Segundo parcial de Lógica

1 de julio 2019

Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **60** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (15 puntos)

Sean los siguientes lenguajes de primer orden con igualdad:

- $\mathcal{L}_1$ de tipo de similaridad $\langle 1, 2; 1, 2; 2\rangle$ con el alfabeto habitual.
- $\mathcal{L}_2$ de tipo de similaridad $\langle 2, 1; 2, 1; 0\rangle$ con el alfabeto habitual.

a. I. Defina inductivamente el conjunto de los términos (sin constantes extendidas) de $\mathcal{L}_1$: $\mathtt{TERM}_{\mathcal{L}_1}$.
   II. Defina inductivamente el conjunto de los términos (sin constantes extendidas) de $\mathcal{L}_2$: $\mathtt{TERM}_{\mathcal{L}_2}$.

b. Determine si las siguientes afirmaciones son verdades o falsas. Justifique su respuesta:
   I. $\mathtt{TERM}_{\mathcal{L}_1} \cap \mathtt{TERM}_{\mathcal{L}_2} = \emptyset$
   II. $\mathtt{TERM}_{C\mathcal{L}_2} \subseteq \mathtt{TERM}_{C\mathcal{L}_1}$
   siendo $\mathtt{TERM}_{C\mathcal{L}_1}$ y $\mathtt{TERM}_{C\mathcal{L}_2}$ el conjunto de los términos **cerrados** de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ respectivamente.

c. Dadas:
   - $\mathcal{M}_1 = \langle \mathbb{N}, Par, \leq, +1, +, 2, 0\rangle$
   - $\mathcal{M}_2 = \langle \Sigma^*, A, B, concatenar, largo\rangle$, con $\Sigma = \{a, b, c\}\rangle$
     donde: $A = \{(w_1, w_2) \in \Sigma^* \times \Sigma^* / largo(w_1) = largo(w_2)\}$
     $B = \{w \in \Sigma^* / largo(w) \text{ es par }\}$
   - $\mathcal{M}_3 = \langle \emptyset, \emptyset\rangle$

   I. Determine si $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_3$ son estructuras para algún tipo de similaridad determinado. Justifique su respuesta.
   II. Para aquellas que sean estructuras de la parte anterior determine si son de tipo adecuado para el lenguaje $\mathcal{L}_1$. Justifique su respuesta.
   III. Ídem para $\mathcal{L}_2$.

d. Sea la estructura $\mathcal{M}_4 = \langle \mathbb{Z}, Par, \emptyset, +2, +, 0, 2\rangle$ de tipo adecuado para el lenguaje $\mathcal{L}_1$.
   I. Demuestre que : $(\bar{\forall} t \in \mathtt{TERM}_{C\mathcal{L}_1})(t^{\mathcal{M}_4} \text{es par})$.
   II. Determine si es verdadero o falso: $\mathcal{M}_4 \models P_1(x)$. Justifique la respuesta.

Propuesta de solución

a. I.

   i $x_i \in \texttt{TERM}_{\mathcal{L}_1}, i \in \mathbb{N}$
   ii $c_1 \in \texttt{TERM}_{\mathcal{L}_1}$
   iii $c_2 \in \texttt{TERM}_{\mathcal{L}_1}$
   iv Si $t \in \texttt{TERM}_{\mathcal{L}_1}$ entonces $f_1(t) \in \texttt{TERM}_{\mathcal{L}_1}$
   v Si $t_1 \in \texttt{TERM}_{\mathcal{L}_1}$ y $t_2 \in \texttt{TERM}_{\mathcal{L}_1}$ entonces $f_2(t_1, t_2) \in \texttt{TERM}_{\mathcal{L}_1}$

   II.

   i $x_i \in \texttt{TERM}_{\mathcal{L}_2}, i \in \mathbb{N}$
   ii Si $t_1 \in \texttt{TERM}_{\mathcal{L}_2}$ y $t_2 \in \texttt{TERM}_{\mathcal{L}_2}$ entonces $f_1(t_1, t_2) \in \texttt{TERM}_{\mathcal{L}_2}$
   iii Si $t \in \texttt{TERM}_{\mathcal{L}_2}$ entonces $f_2(t) \in \texttt{TERM}_{\mathcal{L}_2}$

b. Determine si las siguientes afirmaciones son verdades o falsas. Justifique su respuesta:

