Segundo parcial de Lógica

3 de julio 2017

Indicaciones generales

- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **60** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (15 puntos)

Se considera el lenguaje $\mathcal{L}$ con el tipo de similaridad $\langle 1; 2; 2\rangle$ y un alfabeto con símbolo de predicado P, símbolo de función f y constantes c_1 y c_2.

Se definen las siguientes estructuras:

- $\mathcal{M}_1 = \langle \texttt{PROP}, \{\varphi \mid\ \models \varphi\}, F_\leftrightarrow, \bot, \neg\bot\rangle$ donde $F_\leftrightarrow$ se define como: $F_\leftrightarrow(\varphi, \psi) = (\varphi \leftrightarrow \psi)$
- $\mathcal{M}_2 = \langle \mathbb{N}, \{2 \times n \mid n \in \mathbb{N}\}, +, 3, 2\rangle$

a. Escriba la definición del conjunto $\texttt{TERM}_C$ de los términos cerrados (sin constantes extendidas) de $\mathcal{L}$

b. Para cada una de las siguientes afirmaciones, indique si se cumple o no. Justifique su respuesta.

   I. Existe $t \in \texttt{TERM}_C$ tal que $t^{\mathcal{M}_2} = 1$.

   II. Para todo $t \in \texttt{TERM}_C$ y para todo par de valuaciones de $\texttt{PROP}$ v_1 y v_2 se cumple que $v_1(t^{\mathcal{M}_1}) = v_2(t^{\mathcal{M}_1})$.

   III. Existe $t \in \texttt{TERM}_C$ tal que $t^{\mathcal{M}_1}$ es una contingencia.

Propuesta de solución

a. El conjunto $\texttt{TERM}_C$ se define así:

   I $c_1 \in \texttt{TERM}_C$

   II $c_2 \in \texttt{TERM}_C$

   III Si $t_1 \in \texttt{TERM}_C$ y $t_2 \in \texttt{TERM}_C$ entonces $f(t_1, t_2) \in \texttt{TERM}_C$

b. I. La afirmación es **falsa**, para probarlo demostraremos que $(\bar{\forall} t \in \texttt{TERM}_C)(t^{\mathcal{M}_2} > 1)$.

   Para esta demostración usaremos el PIP para $\texttt{TERM}_C$.

   Identificación de la propiedad: $\mathcal{P}(t) = t^{\mathcal{M}_2} > 1$

   Paso Base 1

T) $\mathcal{P}(c_1) = c_1^{\mathcal{M}_2} > 1$

Demo.

$c_1^{\mathcal{M}_2}$
$=$ (def. de interpretación de términos y def. de $\mathcal{M}_2$)
3
$>$ (orden de los naturales)
1

Paso Base 2

T) $\mathcal{P}(c_2) = c_2^{\mathcal{M}_2} > 1$

Demo.

$c_2^{\mathcal{M}_2}$
$=$ (def. de interpretación de términos y def. de $\mathcal{M}_2$)
2
$>$ (orden de los naturales)
1

Paso Inductivo

H) $\mathcal{P}(t_1) = t_1^{\mathcal{M}_2} > 1$
$\mathcal{P}(t_2) = t_2^{\mathcal{M}_2} > 1$

T) $\mathcal{P}(f(t_1, t_2)) = [f(t_1, t_2)]^{\mathcal{M}_2} > 1$

Demo.

$[f(t_1, t_2)]^{\mathcal{M}_2}$
$=$ (def. de interpretación de términos y def. de $\mathcal{M}_2$)
$t_1^{\mathcal{M}_2} + t_2^{\mathcal{M}_2}$
$>$ (suma de dos naturales que por Hipótesis son mayores que 1)
1

Aplicando el PIP para el conjunto $\mathtt{TERM}_C$ y lo demostrado en los pasos bases y el paso inductivo hemos probado que $(\bar{\forall} t \in \mathtt{TERM}_C)(t^{\mathcal{M}_2} > 1)$. Luego, no existe $t \in \mathtt{TERM}_C$ tal que $t^{\mathcal{M}_2} = 1$

