Segundo parcial de Lógica

2 de julio 2018

Indicaciones generales

- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **60** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (15 puntos)

Considere el lenguaje $\mathcal{L}$ de tipo de similaridad $\langle -; 1; 1 \rangle$ con símbolo de función f y símbolo de constante c, y $\texttt{TERM}_C$ el conjunto de términos cerrados de $\mathcal{L}$ sin constantes extendidas.

a. Sea la estructura $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N} \cup \{\bullet, \circ\}, G, \circ \rangle$ donde la definición de G está dada por

$$\begin{aligned} G(\circ) &= 2 \\ G(n) &= \bullet \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \\ G(\bullet) &= \circ \end{aligned}$$

Se pide:

I. Definir inductivamente un conjunto infinito $C \subseteq \texttt{TERM}_C$, de forma que

$$(\bar{\forall} t \in C)(t^{\mathcal{A}} = 2).$$

II. Demostrar usando el PIP adecuado que su propuesta anterior es correcta.

b. Sea la estructura $\mathcal{B} = \langle \{0, 1, 2\}, F, 1 \rangle$. Defina F de forma que

$$(\bar{\forall} m \in |\mathcal{B}|)((\bar{\exists} t \in \texttt{TERM}_C)(t \neq c \text{ y } t^{\mathcal{B}} = m)).$$

Justifique su respuesta.

c. Demostrar

$$(\bar{\exists} u \in \texttt{TERM}_C)((\bar{\forall} t \in C)(t^{\mathcal{A}} = u^{\mathcal{B}}))$$

Propuesta de solución

a. I. Defino $C \subseteq \texttt{TERM}_C$ con las siguientes reglas:

1) $f(c) \in C$
2) si $t \in C$ entonces $f(f(f(t))) \in C$

II. Se probará que $(\bar{\forall} t \in C)(t^{\mathcal{A}} = 2)$ aplicando el PIP para C con la siguiente propiedad sobre sus elementos:

$$\mathcal{P}(t) := (t^{\mathcal{A}} = 2)$$

Caso base

T) $\mathcal{P}(f(c)) = (f(c)^{\mathcal{A}} = 2)$

Dem.

$$
\begin{array}{l}
\mathcal{P}(f(c)) \\
\Leftarrow \text{(definición de } \mathcal{P}) \\
f(c)^{\mathcal{A}} = 2 \\
\Leftarrow \text{(interpretación)} \\
G(\circ) = 2 \\
\text{(Se cumple por definición de } G)
\end{array}
$$

Caso inductivo

HI) $\mathcal{P}(t) = (t^{\mathcal{A}} = 2)$

TI) $\mathcal{P}(f(f(f(t)))) = (f(f(f(t)))^{\mathcal{A}} = 2)$

Dem.

$$
\begin{array}{l}
f(f(f(t)))^{\mathcal{A}} \\
= \text{(def. \_}^{\mathcal{A}}) \\
G(f(f(t))^{\mathcal{A}}) \\
= \text{(def. \_}^{\mathcal{A}}) \\
G(G(f(t)^{\mathcal{A}})) \\
= \text{(def. \_}^{\mathcal{A}}) \\
G(G(G(t^{\mathcal{A}}))) \\
= \text{(HI)} \\
G(G(G(2))) \\
= \text{(def. } G) \\
G(G(\bullet)) \\
= \text{(def. } G) \\
G(\circ) \\
= \text{(def. } G) \\
2
\end{array}
$$

♣

b. Defino $F(n) := (n+1)\ mod\ 3$.
Queremos probar

$$(\bar{\forall} m \in |\mathcal{B}|)((\bar{\exists} t \in \texttt{TERM}_C)(t \neq c \text{ y } t^{\mathcal{B}} = m)).$$

Daremos para esto un testigo $t \in \texttt{TERM}_C$ que cumpla $t \neq c$ y $t^{\mathcal{B}} = m$ para cada elemento $m \in |\mathcal{B}|$:

