \times \mathtt{PROP} \to \mathtt{PROP}$ se definen como:

$$F(\varphi) = (\neg\varphi)$$
$$G(\varphi, \psi) = \varphi$$

   Demuestre por inducción o dé un contraejemplo de las siguientes afirmaciones:

   I. $(\bar{\forall} t \in \mathtt{TERM}_C)(\mathcal{M} \models \neg P(t))$

   II. $(\bar{\forall} t \in \mathtt{TERM}_C)(\mathcal{M} \models \neg P(t) \to P(f(t)))$

Propuesta de solución

a. Definición inductiva de $\mathtt{TERM}_C$.

   I $c \in \mathtt{TERM}_C$

   II Si $t \in \mathtt{TERM}_C$, entonces $f(t) \in \mathtt{TERM}_C$

III Si $t_1 \in \texttt{TERM}_C$ y $t_2 \in \texttt{TERM}_C$, entonces $g(t_1, t_2) \in \texttt{TERM}_C$

b. I. Tomando $s_1 = f(c)$ y $s_2 = f(g(c,c))$, ambos elementos de $\texttt{TERM}_C$, se cumple:

$$
\begin{array}{ll}
s_1^{\mathcal{Z}} & s_2^{\mathcal{Z}} \\
= \text{(def. de } s_1\text{)} & = \text{(def. de } s_2\text{)} \\
f(c)^{\mathcal{Z}} & f(g(c,c))^{\mathcal{Z}} \\
= \text{(interpretación de términos)} & = \text{(interpretación de términos)} \\
\texttt{Menos2}(c^{\mathcal{Z}}) & \texttt{Menos2}(g(c,c)^{\mathcal{Z}}) \\
= \text{(interpretación de términos)} & = \text{(interpretación de términos)} \\
\texttt{Menos2}(1) & \texttt{Menos2}(c^{\mathcal{Z}} + c^{\mathcal{Z}}) \\
= \text{(def. } \texttt{Menos2}\text{)} & = \text{(def. } \texttt{Menos2}\text{)} \\
1 - 2 & (1+1) - 2 \\
= \text{(arit.)} & = \text{(arit.)} \\
-1 & 0
\end{array}
$$

II. La afirmación es **falsa**.
Sean $t_1 = g(c, g(c,c))$ y $t_2 = g(g(c,c), c)$, ambos elementos de $\texttt{TERM}_C$. Entonces se cumple $t_1 \neq t_2$ pero $t_1^{\mathcal{Z}} = t_2^{\mathcal{Z}}$, dado que:

$$
\begin{array}{ll}
t_1^{\mathcal{Z}} & t_2^{\mathcal{Z}} \\
= \text{(def. de } t_1\text{)} & = \text{(def. de } t_2\text{)} \\
g(c, g(c,c))^{\mathcal{Z}} & g(g(c,c), c)^{\mathcal{Z}} \\
= \text{(interpretación de términos)} & = \text{(interpretación de términos)} \\
c^{\mathcal{Z}} + g(c,c)^{\mathcal{Z}} & g(c,c)^{\mathcal{Z}} + c^{\mathcal{Z}} \\
= \text{(interpretación de términos)} & = \text{(interpretación de términos)} \\
1 + (c^{\mathcal{Z}} + c^{\mathcal{Z}}) & (c^{\mathcal{Z}} + c^{\mathcal{Z}}) + 1 \\
= \text{(interpretación de términos)} & = \text{(interpretación de términos)} \\
1 + (1+1) & (1+1) + 1 \\
= \text{(arit.)} & = \text{(arit.)} \\
3 & 3
\end{array}
$$

c. I. La afirmación es **verdadera**. Haremos la prueba utilizando el PIP para $\texttt{TERM}_C$ en t.
Identificamos la propiedad a utilizar, $\mathcal{Q}(t) := \mathcal{M} \models \neg P(t)$.