   I. $\texttt{TERM}_{\mathcal{L}_1} \cap \texttt{TERM}_{\mathcal{L}_2} = \emptyset$ **FALSO**
   El conjunto de todas las variables $Var = \{x_i / i \in \mathbb{N}\}$ pertenece al conjunto de los términos de ambos lenguajes por lo tanto pertenecen a la intersección y esta no es vacía.

   II. $\texttt{TERM}_{C\mathcal{L}_2} \subseteq \texttt{TERM}_{C\mathcal{L}_1}$ siendo $\texttt{TERM}_{C\mathcal{L}_1}$ y $\texttt{TERM}_{C\mathcal{L}_2}$ el conjunto de los términos **cerrados** de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ respectivamente.
   VERDADERO
   En $\mathcal{L}_2$ no hay constantes distinguidas por lo tanto no es posible construir términos cerrados en este lenguaje, o sea $\texttt{TERM}_{C\mathcal{L}_2} = \emptyset$ por lo tanto está incluido en cualquier conjunto.

   Otra forma:
   La definición inductiva de $\texttt{TERM}_{C\mathcal{L}_2}$ está dada por las siguientes reglas:
   i Si $t_1 \in \texttt{TERM}_{C\mathcal{L}_2}$ y $t_2 \in \texttt{TERM}_{C\mathcal{L}_2}$ entonces $f_1(t_1, t_2) \in \texttt{TERM}_{C\mathcal{L}_2}$
   ii Si $t \in \texttt{TERM}_{C\mathcal{L}_2}$ entonces $f_2(t) \in \texttt{TERM}_{C\mathcal{L}_2}$

   Al no existir regla base el conjunto definido es el vacío por lo tanto está incluido en cualquier conjunto.

c. I. $\mathcal{M}_1$ es una estructura de tipo $\langle 1, 2; 1, 2; 2 \rangle$.
   $\mathcal{M}_2$ no es una estructura dado que el codominio de la función *largo* es $\mathbb{N}$ cuando debería ser Σ^*, el primer elemento de $\mathcal{M}_2$ ("universo").
   $\mathcal{M}_3$ no es una estructura porque el primer elemento ("universo") no puede ser vacío.
   II. $\mathcal{M}_1$ es de tipo adecuado para $\mathcal{L}_1$, dado que son iguales.
   III. $\mathcal{M}_1$ no es de tipo adecuado para $\mathcal{L}_2$, dado que son distintos.

d. I. Demostraremos que : $(\overline{\forall} t \in \texttt{TERM}_{C\mathcal{L}_1})(t^{\mathcal{M}_4}$ es par).
   Por inducción en $\texttt{TERM}_{C\mathcal{L}_1}$:
   Identificación de la propiedad: $\mathcal{P}(t) := t^{\mathcal{M}_4}$ es par.

   Paso Base 1
   T) $\mathcal{P}(c_1) = c_1^{\mathcal{M}_4}$ es par
   Demo.

   $c_1^{\mathcal{M}_4}$
   $=$ (Interpretación de términos y por definición de $\mathcal{M}_4$)
   0
   (0 es par)

Paso Base 2

T) $\mathcal{P}(c_2) = c_2^{\mathcal{M}_4}$ es par

Demo.

$$c_2^{\mathcal{M}_4}$$
$$= \text{(Interpretación de términos y por definición de } \mathcal{M}_4)$$
$$2$$
$$\text{(2 es par)}$$

Paso Inductivo 1

H1) $\mathcal{P}(t) = t^{\mathcal{M}_4}$ es par.

T1) $\mathcal{P}(f_1(t)) = f_1(t)^{\mathcal{M}_4}$ es par.

Demo.