Caso $m = 1$: Tomando $t = f(f(f(c)))$ como testigo, se cumple $c \neq f(f(f(c)))$ y además por definición de $\_^{\mathcal{B}}$ y de F,

$$t^{\mathcal{B}} = f(f(f(c)))^{\mathcal{B}} = F(F(F(c^{\mathcal{B}}))) = F(F(F(1))) = F(F(2)) = F(0) = 1$$

Caso $m = 2$: Tomando $t = f(c)$ como testigo, se cumple $c \neq f(c)$ y además por definición de $\_^{\mathcal{B}}$ y de F,

$$t^{\mathcal{B}} = f(c)^{\mathcal{B}} = F(c^{\mathcal{B}}) = F(1) = 2$$

Caso $m = 3$: Tomando $t = f(f(c))$ como testigo, se cumple $c \neq f(f(c))$ y además por definición de $\_^{\mathcal{B}}$ y de F,

$$t^{\mathcal{B}} = f(f(c))^{\mathcal{B}} = F(F(c^{\mathcal{B}})) = F(F(1)) = F(2) = 0$$

Hemos encontrado entonces un testigo para cada elemento del universo de discurso que cumpla la propiedad pedida. ♣

c. De acuerdo a lo visto en las partes anteriores basta con tomar cualquier término cuya interpretación en $\mathcal{B}$ sea 2, por ejemplo $u = f(c)$.

Tenemos entonces por la parte a. que

$$(\bar{\forall} t \in C)(t^{\mathcal{A}} = 2).$$

y como por definición de u, $\_^{\mathcal{B}}$ y F,

$$u^{\mathcal{B}} = f(c)^{\mathcal{B}} = F(1) = 2$$

se cumple

$$(\bar{\forall} t \in C)(t^{\mathcal{A}} = u^{\mathcal{B}})$$

♣

Ejercicio 2 (15 puntos)

Considere la estructura $\mathcal{M} = \langle ArbBin, Izq, Der, Raiz, Generar, \langle 2, null, null\rangle\rangle$ tal que:

1. *ArbBin* es el conjunto de los árboles binarios de naturales definido inductivamente por las siguientes reglas:

   i **null** $\in ArbBin$.

   ii Si $n \in \mathbb{N}$ y $A, B \in ArbBin$ entonces $\langle n, A, B\rangle \in ArbBin$

2. *Izq* y *Der* son funciones que dado un árbol binario devuelven su subárbol izquierdo y derecho respectivamente. *Raiz* es una función que dado un árbol binario devuelve su raíz como un árbol de un único nodo.

$$\begin{array}{llllll} Izq(\mathbf{null}) = & \mathbf{null} & Der(\mathbf{null}) = & \mathbf{null} & Raiz(\mathbf{null}) = & \mathbf{null} \\ Izq(\langle n, A, B\rangle) = & A & Der(\langle n, A, B\rangle) = & B & Raiz(\langle n, A, B\rangle) = & \langle n, \mathbf{null}, \mathbf{null}\rangle \end{array}$$

3. *Generar* es una función que permite construir un árbol binario a partir de tres árboles dados. Su definición es la siguiente:

$$\begin{array}{ll} Generar(\mathbf{null}, A, B) & = \mathbf{null} \\ Generar(\langle n, N_1, N_2\rangle, A, B) & = \langle n, A, B\rangle \end{array}$$

a. Indique el tipo de similaridad asociado a $\mathcal{M}$.

b. Demuestre que $\mathcal{M} \models (\forall x) f_4(f_3(x), f_1(x), f_2(x)) \doteq x$.

c. Demuestre o refute que $\mathcal{M} \models (\forall w)(\exists x)(\exists y)(\exists z) f_4(x, y, z) \doteq w$.

d. Demuestre que $\not\models (\forall w)(\exists x)(\exists y)(\exists z) f_4(x, y, z) \doteq w$.