Paso Base

T) $\mathcal{Q}(c) : \mathcal{M} \models \neg P(c)$

Demo.

$$
\begin{array}{l}
\mathcal{M} \models \neg P(c) \\
\Leftrightarrow \text{(2.4.5.)} \\
\mathcal{M} \not\models P(c) \\
\Leftrightarrow \text{(def. } \models \text{ e interp.)} \\
\neg\bot \notin \texttt{CONT} \\
\Leftrightarrow \text{(def. } \texttt{CONT}\text{)} \\
\models \neg\bot \text{ o } \models (\neg\neg\bot) \\
\Leftarrow \text{(introd. del o)} \\
\models \neg\bot \\
\Leftrightarrow \text{(def. } \models\text{)} \\
(\bar{\forall} v \in \text{Val})\ v(\neg\bot) = 1 \\
\Leftrightarrow \text{(def. val.)} \\
(\bar{\forall} v \in \text{Val})\ v(\bot) = 0 \\
\text{(Se cumple por def. de val.)}
\end{array}
$$

Paso Inductivo 1

HI) $\mathcal{Q}(t) : \mathcal{M} \models \neg P(t)$

TI) $\mathcal{Q}(f(t)) : \mathcal{M} \models \neg P(f(t))$

Demo.

$$\begin{array}{l}
\mathcal{M} \models \neg P(f(t)) \\
\Leftrightarrow \text{(2.4.5.)} \\
\mathcal{M} \not\models P(f(t)) \\
\Leftrightarrow \text{(def. } \models \text{ e interp.)} \\
(\neg t^{\mathcal{M}}) \notin \texttt{CONT} \\
\Leftrightarrow \text{(def. } \texttt{CONT}\text{)} \\
\models (\neg t_1^{\mathcal{M}}) \text{ o } \models (\neg\neg t_1^{\mathcal{M}}) \\
\Leftrightarrow \text{(eq. doble neg.)} \\
\models (\neg t_1^{\mathcal{M}}) \text{ o } \models t_1^{\mathcal{M}} \\
\Leftrightarrow \text{(def. } \texttt{CONT}\text{)} \\
t^{\mathcal{M}} \notin \texttt{CONT} \\
\Leftrightarrow \text{(def. } \models \text{ e interp.)} \\
\mathcal{M} \not\models P(t) \\
\Leftrightarrow \text{(2.4.5.)} \\
\mathcal{M} \models \neg P(t) \\
\text{(Se cumple por } \textbf{HI}\text{)}
\end{array}$$

Paso Inductivo 2

HI1) $\mathcal{Q}(t_1) : \mathcal{M} \models \neg P(t_1)$

HI2) $\mathcal{Q}(t_2) : \mathcal{M} \models \neg P(t_2)$

TI) $\mathcal{Q}(g(t_1, t_2)) : \mathcal{M} \models \neg P(g(t_1, t_2))$

Demo.

$$\begin{array}{l}
\mathcal{M} \models \neg P(g(t_1, t_2)) \\
\Leftrightarrow \text{(2.4.5.)} \\
\mathcal{M} \not\models P(g(t_1, t_2)) \\
\Leftrightarrow \text{(def. } \models \text{ e interp.)} \\
t_1^{\mathcal{M}} \notin \texttt{CONT} \\
\Leftrightarrow \text{(def. } \models \text{ e interp.)} \\
\mathcal{M} \not\models P(t_1) \\
\Leftrightarrow \text{(2.4.5.)} \\
\mathcal{M} \models \neg P(t_1) \\
\text{(Se cumple por } \textbf{HI1}\text{)}
\end{array}$$

Entonces por el PIP para $\texttt{TERM}_C$ podemos afirmar que,

$$(\bar{\forall} t \in \texttt{TERM}_C)\mathcal{M} \models \neg P(t)$$

II. La afirmación es **falsa**.
Sea $t \in \texttt{TERM}_C$ arbitrario. Entonces se tiene:

$$\begin{array}{l}
\mathcal{M} \models \neg P(t) \to P(f(t)) \\
\Leftrightarrow \text{(2.4.5.)} \\
\mathcal{M} \models \neg P(t) \Rightarrow \mathcal{M} \models P(f(t)) \\
\Leftrightarrow \text{(2.4.5.)} \\
\mathcal{M} \not\models P(t) \Rightarrow \mathcal{M} \models P(f(t)) \\
\Leftrightarrow \text{(def. } \models \text{ e interp.)} \\
t^{\mathcal{M}} \notin \texttt{CONT} \Rightarrow (\neg t^{\mathcal{M}}) \in \texttt{CONT}
\end{array}$$