II. La afirmación es **verdadera**.

Considerando valuciones v_1 y v_2 genéricas, se probará por inducción en $\mathtt{TERM}_C$ que: $(\bar{\forall} t \in \mathtt{TERM}_C)(v_1(t^{\mathcal{M}_1}) = v_2(t^{\mathcal{M}_1}))$

Para esta demostración usaremos el PIP para $\mathtt{TERM}_C$.
Identificación de la propiedad: $\mathcal{P}(t) = v_1(t^{\mathcal{M}_1}) = v_2(t^{\mathcal{M}_1})$

Paso Base 1

T) $\mathcal{P}(c_1) = v_1(c_1^{\mathcal{M}_1}) = v_2(c_1^{\mathcal{M}_1})$

Demo.

$v_1(c_1^{\mathcal{M}_1})$
$=$ (def. de interpretación de términos y def. de $\mathcal{M}_1$)
$v_1(\perp)$
$=$ (definición de valuación)
$v_2(\perp)$
$=$ (def. de interpretación de términos y def. de $\mathcal{M}_1$)
$v_2(c_1^{\mathcal{M}_1})$

Paso Base 2

T) $\mathcal{P}(c_2) = v_1(c_2^{\mathcal{M}_1}) = v_2(c_2^{\mathcal{M}_1})$

Demo.

$$
\begin{array}{l}
v_1(c_2^{\mathcal{M}_1}) \\
= \text{(def. de interpretación de términos y def. de } \mathcal{M}_1) \\
v_1(\neg\bot) \\
= \text{(definición de valuación)} \\
1 - v_1(\bot) \\
= \text{(definición de valuación)} \\
1 - v_2(\bot) \\
= \text{(definición de valuación)} \\
v_2(\neg\bot) \\
= \text{(def. de interpretación de términos y def. de } \mathcal{M}_1) \\
v_2(c_2^{\mathcal{M}_1})
\end{array}
$$

Paso Inductivo

H) $\mathcal{P}(t_1) = v_1(t_1^{\mathcal{M}_1}) = v_2(t_1^{\mathcal{M}_1})$

$\mathcal{P}(t_2) = v_1(t_2^{\mathcal{M}_1}) = v_2(t_2^{\mathcal{M}_1})$

T) $\mathcal{P}(f(t_1, t_2)) = v_1([f(t_1, t_2)]^{\mathcal{M}_1}) = v_2([f(t_1, t_2)]^{\mathcal{M}_1}$

Demo.

$$
\begin{array}{l}
v_1(f(t_1, t_2)^{\mathcal{M}_1}) = 1 \\
\Leftrightarrow \text{(def. de } \mathcal{M}_1) \\
v_1(t_1^{\mathcal{M}_1} \leftrightarrow t_2^{\mathcal{M}_1}) = 1 \\
\Leftrightarrow \text{(def. de valuación)} \\
v_1(t_1^{\mathcal{M}_1}) = v_1(t_2^{\mathcal{M}_1}) \\
\Leftrightarrow \text{(Hipótesis, sustitución de iguales)} \\
v_2(t_1^{\mathcal{M}_1}) = v_2(t_2^{\mathcal{M}_1}) \\
\Leftrightarrow \text{(def. de valuación)} \\
v_2(t_1^{\mathcal{M}_1} \leftrightarrow t_2^{\mathcal{M}_1}) = 1 \\
\Leftrightarrow \text{(def. de } \mathcal{M}_1) \\
v_2(f(t_1, t_2)^{\mathcal{M}_1}) = 1
\end{array}
$$

En los pasos anteriores se prueba que $v_1(f(t_1, t_2)^{\mathcal{M}_1}) = 1 \Leftrightarrow v_2(f(t_1, t_2)^{\mathcal{M}_1}) = 1$ y esto implica que $v_1(f(t_1, t_2)^{\mathcal{M}_1}) = v_2(f(t_1, t_2)^{\mathcal{M}_1})$

Aplicando el PIP para el conjunto $\mathtt{TERM}_C$ y lo demostrado en los pasos bases y el paso inductivo hemos probado que $(\bar{\forall} t \in \mathtt{TERM}_C)(v_1(t^{\mathcal{M}_1}) = v_2(t^{\mathcal{M}_1}))$.