Propuesta de solución

a. El tipo de similaridad asociado a $\mathcal{M}$ es $\langle -; 1, 1, 1, 3; 1\rangle$.

b.

$$\begin{array}{l} \mathcal{M} \models (\forall x) f_4(f_3(x), f_1(x), f_2(x)) \doteq x \\ \Leftrightarrow \text{(es sentencia, 2.4.5, sust.)} \\ (\bar{\forall} A \in ArbBin)(\mathcal{M} \models f_4(f_3(\bar{A}), f_1(\bar{A}), f_2(\bar{A})) \doteq \bar{A}) \\ \Leftrightarrow \text{(def } v^{\mathcal{M}}, \_^{\mathcal{M}} \text{ y } \mathcal{M}) \\ (\bar{\forall} A \in ArbBin)(Generar(Raiz(A), Izq(A), Der(A)) = A). \end{array}$$

Caso 1) $A = \mathbf{null}$

$$\begin{array}{l} Generar(Raiz(A), Izq(A), Der(A)) \\ = \text{(def. } A) \\ Generar(Raiz(\mathbf{null}), Izq(A), Der(A)) \\ = \text{(def. } Raiz) \\ Generar(\mathbf{null}, Izq(A), Der(A)) \\ = \text{(def. } Generar) \\ \mathbf{null} \\ = \text{(def. } A) \\ A. \end{array}$$

Caso 2) $A = \langle a, A_1, A_2\rangle$

$$
\begin{aligned}
& \mathit{Generar}(\mathit{Raiz}(A), \mathit{Izq}(A), \mathit{Der}(A)) \\
& = \text{(def. } A\text{)} \\
& \mathit{Generar}(\mathit{Raiz}(\langle a, A_1, A_2\rangle), \mathit{Izq}(\langle a, A_1, A_2\rangle), \mathit{Der}(\langle a, A_1, A_2\rangle)) \\
& = \text{(por definición de } \mathit{Raiz}, \mathit{Izq} \text{ y } \mathit{Der}\text{)} \\
& \mathit{Generar}(\langle a, \mathbf{null}, \mathbf{null}\rangle, A_1, A_2) \\
& = \text{(def. } \mathit{Generar}\text{)} \\
& \langle a, A_1, A_2\rangle \\
& = \text{(def. } A\text{)} \\
& A.
\end{aligned}
$$

♣

c.

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{M} \models (\forall w)(\exists x)(\exists y)(\exists z) f_4(x, y, z) \doteq w \\
& \Leftrightarrow \text{(es sentencia, 2.4.5, sust.)} \\
& (\bar{\forall} A \in \mathit{ArbBin})(\mathcal{M} \models (\exists x)(\exists y)(\exists z) f_4(x, y, z) \doteq \bar{A}) \\
& \Leftrightarrow \text{(tres veces: es sentencia, 2.4.5, sust.)} \\
& (\bar{\forall} A \in \mathit{ArbBin})((\bar{\exists} B, C, D \in \mathit{ArbBin})(\mathcal{M} \models f_4(\bar{B}, \bar{C}, \bar{D}) \doteq \bar{A}))
\end{aligned}
$$

Sea $A \in \mathit{ArbBin}$ arbitrario. Considero los siguientes testigos:

$$
\begin{aligned}
B &= \mathit{Raiz}(A) \\
C &= \mathit{Izq}(A) \\
D &= \mathit{Der}(A)
\end{aligned}
$$

Luego, por la parte anterior se cumple:

$$\mathit{Generar}(\mathit{Raiz}(\mathrm{A}),\ \mathit{Izq}(\mathrm{A}),\ \mathit{Der}(\mathrm{A})) = \mathrm{A}$$

Entonces, como A arbitrario probamos que

$$(\bar{\forall} A \in \mathit{ArbBin})((\bar{\exists} B, C, D \in \mathit{ArbBin})(\mathcal{M} \models f_4(\bar{B}, \bar{C}, \bar{D}) \doteq \bar{A}))$$

♣

d. Sea $\mathcal{M}_2 = \langle \{\circ, \bullet\}, \mathit{Id}, \mathit{Id}, \mathit{Id}, F, \circ\rangle$ tal que $(\bar{\forall} a, b, c \in \{\circ, \bullet\})(F(a, b, c) = \circ)$.