Por definición de interpretación para términos y definición de $\mathcal{M}_4$: $f_1(t)^{\mathcal{M}_4} = t^{\mathcal{M}_4} + 2$. Por (H1) sabemos que $t^{\mathcal{M}_4}$ es par por lo que también será par el resultado de sumarle 2 (aritmética).

Paso Inductivo 2

H2) $\mathcal{P}(t_1) = t_1^{\mathcal{M}_4}$ es par.

$\mathcal{P}(t_2) = t_2^{\mathcal{M}_4}$ es par.

T2) $\mathcal{P}(f_2(t_1, t_2) = f_2(t_1, t_2)^{\mathcal{M}_4}$ es par.

Demo.

Por definición de interpretación para términos y definición de $\mathcal{M}_4$: $f_2(t_1, t_2)^{\mathcal{M}_4} = t_1^{\mathcal{M}_4} + t_2^{\mathcal{M}_4}$. Por (H2) ambos sumandos son pares; por lo que la suma resulta ser un número par (aritmética).

Por PIP para $\mathtt{TERM}_{C\mathcal{L}_1}$ y lo demostrado en los pasos bases y pasos inductivos concluímos que $(\bar{\forall} t \in \mathtt{TERM}_{C\mathcal{L}_1})(t^{\mathcal{M}_4}$es par).

II. Probaremos que $\mathcal{M}_4 \models P(x)$ es **FALSO**.

$$\mathcal{M}_4 \models P_1(x)$$
$$\Leftrightarrow \text{(def. de } \models \text{ y Clausura)}$$
$$\mathcal{M}_4 \models (\forall x) P_1(x)$$
$$\Leftrightarrow \text{(2.4.5, sustitución y def de } \mathcal{M}_4)$$
$$\bar{\forall} a \in \mathbb{Z} : \mathcal{M}_4 \models P_1(\bar{a})$$
$$\Leftrightarrow \text{(Definición de } \models)$$
$$\bar{\forall} a \in \mathbb{Z} : a \in P_1^{\mathcal{M}_4}$$
$$\Leftrightarrow \text{(Definición de } \mathcal{M}_4)$$
$$\bar{\forall} a \in \mathbb{Z} : a \text{ es par}$$

Queda claro que esta última afirmación no se cumple ya que no todos los enteros son pares.

Ejercicio 2 (15 puntos)

Considere el lenguaje de primer orden con igualdad de tipo de similaridad $\langle 1, 1; -; 0 \rangle$ y alfabeto con símbolos de predicado P y Q.

Considere las siguientes sentencias:

$$\begin{aligned}
\alpha &= (\exists x)P(x) \to \neg(\forall x)(\neg P(x)) \\
\beta &= (\exists x)(P(x) \land \neg Q(x)) \\
\rho &= (\forall x)(P(x) \to Q(x)) \\
\delta &= \neg(\forall x)(\neg P(x) \lor Q(x))
\end{aligned}$$

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.

a. $(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{SENT})(\alpha \models \varphi \Rightarrow \models \varphi)$.
b. $\rho \models \delta$.
c. $\beta, \rho \models \delta$.
d. $(\bar{\exists}\Gamma \subseteq \texttt{SENT})(\Gamma \cup \{\beta\} \not\models \alpha)$.

Propuesta de solución

a. **VERDADERO**.
Sea $\varphi \in \texttt{SENT}$ que cumple $\alpha \models \varphi$, vamos a probar $\models \varphi$.

$$\begin{array}{l}
\text{Por hip. } \alpha \models \varphi \\
\Leftrightarrow \text{ (corrección y completitud)} \\
\alpha \vdash \varphi \\
\Leftrightarrow \text{ (def } \vdash) \\
(\bar{\exists} D \in DER)(H(D) \subseteq \{\alpha\} \text{ y } C(D) = \varphi) \\
\text{(que notamos:)} \\
(\exists x)P(x) \to \neg(\forall x)(\neg P(x)) \\
\qquad\qquad\vdots \\
\qquad\qquad\varphi
\end{array}$$