III. La afirmación es **falsa**.
Por la parte anterior sabemos que $v_1(t^{\mathcal{M}_1}) = v_2(t^{\mathcal{M}_1})$ cualesquiera sean v_1, v_2 y t. Lo cual significa que el valor de verdad debe ser el mismo para toda valuación, siempre 0 o siempre 1. Por lo tanto, para cualquier $t \in \mathtt{TERM}_C$ se cumplirá que $t^{\mathcal{M}_1}$ es una contradicción o una tautología, no puede ser contingencia ya que no se comporta diferente para distintas valuaciones.

Ejercicio 2 (15 puntos)

Construya derivaciones que prueben los siguientes juicios. En ningún caso son válidas consideraciones semánticas:

a. $\vdash (\forall x)f(f(x)) =' x \rightarrow (\forall x)(\exists z)(f(z) =' x \wedge f(x) =' z)$

b. $(\forall x)P(x, f(x)), (\exists y)f(y) =' y \vdash (\exists z)P(f(z), z)$

Propuesta de solución

a. $\vdash (\forall x)f(f(x)) =' x \to (\forall x)(\exists z)(f(z) =' x \wedge f(x) =' z)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(\forall x)f(f(x)) =' x]^{(1)}}{f(f(x)) =' x}\,E\forall_{*} \qquad \dfrac{}{f(x) =' f(x)}\,RI1}{f(f(x)) =' x \wedge f(x) =' f(x)}\,I\wedge}{(\exists z)(f(z) =' x \wedge f(x) =' z)}\,I\exists_{**}}{(\forall x)(\exists z)(f(z) =' x \wedge f(x) =' z)}\,I\forall_{***}}{(\forall x)f(f(x)) =' x \to (\forall x)(\exists z)(f(z) =' x \wedge f(x) =' z)}\,I\to^{(1)}$$

* x está libre para x en cualquier fórmula.

** $f(x)$ está libre para z en $f(z) =' x \wedge f(x) =' z$

*** $x \notin FV((\forall x)f(f(x)) =' x)$

b. $(\forall x)P(x, f(x)), (\exists y)f(y) =' y \vdash (\exists z)P(f(z), z)$

$$\dfrac{(\exists y)f(y) =' y \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[f(y) =' y]^{(1)}}{y =' f(y)}\,RI2 \qquad \dfrac{[f(y) =' y]^{(1)} \qquad \dfrac{(\forall x)P(x, f(x))}{P(y, f(y))}\,E\forall_{*}}{P(y, y)}\,RI4_{**}}{P(f(y), y)}\,RI4_{***}}{(\exists z)P(f(z), z)}\,I\exists_{*4}}{(\exists z)P(f(z), z)}\,E\exists^{(1)}_{*5}$$

* y libre para x en $P(x, f(x))$

** $f(y)$ libre para z en $P(y, z)$ y y libre para z en $P(y, z)$

*** y libre para z en $P(z, y)$ y $f(y)$ libre para z en $P(z, y)$

$*^4$ y libre para z en $P(f(z), z)$

$*^5$ $y \notin FV((\forall x)P(x, f(x)), (\exists z)P(f(z), z))$

Ejercicio 3 (15 puntos)

En este ejercicio trabajaremos con el tipo de similaridad $\langle 2; 2; 0\rangle$ y un alfabeto con símbolo de predicado P y símbolo de función f.