Luego tomando el término cerrado $t_1 = c$, se tiene por definición de valuación:

$t_1^{\mathcal{M}} \notin$ CONT
$\Leftrightarrow$ (def. CONT)
$\models t_1^{\mathcal{M}}$ o $\models (\neg t_1^{\mathcal{M}})$
$\Leftrightarrow$ (def. t_1 e interp.)
$\models \neg\bot$ o $\models (\neg\neg\bot)$
$\Leftarrow$ (introd. del o)
$\models \neg\bot$
$\Leftrightarrow$ (def. $\models$)
$(\bar{\forall} v \in \text{Val})\ v(\neg\bot) = 1$
$\Leftrightarrow$ (def. val.)
$(\bar{\forall} v \in \text{Val})\ v(\bot) = 0$
(Se cumple por def. de val.)

$(\neg t_1^{\mathcal{M}}) \notin$ CONT
$\Leftrightarrow$ (def. CONT)
$\models (\neg t_1^{\mathcal{M}})$ o $\models (\neg\neg t_1^{\mathcal{M}})$
$\Leftrightarrow$ (eq. doble neg.)
$\models (\neg t_1^{\mathcal{M}})$ o $\models t_1^{\mathcal{M}}$
$\Leftrightarrow$ (def. t_1 e interp.)
$\models (\neg\neg\bot)$ o $\models \neg\bot$
$\Leftarrow$ (introd. del o)
$\models \neg\bot$
(Se cumple por lo anterior.)

Por tanto la afirmación no se cumple.

Ejercicio 2 (15 puntos)

Importante: En este ejercicio se deben justificar las respuestas sin utilizar los teoremas de **corrección** y **completitud**.

Sea $\alpha \in$ FORM con $\text{FV}(\alpha) = x_1$.
Se consideran las siguientes afirmaciones:

(A_1) Existe una estructura $\mathcal{M}$ que cumple $\mathcal{M} \models \alpha$

(A_2) Existe $\beta \in$ FORM tal que $\models \alpha \vee \beta$.

(A_3) Existe $\beta \in$ SENT tal que $\models \alpha \wedge \beta$

Indique para cada una de las afirmaciónes anteriores si permiten deducir la siguiente afirmación:

(A_0) α es una verdad lógica (esto es: $\models \alpha$).

Dicho de otra manera, debe determinar si se cumple:

Si (A_i) entonces (A_0)

para $1 \leq i \leq 3$. Justifique su respuesta.

Propuesta de solución

$(A_1) \not\Rightarrow (A_0)$

Daremos un contraejemplo: $\alpha \in$ FORM con $\text{FV}(\alpha) = \{x_1\}$ tal que cumpla (A_1) y no cumpla (A_0).

Sea $\alpha := x_1 =' c_1$ para el tipo de similaridad $\langle -; -; 1 \rangle$.

Se considera la estructura $\mathcal{M}_1 = \langle \{\odot\}, \odot \rangle$.

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{M}_1 \models x_1 =' c_1\\
&\Leftrightarrow \text{(definición de } \models)\\
&\mathcal{M}_1 \models (\forall x_1) x_1 =' c_1\\
&\Leftrightarrow \text{(definición de } \models)\\
&v^{\mathcal{M}_1}((\forall x_1) x_1 =' c_1) = 1\\
&\Leftrightarrow \text{(definición de } v^{\mathcal{M}_1})\\
&\text{mín}\{v^{\mathcal{M}_1}(\bar{a} =' c_1) \ : \ a \in \{\odot\}\} = 1\\
&\Leftrightarrow \text{(mínimo de un conjunto unitario)}\\
&v^{\mathcal{M}_1}(\bar{\odot} =' c_1) = 1\\
&\Leftrightarrow \text{(definición de } v^{\mathcal{M}_1})\\
&\odot = \odot
\end{aligned}
$$