A partir de lo anterior, vamos a probar $\vdash \varphi$ y por lo tanto $\models \varphi$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(\exists x)P(x)]^{(1)} \quad \dfrac{\dfrac{[(\forall x)\neg P(x)]^{(2)}}{\neg P(x)}E\forall_{(*_2)} \quad [P(x)]^{(3)}}{\perp}E\neg}{\perp}E\exists_{(3)\ (*_1)}}{\neg(\forall x)(\neg P(x))}I\neg_{(2)}}{(\exists x)P(x) \to \neg(\forall x)(\neg P(x))}I\to_{(1)}$$
$$\vdots$$
$$\varphi$$

(*1) $x \notin FV\{\perp, (\forall x)\neg P(x)\}$

(*2) x está libre para x en cualquier fórmula en particular para $\neg P(x)$

b. **FALSO**.
Vamos a probar $\rho \not\models \delta$.

$$\rho \not\models \delta$$
$$\Leftrightarrow \text{(def } \models\text{)}$$
$$(\bar{\exists}\mathcal{M})(\mathcal{M} \models \rho \text{ y } \mathcal{M} \not\models \delta)$$

Sea $\mathcal{M}_1 = \langle \{\bullet\}, \emptyset, \emptyset \rangle$
Vamos a probar $\mathcal{M}_1 \models \rho$ y $\mathcal{M}_1 \not\models \delta$

$\mathcal{M}_1 \models (\forall x)(P(x) \to Q(x))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5 y sustitución)
$(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}_1|)(\mathcal{M}_1 \models P(\bar{a}) \to Q(\bar{a}))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}_1|)(\mathcal{M}_1 \models P(\bar{a}) \Rightarrow \mathcal{M}_1 \models Q(\bar{a}))$
$\Leftrightarrow$ (def $v^{\mathcal{M}_1}$)
$(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}_1|)(a \in \emptyset \Rightarrow a \in \emptyset)$
(El antecedente es falso en cualquier caso
y el a es genérico, por lo que)
$\mathcal{M}_1 \models (\forall x)(P(x) \to Q(x))$.

$\mathcal{M}_1 \not\models \neg(\forall x)(\neg P(x) \vee Q(x))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5 y sustitución)
$\mathcal{M}_1 \models (\forall x)(\neg P(x) \vee Q(x))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5 y sustitución)
$(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}_1|)(\mathcal{M}_1 \models \neg P(\bar{a}) \vee Q(\bar{a}))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5 x2)
$(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}_1|)(\mathcal{M}_1 \not\models P(\bar{a})$ o $\mathcal{M}_1 \models Q(\bar{a}))$
$\Leftrightarrow$ (def $v^{\mathcal{M}_1}$)
$(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}_1|)(a \notin \emptyset$ o $a \in \emptyset)$
$\Leftarrow$ (La primera parte del "o" es verdadera el a es genérico por lo que)
$\mathcal{M}_1 \not\models \neg(\forall x)(\neg P(x) \vee Q(x))$

c. **VERDADERO**.
Se presentan dos demostraciones alternativas:

Primera demostración.
Como el conjunto $\{\beta, \rho\}$ es inconsistente, cualquier fórmula es consecuencia semántica de él, en particular δ.
Vamos a probar $\beta, \rho \vdash \delta$ y por lo tanto $\beta, \rho \models \delta$.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$(\exists x)(P(x) \wedge \neg Q(x))$}
\AxiomC{$[P(x) \wedge \neg Q(x)]^{(1)}$}
\RightLabel{$E\wedge$}
\UnaryInfC{$\neg Q(x)$}
\AxiomC{$(\forall x)(P(x) \to Q(x))$}
\RightLabel{$E\forall_{(*2)}$}
\UnaryInfC{$P(x) \to Q(x)$}
\AxiomC{$[P(x) \wedge \neg Q(x)]^{(1)}$}
\RightLabel{$E\wedge$}
\UnaryInfC{$P(x)$}
\RightLabel{$E\to$}
\BinaryInfC{$Q(x)$}
\RightLabel{$E\neg$}
\BinaryInfC{$\perp$}
\RightLabel{$E\exists_{(1)(*1)}$}
\BinaryInfC{$\perp$}
\RightLabel{$E\perp$}
\UnaryInfC{δ}
\end{prooftree}
$$