Considere las siguientes sentencias:

$$\varphi_1 := (\forall x)P(x, x)$$
$$\varphi_2 := (\forall x)(\forall y)(P(x, y) \to P(y, x) \to x =' y)$$

que formalizan las nociones de “ser reflexiva” y “ser antisimétrica”, y las sentencias

$$\psi_1 := (\forall x)f(x, x) =' x$$
$$\psi_2 := (\forall x)(\forall y)f(x, y) =' f(y, x)$$

que formalizan las nociones de "ser idempotente" y "ser conmutativa". Además, considere la sentencia

$$\sigma := (\forall x)(\forall y)(P(x,y) \leftrightarrow f(x,y) =' x)$$

a. De una estructura $\mathcal{M}$ que modele el conjunto de sentencias $\{\psi_1, \psi_2, \sigma\}$.
b. Pruebe que $\psi_1, \psi_2, \sigma \models \varphi_1$.
c. Sabiendo que $\sigma, \psi_2 \vdash \varphi_2$, indique si las siguientes oraciones son verdaderas o falsas:
   I. $\{\psi_1, \psi_2, \sigma, \varphi_2\}$ tiene modelo.
   II. $\{\psi_1, \psi_2, \sigma, \neg\varphi_2\}$ tiene modelo.

Propuesta de solución

a. Sea $\mathcal{M}_a := \langle \{\bullet\}, \{\langle \bullet, \bullet \rangle\}, F\rangle$. Con $F(\bullet, \bullet) = \bullet$.

Ahora pruebo que $\mathcal{M}_a$ modela cada una de las tres sentencias.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}_a \models \psi_1\\
&\Leftrightarrow \text{(2.4.5 y sustitución)}\\
&(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}_a|)(\mathcal{M}_a \models f(\bar{a},\bar{a}) \doteq \bar{a})\\
&\Leftrightarrow \text{(Def. } v^{\mathcal{M}_a} \text{ y } _^{\mathcal{M}_a})\\
&(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}_a|)(F(a,a) = a)\\
&\Leftarrow \text{(Def. } F \text{ y } \bullet \text{ único elem. de } |\mathcal{M}_a|)\\
&\bullet = \bullet.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}_a \models \psi_2\\
&\Leftrightarrow \text{(2.4.5 y sustitución x2)}\\
&(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}_1|)((\bar{\forall} b \in |\mathcal{M}_1|)(\mathcal{M}_a \models f(\bar{a},\bar{b}) \doteq f(\bar{b},\bar{a})))\\
&\Leftrightarrow \text{(Def. } v^{\mathcal{M}_a} \text{ y } _^{\mathcal{M}_a})\\
&(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}_1|)((\bar{\forall} b \in |\mathcal{M}_1|)(F(a,b) = F(b,a)))\\
&\Leftarrow (\bullet \text{ único elem. de } |\mathcal{M}_a|)\\
&F(\bullet,\bullet) = F(\bullet,\bullet)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}_a \models \sigma\\
&\Leftrightarrow \text{(2.4.5 y sustitución x2)}\\
&(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}_1|)((\bar{\forall} b \in |\mathcal{M}_1|)(\mathcal{M}_a \models (P(\bar{a},\bar{b}) \leftrightarrow f(\bar{a},\bar{b}) \doteq \bar{a})))\\
&\Leftrightarrow \text{(2.4.5)}\\
&(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}_1|)((\bar{\forall} b \in |\mathcal{M}_1|)(\mathcal{M}_a \models P(\bar{a},\bar{b}) \Leftrightarrow \mathcal{M}_a \models f(\bar{a},\bar{b}) \doteq \bar{a}))\\
&\Leftrightarrow \text{(Def. } v^{\mathcal{M}_a} \text{ y } _^{\mathcal{M}_a})\\
&(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}_1|)((\bar{\forall} b \in |\mathcal{M}_1|)((a,b) \in \{\langle \bullet,\bullet\rangle\} \Leftrightarrow F(a,b) = a))\\
&\Leftarrow (\bullet \text{ único elem. de } |\mathcal{M}_a|)\\
&(\bullet,\bullet) \in \{\langle \bullet,\bullet\rangle\} \Leftrightarrow F(\bullet,\bullet) = \bullet\\
&\Leftrightarrow \text{(Def. } F)\\
&(\bullet,\bullet) \in \{\langle \bullet,\bullet\rangle\} \Leftrightarrow \bullet = \bullet\\
&\text{(Se cumplen ambos lados del si y solo si)}
\end{aligned}$$

b. Observemos que

$$\psi_1, \psi_2, \sigma \models \varphi_1$$
$$\Leftarrow \text{(Def. } \Gamma \models \tau \text{ e inclusión de conjuntos)}$$
$$\psi_1, \sigma \models \varphi_1$$
$$\Leftarrow \text{(Def. } \Gamma \models \tau\text{)}$$
$$(\bar{\forall}\mathcal{M})(\text{si } \mathcal{M} \models \psi_1 \text{ y } \mathcal{M} \models \sigma \text{ entonces } \mathcal{M} \models \varphi_1).$$