Concluímos que $\mathcal{M}_1 \models \alpha$ y por lo tanto se cumple (A_1)

Consideramos ahora la estructura $\mathcal{M}_2 = \langle \{\odot, \ominus\}, \odot \rangle$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{M}_2 \models x_1 =' c_1\\
&\Leftrightarrow \text{(definición de } \models)\\
&\mathcal{M}_2 \models (\forall x_1) x_1 =' c_1\\
&\Leftrightarrow \text{(definición de } \models)\\
&v^{\mathcal{M}_2}((\forall x_1) x_1 =' c_1) = 1\\
&\Leftrightarrow \text{(definición de } v^{\mathcal{M}_2})\\
&\text{mín}\{v^{\mathcal{M}_2}(\bar{a} =' c_1) \ : \ a \in \{\odot, \ominus\}\} = 1\\
&\Leftrightarrow \text{(propiedad del mínimo)}\\
&v^{\mathcal{M}_2}(\bar{\odot} =' c_1) = 1 \text{ y } v^{\mathcal{M}_2}(\bar{\ominus} =' c_1) = 1\\
&\Leftrightarrow \text{(definición de } v^{\mathcal{M}})\\
&\odot = \odot \text{ y } \ominus = \odot
\end{aligned}
$$

Como la segunda igualdad no se cumple, concluimos que $\mathcal{M}_2 \not\models \alpha$. Por lo tanto, α no es una verdad lógica y no se cumple (A_0)

$(A_2) \not\Rightarrow (A_0)$

Consideramos α y $\mathcal{M}_1$ como en la parte anterior.

Defino $\beta := \neg\bot$ y probaré que $\models \alpha \vee \beta$:

Sea $\mathcal{M}$ una estructura cualquiera del tipo adecuado:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{M} \models \alpha \vee \neg\bot\\
&\Leftrightarrow \text{(definición de } \models)\\
&\mathcal{M} \models (\forall x_1)(\alpha \vee \neg\bot)\\
&\Leftrightarrow \text{(Lema 2.4.5)}\\
&(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|) \ : \ \mathcal{M} \models (\alpha \vee \neg\bot)[\bar{a}/x_1]\\
&\Leftrightarrow \text{(def. de sustitución)}\\
&(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|) \ : \ \mathcal{M} \models (\alpha[\bar{a}/x_1] \vee \neg\bot[\bar{a}/x_1])\\
&\Leftrightarrow \text{(def. de sustitución)}\\
&(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|) \ : \ \mathcal{M} \models (\alpha[\bar{a}/x_1] \vee \neg\bot)\\
&\Leftrightarrow \text{(Lema 2.4.5)}\\
&(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|) \ : \ \mathcal{M} \models \alpha[\bar{a}/x_1] \text{ o } \mathcal{M} \models \neg\bot
\end{aligned}
$$

La segunda parte de la última disyunción ($\mathcal{M} \models \neg\bot$) se cumple para cualquier estructura $\mathcal{M}$ ya que $\neg\bot$ es una verdad lógica. Por lo tanto, se cumple la disyunción para todo elemento a del dominio.

Como se consideró una estructura $\mathcal{M}$ genérica, concluimos que se cumple para toda estructura $\mathcal{M}$ del tipo adecuado.

Se concluye que $\models \alpha \vee \beta$ y por lo tanto se verifica la afirmación (A_2).

En la parte anterior ya se demostró que no se cumple (A_0).

$(A_3) \Rightarrow (A_0)$

Por (A_3) sabemos que existe $\beta \in \texttt{SENT}$ tal que $\models \alpha \wedge \beta$.