(*1) $x \notin FV\{(\forall x)(P(x) \to Q(x)), \perp\}$

(*2) x está libre para x en cualquier fmla, en particular para $P(x) \to Q(x)$

Segunda demostración.
En realidad, $\beta \texttt{ eq } \delta$. Para probar eso, vemos que:

$$(\exists x)(P(x) \wedge \neg Q(x)) \texttt{ eq } \neg(\forall x)\neg(P(x) \wedge \neg Q(x)) \text{(De Morgan generalizado)}$$
$$\texttt{eq } \neg(\forall x)(\neg P(x) \vee Q(x)) \text{(De Morgan y teo sust.)}$$

Por este motivo, $\beta \models \delta$ por lo que se cumple $\beta, \rho \models \delta$.

d. **FALSO**.

$$\begin{array}{l} \vdash \alpha \text{(por parte a.)} \\ \Leftrightarrow \text{ (corrección y completitud)} \\ \models \alpha \\ \Leftrightarrow \text{ (def } \models) \\ (\bar{\forall}\mathcal{M})(\mathcal{M} \models \alpha) \ \textbf{(I)} \end{array}$$

A partir de lo anterior vamos a probar que $(\bar{\forall}\Gamma \subseteq \texttt{SENT})(\Gamma \cup \{\beta\} \models \alpha)$.
Dado que: $(\bar{\forall}\mathcal{M})\mathcal{M} \models \alpha$

se cumple que en particular, para cualquier modelo $\mathcal{M}'$ tal que $\mathcal{M}' \models \Gamma \cup \{\beta\}$, $\mathcal{M}' \models \alpha$ por lo que $\Gamma \cup \{\beta\} \models \alpha$.

Ejercicio 3 (15 puntos)

Dadas las siguientes sentencias:

- $\alpha = (\forall v)(\exists x)P(v, x)$
- $\beta = (\forall v)(\forall y)(\forall w)(P(v, y) \to (P(v, w) \to y \doteq w))$
- $\varphi = (\forall v)(\exists x)(\forall z)(P(v, z) \leftrightarrow x \doteq z)$

Construya derivaciones que prueben los siguientes juicios. En ningún caso son válidas consideraciones semánticas:

a. $\varphi \vdash \alpha$
b. $\varphi \vdash \beta$

Propuesta de solución

a.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall v)(\exists x)(\forall z)(P(v,z) \leftrightarrow x \doteq z)}{(\exists x)(\forall z)(P(v,z) \leftrightarrow x \doteq z)}\, E\forall(*1) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[(\forall z)(P(v,z) \leftrightarrow x \doteq z)]^1}{(P(v,x) \leftrightarrow x \doteq x)}\, E\forall(*5) \qquad \dfrac{}{x \doteq x}\, RI1}{P(v,x)}\, E\leftrightarrow}{(\exists x)P(v,x)}\, I\exists(*2)}{(\exists x)P(v,x)}\, E\exists(*3)(1)}{(\forall v)(\exists x)P(v,x)}\, I\forall(*4)$$

(*1) v libre para v en $(\exists x)(\forall z)(P(v, z) \leftrightarrow x \doteq z)$

(*2) x libre para x en $P(v, x)$

(*3) $x \notin FV((\exists x)P(v, x))$

(*4) $v \notin FV((\forall v)(\exists x)(\forall z)(P(v, z) \leftrightarrow x \doteq z))$