Sea $\mathcal{M}$ una estructura tal que $\mathcal{M} \models \psi_1$ y $\mathcal{M} \models \sigma$. Observemos que

$$\mathcal{M} \models \sigma$$
$$\Rightarrow \text{(2.4.5 y sustitución)}$$
$$(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models (\forall y)(P(\bar{a}, y) \leftrightarrow f(\bar{a}, y) \doteq \bar{a}))$$
$$\Rightarrow \text{(2.4.5 y sustitución)}$$
$$(\bar{\forall} a, b \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models P(\bar{a}, \bar{b}) \leftrightarrow f(\bar{a}, \bar{b}) \doteq \bar{a})$$
$$\Rightarrow \text{(2.4.5)}$$
$$(\bar{\forall} a, b \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models P(\bar{a}, \bar{b}) \Leftrightarrow \mathcal{M} \models f(\bar{a}, \bar{b}) \doteq \bar{a}).$$

Luego,

$$\mathcal{M} \models \varphi_1$$
$$\Leftarrow \text{(2.4.5 y sustitución)}$$
$$(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models P(\bar{a}, \bar{a}))$$
$$\Leftarrow \text{(2.4.5 y observación inmediata anterior con } a, b := a, a\text{)}$$
$$(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models f(\bar{a}, \bar{a}) \doteq \bar{a})$$
$$\Leftarrow \text{(2.4.5)}$$
$$\mathcal{M} \models \psi_1.$$

Otra forma de probarlo sería utilizando Correción y construyendo la derviacion $\psi_1, \psi_2, \sigma \vdash \varphi_1$

c. Observemos que

$$\sigma, \psi_2 \vdash \varphi_2$$
$$\Rightarrow \text{(Corrección)}$$
$$\sigma, \psi_2 \models \varphi_2 \tag{1}$$
$$\Rightarrow \text{(Def. } \models\text{)}$$
$$(\bar{\forall}\mathcal{M})(\text{si } \mathcal{M} \models \sigma \text{ y } \mathcal{M} \models \psi_2 \text{ entonces } \mathcal{M} \models \varphi_2)$$

I. **Tiene modelo.** Consideremos la estructura $\mathcal{M}_a$ de la primera parte. Ya probamos que $\mathcal{M}_a$ es modelo de $\{\psi_1, \psi_2, \sigma\}$. Me resta probar que también es modelo de φ_2.

$$\mathcal{M}_a \models \varphi_2$$
$$\Leftarrow \text{(Observación 1)}$$
$$\mathcal{M}_a \models \sigma \text{ y } \mathcal{M}_a \models \psi_2,$$

y esto último ya lo vimos al probar que $\mathcal{M}_a$ es modelo de $\{\psi_1, \psi_2, \sigma\}$

II. **No tiene modelo.** Supongamos que hay una estructura $\mathcal{M}$ que modela al conjunto $\{\psi_1, \psi_2, \sigma, \neg\varphi_2\}$. Por lo tanto, esa estructura cumple

$$\mathcal{M} \not\models \varphi_2 \tag{2}$$

Además,

$$\mathcal{M} \models \sigma \text{ y } \mathcal{M} \models \psi_2$$
$$\Rightarrow \text{(Observación 1)}$$
$$\mathcal{M} \models \varphi_2.$$

Por lo tanto, $\mathcal{M} \models \varphi_2$ y $\mathcal{M} \not\models \varphi_2$. Esta contradicción surge de suponer $\mathcal{M}$ modela $\{\psi_1, \psi_2, \sigma, \neg\varphi_2\}$, único supuesto tomado; por lo tanto, ese supuesto es falso.