Sea $\mathcal{M}$ una estructura cualquiera del tipo adecuado. Como $\models \alpha\wedge\beta$, entonces $\mathcal{M} \models \alpha\wedge\beta$.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M} \models \alpha \wedge \beta \\
&\Leftrightarrow \text{(definición de } \models) \\
&\mathcal{M} \models (\forall x_1)(\alpha \wedge \beta) \\
&\Leftrightarrow \text{(Lema 2.4.5)} \\
&(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|) \ : \ \mathcal{M} \models (\alpha \wedge \beta)[\bar{a}/x_1] \\
&\Leftrightarrow \text{(def. de sustitución)} \\
&(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|) \ : \ \mathcal{M} \models (\alpha[\bar{a}/x_1] \wedge \beta[\bar{a}/x_1]) \\
&\Leftrightarrow \text{(def. de sustitución)} \\
&(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|) \ : \ \mathcal{M} \models (\alpha[\bar{a}/x_1] \wedge \beta[\bar{a}/x_1]) \\
&\Leftrightarrow \text{(Lema 2.4.5)} \\
&(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|) \ : \ \mathcal{M} \models \alpha[\bar{a}/x_1] \text{ y } \mathcal{M} \models \beta[\bar{a}/x_1] \\
&\Leftrightarrow \text{(Distr. Para todo y and)} \\
&(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|) \ : \ \mathcal{M} \models \alpha[\bar{a}/x_1] \text{ y } (\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|) \ : \ \mathcal{M} \models \beta[\bar{a}/x_1]
\end{aligned}$$

Considerando la primera parte de la conjunción, de la última afirmación se concluye:

$$\begin{aligned}
&(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|) \ : \ \mathcal{M} \models \alpha[\bar{a}/x_1] \\
&\Leftrightarrow \text{(Lema 2.4.5)} \\
&\mathcal{M} \models (\forall x_1)\alpha \\
&\Leftrightarrow \text{(def. de } \models) \\
&\mathcal{M} \models \alpha
\end{aligned}$$

Como el razonamiento se hizo a partir de una estructura $\mathcal{M}$ cualquiera, concluimos que:

$$(\bar{\forall}\mathcal{M} \text{ e.t.a.}) \ \mathcal{M} \models \alpha$$

Por lo tanto: $\models \alpha$ como queríamos demostrar.

Ejercicio 3 (15 puntos)

Construya derivaciones que prueben los siguientes juicios. **En ningún caso son válidas consideraciones semánticas.**

a.

$$(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \to (\forall z)(P(z,y) \vee P(z,x))), (\forall x)(\neg P(x,x)) \vdash (\forall x)(\forall y)(P(x,y) \to P(y,x))$$

b.

$$(\exists y)(\forall x)P(x,y) \vdash ((\forall x)(\exists y)P(x,y)) \wedge (\neg(\forall y)(\exists x)\neg P(x,y))$$

Propuesta de solución

a.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \to (\forall z)(P(z,y) \vee P(z,x)))$}
\RightLabel{$E_\forall\ (*_1)$}
\UnaryInfC{$(\forall y)(P(x,y) \to (\forall z)(P(z,y) \vee P(z,x)))$}
\RightLabel{$E_\forall\ (*_2)$}
\UnaryInfC{$(P(x,y) \to (\forall z)(P(z,y) \vee P(z,x)))$}
\AxiomC{$[P(x,y)]^1$}
\RightLabel{$E\to$}
\BinaryInfC{$(\forall z)(P(z,y) \vee P(z,x))$}
\RightLabel{$E_\forall\ (*_3)$}
\UnaryInfC{$P(y,y) \vee P(y,x)$}
\AxiomC{$(\forall x)(\neg P(x,x))$}
\RightLabel{$E_\forall\ (*_4)$}
\UnaryInfC{$\neg P(y,y)$}
\AxiomC{$[P(y,y)]^3$}
\RightLabel{$E_\neg$}
\BinaryInfC{$\perp$}
\RightLabel{$E_\perp$}
\UnaryInfC{$P(y,x)$}
\AxiomC{$[P(y,x)]^3$}
\RightLabel{$E_\vee^3$}
\TrinaryInfC{$P(y,x)$}
\RightLabel{$I_\to^1$}
\UnaryInfC{$P(x,y) \to P(y,x)$}
\RightLabel{$I_\forall\ (*_5)$}
\UnaryInfC{$(\forall y)(P(x,y) \to P(y,x))$}
\RightLabel{$I_\forall\ (*_6)$}
\UnaryInfC{$(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \to P(y,x))$}
\end{prooftree}
$$