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{M}_2 \models (\forall w)(\exists x)(\exists y)(\exists z) f_4(x, y, z) \doteq w \\
& \Leftrightarrow \text{(análogo a parte anterior, usando 2.4.5, sust., def } v^{\mathcal{M}_2}, \mathcal{M}_2 \text{ y } \_^{\mathcal{M}_2}\text{)} \\
& (\bar{\forall} a \in \{\circ, \bullet\})((\bar{\exists} b, c, d \in \{\circ, \bullet\})(F(b, c, d) = a))
\end{aligned}
$$

Esto es falso ya que, si tomamos $a = \bullet$, $F(b, c, d) = \circ \neq \bullet$ para b, c, d cualesquiera por definición de F.

Entonces,

$$
\begin{gathered}
(\bar{\exists} \mathcal{M}_2 \text{ e.t.a.})(\mathcal{M}_2 \not\models (\forall w)(\exists x)(\exists y)(\exists z) f_4(x, y, z) \doteq w) \\
\Leftrightarrow \text{(definición } \models\text{)} \\
\not\models (\forall w)(\exists x)(\exists y)(\exists z) f_4(x, y, z) \doteq w
\end{gathered}
$$

♣

Ejercicio 3 (15 puntos)

Considere la siguiente definición:

$$\varphi := (\exists x)(\forall y)(P(x) \wedge (P(y) \rightarrow x \doteq y))$$

a. Sean t y t' dos términos tales que $x \notin \mathrm{FV}(t) \cup \mathrm{FV}(t')$. Construya una derivación que demuestre que $\varphi, P(t), P(t') \vdash t \doteq t'$

b. Demuestre que si $y \notin \mathrm{FV}(t)$ y $P(y) \vdash y \doteq t$ entonces $P(t) \vdash \varphi$

En ningún caso son aceptables justificaciones basadas en consideraciones semánticas.

Propuesta de solución

a.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{φ}
\AxiomC{$[(\forall y)(P(x) \wedge (P(y) \rightarrow x \doteq y))]^1$}
\RightLabel{$E\forall(*1)$}
\UnaryInfC{$P(x) \wedge (P(t) \rightarrow x \doteq t)$}
\RightLabel{$E\wedge$}
\UnaryInfC{$P(t) \rightarrow x \doteq t$}
\AxiomC{$P(t)$}
\RightLabel{$E\rightarrow$}
\BinaryInfC{$x \doteq t$}
\RightLabel{$RI2$}
\UnaryInfC{$t \doteq x$}
\AxiomC{$[(\forall y)(P(x) \wedge (P(y) \rightarrow x \doteq y))]^1$}
\RightLabel{$E\forall(*2)$}
\UnaryInfC{$P(x) \wedge (P(t') \rightarrow x \doteq t')$}
\RightLabel{$E\wedge$}
\UnaryInfC{$P(t') \rightarrow x \doteq t'$}
\AxiomC{$P(t')$}
\RightLabel{$E -$}
\BinaryInfC{$x \doteq t'$}
\RightLabel{$RI3$}
\BinaryInfC{$t \doteq t'$}
\RightLabel{$E\exists(1)(*3)$}
\BinaryInfC{$t \doteq t'$}
\end{prooftree}
$$