(*5) x libre para z en $(P(v, z) \leftrightarrow x \doteq z)$

b.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall v)(\exists x)(\forall z)(P(v,z)\leftrightarrow x\doteq z)}{(\exists x)(\forall z)(P(v,z)\leftrightarrow x\doteq z)}\,E\forall(*5) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(\forall z)(P(v,z)\leftrightarrow x\doteq z)]^1}{(P(v,y)\leftrightarrow x\doteq y)}\,E\forall(*6) \quad [P(v,y)]^3}{x\doteq y}\,E\leftrightarrow}{y\doteq x}\,RI2 \qquad \dfrac{\dfrac{[(\forall z)(P(v,z)\leftrightarrow x\doteq z)]^1}{(P(v,w)\leftrightarrow x\doteq w)}\,E\forall(*7) \quad [P(v,w)]^2}{x\doteq w}\,E\leftrightarrow}{y\doteq w}\,RI3}{y\doteq w}\,E\exists(*4)(1)}{P(v,w)\rightarrow y\doteq w}\,I\rightarrow(2)}{(P(v,y)\rightarrow(P(v,w)\rightarrow y\doteq w))}\,I\rightarrow(3)}{(\forall w)(P(v,y)\rightarrow(P(v,w)\rightarrow y\doteq w))}\,I\forall(*3)}{(\forall y)(\forall w)(P(v,y)\rightarrow(P(v,w)\rightarrow y\doteq w))}\,I\forall(*2)}{(\forall v)(\forall y)(\forall w)(P(v,y)\rightarrow(P(v,w)\rightarrow y\doteq w))}\,I\forall(*1)
$$

(*1) $v \notin FV\{(\forall v)(\exists x)(\forall z)(P(v,z)\leftrightarrow x\doteq z)\}$
(*2) $y \notin FV\{(\forall v)(\exists x)(\forall z)(P(v,z)\leftrightarrow x\doteq z)\}$
(*3) $w \notin FV\{(\forall v)(\exists x)(\forall z)(P(v,z)\leftrightarrow x\doteq z)\}$
(*4) $x \notin FV\{y\doteq w, P(v,y), P(v,w)\}$
(*5) v libre para v en cualquier fmla, en particular para $(\exists x)(\forall z)(P(v,z)\leftrightarrow x\doteq z)$
(*6) y libre para z en $P(v,z)\leftrightarrow x\doteq z$
(*7) w libre para z en $P(v,z)\leftrightarrow x\doteq z$

Ejercicio 4 (15 puntos)

Considere el lenguaje de primer orden con igualdad de tipo de similaridad $\langle 1,1;1;0\rangle$, y alfabeto con símbolos de predicado P y Q y símbolo de función f.

Sean:

- $\Delta = \{(\forall x)(\exists y)f(x) =' y,\ (\forall x)P(x)\}$
- $\mathbb{E}$ el conjunto de todas las estructuras adecuadas para el tipo de similaridad dado.

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.

a. $(\bar{\exists}\Delta' \subseteq \Delta)(\emptyset \neq \Delta'$ y $Mod(\Delta') = \mathbb{E})$.
b. $(\bar{\exists}\varphi \in \texttt{SENT})(Mod(\{\varphi\}) \neq \emptyset$ y $\textsc{Cons}(\Delta \cup \{\varphi\}) = Th(\emptyset))$.
c. $\textsc{Cons}(\Delta)$ es consistente maximal.

Propuesta de solución

a. **VERDADERO**.
Sea $\Delta' = \{(\forall x)(\exists y)f(x) =' y\}$. Se cumple $\Delta' \neq \emptyset$.
Vamos a probar $Mod(\Delta') = \mathbb{E}$.

$$
\begin{array}{l}
Mod(\Delta') = \mathbb{E} \\
\Leftrightarrow \text{(def } Mod \text{ y def } \Delta'\text{)} \\
\{\mathcal{M} | \mathcal{M} \models (\forall x)(\exists y)f(x) =' y\} = \mathbb{E} \\
\Leftrightarrow \text{(definición } \mathbb{E}\text{)} \\
(\bar{\forall}\mathcal{M})(\mathcal{M} \models (\forall x)(\exists y)f(x) =' y) \\
\Leftrightarrow \text{(Def. verdad lógica)} \\
\models (\forall x)(\exists y)f(x) =' y \\
\Leftrightarrow \text{(Corrección y completitud)} \\
\vdash (\forall x)(\exists y)f(x) =' y
\end{array}
$$

Vamos a probar $\vdash (\forall x)(\exists y) f(x) =' y$

$$\dfrac{\dfrac{\overline{f(x) =' f(x)}\ RI1}{(\exists y) f(x) =' y}\ I\exists_{(*_2)}}{(\forall x)(\exists y) f(x) =' y}\ I\forall_{(*_1)}$$

$(*_1)$ No hay hipótesis sin cancelar.
$(*_2)$ $f(x)$ libre para y en $f(x) =' y$

b. **VERDADERO**. Sea $\varphi = \neg(\forall x)P(x)$.