b.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$(\exists y)(\forall x)P(x,y)$}
\AxiomC{$[(\forall x)P(x,y)]^1$}
\RightLabel{$E\forall(*_4)$}
\UnaryInfC{$P(x,y)$}
\RightLabel{$I\exists(*_3)$}
\UnaryInfC{$(\exists y)P(x,y)$}
\RightLabel{$E\exists(*_2)(1)$}
\BinaryInfC{$(\exists y)P(x,y)$}
\RightLabel{$I\forall(*_1)$}
\UnaryInfC{$(\forall x)(\exists y)P(x,y)$}
\AxiomC{$(\exists y)(\forall x)P(x,y)$}
\AxiomC{$[(\forall y)(\exists x)\neg P(x,y)]^2$}
\RightLabel{$E\forall(*_7)$}
\UnaryInfC{$(\exists x)\neg P(x,y)$}
\AxiomC{$[\neg P(x,y)]^4$}
\AxiomC{$[(\forall x)P(x,y)]^3$}
\RightLabel{$E\forall(*_8)$}
\UnaryInfC{$P(x,y)$}
\RightLabel{$E\neg$}
\BinaryInfC{$\perp$}
\RightLabel{$E\exists(*_6)(4)$}
\BinaryInfC{$\perp$}
\RightLabel{$E\exists(*_5)(3)$}
\BinaryInfC{$\perp$}
\RightLabel{$I\neg(2)$}
\UnaryInfC{$\neg(\forall y)(\exists x)\neg P(x,y)$}
\RightLabel{$I\wedge$}
\BinaryInfC{$((\forall x)(\exists y)P(x,y)) \wedge (\neg(\forall y)(\exists x)\neg P(x,y))$}
\end{prooftree}
$$

$(*_1)$ $x \notin \mathrm{FV}(\{(\exists y)(\forall x)P(x,y)\})$
$(*_2)$ $y \notin \mathrm{FV}(\{(\exists y)P(x,y)\})$
$(*_3)$ y está libre para y en $P(x,y)$
$(*_4)$ x está libre para x en $P(x,y)$
$(*_5)$ $y \notin \mathrm{FV}(\{\perp, (\forall y)(\exists x)\neg P(x,y)\})$
$(*_6)$ $x \notin \mathrm{FV}(\{\perp, (\forall x)P(x,y)\})$
$(*_7)$ y está libre para y en $(\exists x)\neg P(x,y)$
$(*_8)$ x está libre para x en $P(x,y)$

Ejercicio 4 (15 puntos)

Considere los siguientes conjuntos con el tipo de similaridad $< 1; 1; 0 >$
$\Delta_1 = \{(\forall x)P(x) \wedge \neg(\exists x)P(x)\}$
$\Delta_2 = \{(\forall x)(P(x) \to (\exists y)f(x) =' y)\}$
$\Delta_3 = \{(\forall x)(P(x) \wedge (\exists y)f(y) =' x)\}$

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando cada respuesta:

a. $CONS(\Delta_1 \cup \Delta_2)$ es teoría consistente.
b. $Mod(\Delta_3) \subseteq Mod(CONS(\Delta_3))$.
c. $CONS(\Delta_2) \cup CONS(\Delta_3)$ es teoría consistente.
d. $Mod(\Delta_1) \cup Mod(\Delta_3) \subseteq Mod(\Delta_1 \cup \Delta_3)$

Propuesta de solución

a. **Falso**: Δ_1 es inconsistente. La siguiente derivación es una prueba de eso:

$$\dfrac{\dfrac{(\forall x)P(x) \wedge \neg(\exists x)P(x)}{\neg(\exists x)P(x)}\,E\wedge_2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x)P(x) \wedge \neg(\exists x)P(x)}{(\forall x)P(x)}\,E\wedge_1}{P(x)}\,E\forall(*_2)}{(\exists x)P(x)}\,I\exists(*_1)}{\perp}\,E\neg$$