(*1) t está libre para y en $P(x) \wedge (P(y) \rightarrow x \doteq y)$

(*2) t' está libre para y en $P(x) \wedge (P(y) \rightarrow x \doteq y)$

(*3) $x \notin FV(P(t), P(t'), t \doteq t')$

Otra alternativa,

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{φ}
\AxiomC{$P(t')$}
\AxiomC{$P(t)$}
\AxiomC{$[(\forall y)(P(x) \wedge (P(y) \rightarrow x \doteq y)]^1$}
\RightLabel{$E\forall(*3)$}
\UnaryInfC{$P(x) \wedge (P(t) \rightarrow x \doteq t)$}
\RightLabel{$E\wedge^2$}
\UnaryInfC{$P(t) \rightarrow x \doteq t$}
\RightLabel{$E\rightarrow$}
\BinaryInfC{$x \doteq t$}
\AxiomC{$[(\forall y)(P(x) \wedge (P(y) \rightarrow x \doteq y)]^1$}
\RightLabel{$E\forall(*3)$}
\UnaryInfC{$P(x) \wedge (P(t') \rightarrow x \doteq t')$}
\RightLabel{$E\wedge^2$}
\UnaryInfC{$P(t') \rightarrow x \doteq t'$}
\RightLabel{$RI4(*2)$}
\BinaryInfC{$P(t') \rightarrow t \doteq t'$}
\RightLabel{$E\rightarrow$}
\BinaryInfC{$t \doteq t'$}
\RightLabel{$E\exists_1(*1)$}
\BinaryInfC{$t \doteq t'$}
\end{prooftree}
$$

(*1) x no aparece libre ni en t ni en t', y por lo tanto no aparece libre ni en las premisas sin cancelar (en este caso, $P(t)$ y $P(t')$) ni en la conclusión (en este caso, $t \doteq t'$).

(*2) Cualquier término (en este caso, x y t) está libre para cualquier variable (en este caso, z) en cualquier fórmula abierta (en este caso, $P(t') \rightarrow z \doteq t'$).

(*3) Cualquier término (en estos casos, t y t') está libre para cualquier variable (en este caso, y) en cualquier fórmula abierta (en este caso, $P(x) \wedge P(y) \rightarrow x \doteq y$).

b. $P(y) \vdash y \doteq t \overset{\text{def.}\vdash}{\Leftrightarrow} (\exists D \in \mathtt{DER})(H(D) \subseteq \{P(y)\}, C(D) = y \doteq t)$, que notamos:

$$\begin{array}{c} P(y) \\ \vdots \\ y \doteq t \end{array}$$

A partir de la derivación anterior se construye la siguiente:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$P(t)$}
\AxiomC{$[P(y)]^1$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$y \doteq t$}
\RightLabel{$RI2$}
\UnaryInfC{$t \doteq y$}
\RightLabel{$I \to_1$}
\UnaryInfC{$P(y) \to t \doteq y$}
\RightLabel{$I\wedge$}
\BinaryInfC{$P(t) \wedge (P(y) \to t \doteq y)$}
\RightLabel{$I\forall(*2)$}
\UnaryInfC{$(\forall y)(P(t) \wedge (P(y) \to t \doteq y))$}
\RightLabel{$I\exists(*1)$}
\UnaryInfC{$(\exists x)(\forall y)(P(x) \wedge (P(y) \to x \doteq y))$}
\end{prooftree}
$$

(*1) t está libre para x en $(\forall y)(P(x) \wedge (P(y) \to x \doteq y))$ dado que $y \notin \mathrm{FV}(t)$.

(*2) y no pertenece a las variables libres de t, y por lo tanto no pertenece a las variables libres de $P(t)$.

Ejercicio 4 (15 puntos)

Considere un lenguaje de primer orden de tipo $\langle 1; 1; 1\rangle$, un alfabeto con símbolo de predicado P, símbolo de función f y símbolo de constante c, y $\mathcal{K} = \{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2\}$ con $\mathcal{M}_1 = \langle \{1\}, \{1\}, id, 1\rangle$ y $\mathcal{M}_2 = \langle \{\circ, \bullet\}, \emptyset, F, \bullet\rangle$ donde $F(\circ) = \circ$ y $F(\bullet) = \circ$.

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a. $(\bar{\exists}\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K})(\textsc{Cons}(\emptyset) \subseteq Th(\mathcal{K}_1))$
b. $(\bar{\exists}\mathcal{K}_1)(\bot \in Th(\mathcal{K} \cup \mathcal{K}_1))$
c. $(\exists x)c \doteq f(x) \in Th(\mathcal{K})$
d. $Th(\mathcal{K})$ es consistente maximal

Propuesta de solución

a. **Verdadera.** Tomemos $\mathcal{K}_1 := \emptyset$ como testigo. Entonces se tiene, $\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}$.