Vamos a probar $Mod(\{\neg(\forall x)P(x)\}) \neq \emptyset$ y $\textsc{Cons}(\Delta \cup \{\neg(\forall x)P(x)\}) = Th(\emptyset)$

$Mod(\{\neg(\forall x)P(x)\}) \neq \emptyset$
$\Leftrightarrow$
$(\bar{\exists}\mathcal{M})(\mathcal{M} \in Mod(\{\neg(\forall x)P(x)\}))$
$\Leftrightarrow$ (Def Mod)
$(\bar{\exists}\mathcal{M})(\mathcal{M} \models \neg(\forall x)P(x))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5 x2 y sustitución)
$(\bar{\exists}\mathcal{M})((\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \not\models P(\bar{a})))$
$\Leftarrow$ ($\mathcal{M}_1 = \langle\{\bullet\}, \emptyset, \emptyset, id\rangle$ y $v^{\mathcal{M}_1}$)
$(\bar{\exists} a \in \{\bullet\})(a \notin \emptyset)$
$\Leftarrow$ ($\bullet \notin \emptyset$)

Resta probar $\textsc{Cons}(\Delta \cup \{\neg(\forall x)P(x)\}) = Th(\emptyset)$

$\textsc{Cons}(\Delta \cup \{\neg(\forall x)P(x)\}) = Th(\emptyset)$
$\Leftrightarrow$ (Ejercicio del práctico)
$\textsc{Cons}(\Delta \cup \{\neg(\forall x)P(x)\}) = \texttt{SENT}$

Sea $\alpha \in \texttt{SENT}$ vamos a probar $\alpha \in \textsc{Cons}(\Delta \cup \{\neg(\forall x)P(x)\})$[1]

$\alpha \in \textsc{Cons}(\Delta \cup \{\neg(\forall x)P(x)\})$
$\Leftrightarrow$ (Def. $\textsc{Cons}$)
$\Delta \cup \{\neg(\forall x)P(x)\} \vdash \alpha$

$$\dfrac{\dfrac{\neg(\forall x)P(x) \quad (\forall x)P(x)}{\perp}\ E\neg}{\alpha}\ E\perp$$

c. **FALSO**.

$\textsc{Cons}(\Delta)$ no es consistente maximal
$\Leftrightarrow$ (Def. consistente maximal)
$(\bar{\exists}\varphi \in \texttt{SENT})(\varphi \notin \textsc{Cons}(\Delta)$ y $\{\varphi\} \cup \textsc{Cons}(\Delta) \nvdash \perp)$
$\Leftarrow$ ($\varphi = (\forall x)Q(x)$)

[1]Observar que si una sentencia pertenece a $\textsc{Cons}(\Delta \cup \{\neg(\forall x)P(x)\})$ necesariamente pertenece a $\texttt{SENT}$

Vamos a probar $(\forall x)Q(x) \notin \textsc{Cons}(\Delta)$ y $\{(\forall x)Q(x)\} \cup \textsc{Cons}(\Delta) \nvdash \bot$.

$$
\begin{array}{l}
(\forall x)Q(x) \notin \textsc{Cons}(\Delta) \\
\Leftrightarrow \text{(Def. Cons)} \\
\Delta \nvdash (\forall x)Q(x) \\
\Leftrightarrow \text{(Corrección y completitud)} \\
\Delta \not\models (\forall x)Q(x) \\
\Leftrightarrow \text{(Def. } \models) \\
(\bar{\exists}\mathcal{M})(\mathcal{M} \models \Delta \text{ y } \mathcal{M} \not\models (\forall x)Q(x))
\end{array}
$$