$(*_1)$ x está libre para x en $P(x)$
$(*_2)$ x está libre para x en $P(x)$

Entonces como $\Delta_1 \subseteq \textsc{Cons}(\Delta_1 \cup \Delta_2)$ existe derivación D tal que $H(D) \subseteq \textsc{Cons}(\Delta_1 \cup \Delta_2)$ y $C(D) = \perp$ por lo que el conjunto es inconsistente.

b. **Verdadero**:

sea $\mathcal{M} \in Mod(\Delta_3)$
$\Rightarrow$ (definición de $\models$)
$\mathcal{M} \models \Delta_3$
$\Rightarrow$ (definición de $\textsc{Cons}$)
$\mathcal{M} \models \Delta_3$ y $(\bar{\forall}\varphi \in \textsc{Cons}(\Delta_3))\Delta_3 \vdash \varphi$
$\Rightarrow$ (correccion y completitud)
$\mathcal{M} \models \Delta_3$ y $(\bar{\forall}\varphi \in \textsc{Cons}(\Delta_3))\Delta_3 \models \varphi$
$\Rightarrow$
$\mathcal{M} \models \Delta_3$ y $\Delta_3 \models \textsc{Cons}(\Delta_3)$
$\Rightarrow$ (definición de $\models$)
$\mathcal{M} \models \textsc{Cons}(\Delta_3)$
$\Rightarrow$ (definición de Mod)
$\mathcal{M} \in Mod(\textsc{Cons}(\Delta_3))$

c. **Verdadero**: La fórmula de Δ_2 es un teorema:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{f(x) =' f(x)}\,RI1}{(\exists y)f(x) =' y}\,I\exists(*_2)}{(P(x) \rightarrow (\exists y)f(x) =' y)}\,I\rightarrow}{(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)f(x) =' y)}\,I\forall(*_1)$$

$(*_1)$ $x \notin \emptyset$
$(*_2)$ $f(x)$ está libre para y en $f(x) =' y$

Por lo tanto, $\textsc{Cons}(\Delta_2)$ es el conjunto de todos los teoremas en $SENT$ y $\textsc{Cons}(\Delta_2) \subseteq \textsc{Cons}(\Delta_3)$, ya que los teoremas son derivables con cualquier conjunto de hipótesis.

Además, Δ_3 es consistente (y por lo tanto $\textsc{Cons}(\Delta_3)$ también), ya que $\mathcal{M}_1 =< \{0\}, \{0\}, Id >$ lo modela:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{M}_1 \models \Delta_3 \\
&\iff \text{(def. de } \Delta_3\text{)} \\
&\mathcal{M}_1 \models (\forall x)(P(x) \wedge (\exists y) f(y) =' x) \\
&\iff \text{(2.4.5)} \\
&(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}_1|)\mathcal{M}_1 \models P(\bar{a}) \wedge (\exists y) f(y) =' \bar{a} \\
&\iff \text{(2.4.5)} \\
&(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}_1|)(\mathcal{M}_1 \models P(\bar{a}) \text{ y } \mathcal{M}_1 \models (\exists y) f(y) =' \bar{a}) \\
&\iff \text{(2.4.5)} \\
&(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}_1|)(\mathcal{M}_1 \models P(\bar{a}) \text{ y } (\bar{\exists} b \in |\mathcal{M}_1|)\mathcal{M}_1 \models f(\bar{b}) =' \bar{a}) \\
&\iff \text{(definición de } \models \text{ e interpretación)} \\
&(\bar{\forall} a \in \{0\})(a \in \{0\} \text{ y } (\bar{\exists} b \in \{0\}) Id(b) = a)
\end{aligned}
$$

Como $\textsc{Cons}(\Delta_2) \cup \textsc{Cons}(\Delta_3) = \textsc{Cons}(\Delta_3)$, el conjunto es teoría (por ser un CONS) y consistente.

d. **Falso**: $Mod(\Delta_1 \cup \Delta_3)$ es vacío ya que Δ_1 es inconsistente, $Mod(\Delta_3)$ es distinto de vacío ya que Δ_3 es consistente, por ejemplo contiene al modelo de la parte anterior.