   Por definición de $\textsc{Cons}$, $\textsc{Cons}(\emptyset) \subseteq \texttt{SENT}$

   $Th(\emptyset) = \texttt{SENT}$ ya que no hay estructuras en $\emptyset$ que no modelen los elementos de $\texttt{SENT}$.

   Con lo que se concluye que $\mathcal{K}_1$ cumple la propiedad planteada.

b. **Falso.** Si $\bot \in Th(\mathcal{K} \cup \mathcal{K}_1)$ entonces como $\mathcal{M}_1 \in \mathcal{K} \cup \mathcal{K}_1$ y por definición de Th, $\mathcal{M}_1 \models \bot$, contradiciendo esto la definición de $v^{\mathcal{M}_1}(\bot)$.

c. **Falsa.** Defino la sentencia $\psi := (\exists x)c \doteq f(x)$.

$\mathcal{M}_2 \not\models \psi$
$\Leftarrow$ (definición de ψ)
$\mathcal{M}_2 \not\models (\exists x)c\doteq f(x)$
$\Leftarrow$ (2.4.5 y sust.)
$(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}_2|)(\mathcal{M}_2 \not\models c\doteq f(\bar{a}))$
$\Leftarrow$ (def. $|\mathcal{M}_2|$)
$\mathcal{M}_2 \not\models c\doteq f(\bar{\bullet})$ y $\mathcal{M}_2 \not\models c\doteq f(\bar{\circ})$
$\Leftarrow$ (def. $\models, v^{\mathcal{M}_2}$)
$c^{\mathcal{M}_2} \neq f(\bar{\bullet})^{\mathcal{M}_2}$ y $c^{\mathcal{M}_2} \neq f(\bar{\circ})^{\mathcal{M}_2}$
$\Leftarrow$ (def. $\_^{\mathcal{M}_2}$)
$\bullet \neq \circ$
(Se cumple dado que son dos elementos distintos)

Por lo tanto, una de las estructuras de $\mathcal{K}$ no modela a ψ, y esa sentencia no está en la teoría de $\mathcal{K}$ ($Th(\mathcal{K})$).

d. **Falsa.** Considero la sentencia $\psi := (\exists x)c\doteq f(x)$. Observemos que por la pare anterior $\psi \notin Th(\mathcal{K})$. Además,

$\mathcal{M}_1 \models \psi$
$\Leftrightarrow$ (definición de ψ)
$\mathcal{M}_1 \models (\exists x)c\doteq f(x)$
$\Leftrightarrow$ (es sentencia, 2.4.5)
$(\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}_1|)(\mathcal{M}_1 \models c^{\mathcal{M}_1}\doteq id(\bar{a}))$
$\Leftrightarrow$ (def. $\models$)
$(\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}_1|)(v^{\mathcal{M}_1}(c^{\mathcal{M}_1}\doteq id(\bar{a})) = 1)$
$\Leftrightarrow$ (def. $v^{\mathcal{M}_1}$ y $\mathcal{M}_1$)
$(\bar{\exists} a \in \{1\})(1 = id(a))$
$\Leftrightarrow$ (def. id)
$(\bar{\exists} a \in \{1\})(1 = a)$
(Se cumple tomando $a = 1$ como testigo.)

Por definición de $Th(\mathcal{K}), \mathcal{M}_1 \models Th(\mathcal{K})$ y por lo anterior $\mathcal{M}_1 \models \psi$ entonces se cumple

$$\mathcal{M}_1 \models Th(\mathcal{K}) \cup \{\psi\}$$

Por tanto, $Th(\mathcal{K}) \cup \{\psi\}$ es consistente (porque $\mathcal{M}_1$ lo satisface). Finalmente como $Th(\mathcal{K}) \subset Th(\mathcal{K}) \cup \{\psi\}$, entonces $Th(\mathcal{K})$ no es consistente maximal.