Sea $\mathcal{M}_1 = \langle \{\bullet\}, \{\bullet\}, \emptyset, id \rangle$.
Vamos a probar $\mathcal{M}_1 \models \Delta$ y $\mathcal{M}_1 \not\models (\forall x)Q(x)$.
Que es lo mismo que $\mathcal{M}_1 \models (\forall x)(\exists y)f(x) =' y$, $\mathcal{M}_1 \models (\forall x)P(x)$ y $\mathcal{M}_1 \not\models (\forall x)Q(x)$, por definición de Δ.

$$
\begin{array}{lll}
\mathcal{M}_1 \models (\forall x)(\exists y)f(x) =' y & \mathcal{M}_1 \models (\forall x)P(x) & \mathcal{M}_1 \not\models (\forall x)Q(x) \\
\Leftarrow \text{(en particular para } \mathcal{M}_1) & \Leftarrow \text{(2.4.5, sust y } v^{\mathcal{M}_1}) & \Leftarrow \text{(2.4.5, sust y } v^{\mathcal{M}_1}) \\
(\bar{\forall}\mathcal{M})(\mathcal{M} \models (\forall x)(\exists y)f(x) =' y) & (\bar{\forall} a \in \{\bullet\})(a \in \{\bullet\}) & (\bar{\exists} a \in \{\bullet\})(a \notin \emptyset) \\
\Leftarrow \text{(por parte a.)} & \Leftarrow (\bullet \in \{\bullet\} \text{ y } \bullet \text{ único elem.}) & \Leftarrow (\bullet \notin \emptyset)
\end{array}
$$

Resta probar que $\{(\forall x)Q(x)\} \cup \textsc{Cons}(\Delta) \nvdash \bot$.

$$
\begin{array}{l}
\{(\forall x)Q(x)\} \cup \textsc{Cons}(\Delta) \nvdash \bot \\
\Leftrightarrow \text{(caracterización semántica)} \\
(\bar{\exists}\mathcal{M})(\mathcal{M} \models (\forall x)Q(x) \text{ y } \mathcal{M} \models \textsc{Cons}(\Delta)) \\
\Leftrightarrow (M \models \textsc{Cons}(\Delta) \Leftrightarrow M \models \Delta) \\
(\bar{\exists}\mathcal{M})(\mathcal{M} \models (\forall x)Q(x) \text{ y } \mathcal{M} \models \Delta)
\end{array}
$$

Sea $\mathcal{M}_1 = \langle \{\bullet\}, \{\bullet\}, \{\bullet\}, id \rangle$.
Vamos a probar $\mathcal{M}_1 \models \Delta$ y $\mathcal{M}_1 \models (\forall x)Q(x)$.
Que es lo mismo que $\mathcal{M}_1 \models (\forall x)(\exists y)f(x) =' y$, $\mathcal{M}_1 \models (\forall x)P(x)$ y $\mathcal{M}_1 \models (\forall x)Q(x)$, por definición de Δ.

$$
\begin{array}{lll}
\mathcal{M}_1 \models (\forall x)(\exists y)f(x) =' y & \mathcal{M}_1 \models (\forall x)P(x) & \mathcal{M}_1 \models (\forall x)Q(x) \\
\Leftarrow \text{(en particular para } \mathcal{M}_1) & \Leftarrow \text{(2.4.5, sust y } v^{\mathcal{M}_1}) & \Leftarrow \text{(2.4.5, sust y } v^{\mathcal{M}_1}) \\
(\bar{\forall}\mathcal{M})(\mathcal{M} \models (\forall x)(\exists y)f(x) =' y) & (\bar{\forall} a \in \{\bullet\})(a \in \{\bullet\}) & (\bar{\forall} a \in \{\bullet\})(a \in \{\bullet\}) \\
\Leftarrow \text{(por parte a.)} & \Leftarrow (\bullet \in \{\bullet\} \text{ y } \bullet \text{ único elem}) & \Leftarrow (\bullet \in \{\bullet\} \text{ y } \bullet \text{ único elem.})
\end{array}
$$