Ejercicio 4 (15 puntos)

Considere un lenguaje de primer orden de tipo $\langle 2; 1; 1\rangle$, un alfabeto con símbolo de predicado P, símbolo de función f y símbolo de constante c, y las siguientes definiciones:

$$\begin{array}{rclrcl} \varphi_1 & = & (\forall x)(\forall y)(P(x,y) \leftrightarrow f(x) =' y) & T_1 & = & \textsc{Cons}(\{\varphi_1\}) \\ \varphi_2 & = & (\forall y)\neg P(c,y) & T_2 & = & Th(Mod(\{\varphi_1, \varphi_2\})) \\ \varphi_3 & = & (\exists x)P(x,x) & \mathcal{M}_1 & = & \langle \{\bullet\}, \{(\bullet,\bullet)\}, Id, \bullet\rangle \end{array}$$

donde Id es la función identidad.

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a. T_1 es consistente.
b. $\varphi_3 \in T_1$
c. $\varphi_3 \in T_2$
d. $\textsc{Cons}(T_1 \cup T_2)$ es consistente maximal
e. $Th(\{\mathcal{M}_1\})$ es consistente maximal

Propuesta de solución

a. VERDADERO. Probaremos encontrando $\mathcal{M}$ que modele el conjunto.

$$\begin{array}{l} \mathcal{M}_1 \models \varphi_1 \\ \Leftrightarrow \text{ (2.4.5 y sustitución x2)} \\ (\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}_1|)((\bar{\forall} b \in |\mathcal{M}_1|)(\mathcal{M}_1 \models P(\bar{a},\bar{b}) \leftrightarrow f(\bar{a}) =' \bar{b})) \\ \Leftrightarrow \text{ (2.4.5)} \\ (\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}_1|)((\bar{\forall} b \in |\mathcal{M}_1|)(\mathcal{M}_1 \models P(\bar{a},\bar{b}) \Leftrightarrow \mathcal{M}_1 \models f(\bar{a}) =' \bar{b})) \\ \Leftrightarrow \text{ } (v^{\mathcal{M}_1} \text{ y } \_^{\mathcal{M}_1}) \\ (\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}_1|)((\bar{\forall} b \in |\mathcal{M}_1|)((a,b) \in \{(\bullet,\bullet)\} \Leftrightarrow a = b)) \\ \Leftarrow \text{ } (\bullet \text{ es el único elemento de } \mathcal{M}_1) \\ (\bullet,\bullet) \in \{(\bullet,\bullet)\} \Leftrightarrow \bullet = \bullet \\ \text{(Ambas partes del si y solo si son verdaderas)} \end{array}$$

Entonces, $\mathcal{M}_1 \models \varphi_1$, lo que implica que $\mathcal{M}_1 \models \textsc{Cons}(\{\varphi_1\})$.

Por lo tanto, $\textsc{Cons}(\{\varphi_1\})$ es consistente.

b. FALSO

$$\begin{array}{l} \varphi_3 \notin \textsc{Cons}(\{\varphi_1\}) \\ \Leftrightarrow \text{ (Def Cons)} \\ \varphi_1 \nvdash \varphi_3 \\ \Leftrightarrow \text{ (Corrección y completitud)} \\ \varphi_1 \not\models \varphi_3 \\ \Leftrightarrow \text{ (Def. } \models) \\ (\bar{\exists} \mathcal{M})(\mathcal{M} \models \varphi_1 \text{ y } \mathcal{M} \not\models \varphi_3) \end{array}$$

Sea $\mathcal{M}_2 = \langle \{\bullet, \circ\}\{(\bullet, \circ), (\circ, \bullet)\}, F, \bullet\rangle$ donde $F(\bullet) = \circ$ y $F(\circ) = \bullet$.
Vamos a probar $\mathcal{M}_2 \models \varphi_1$ y $\mathcal{M}_2 \not\models \varphi_3$.

$$\begin{array}{l} \mathcal{M}_2 \models \varphi_1 \\ \Leftrightarrow \text{(2.4.5 y sustitución x2)} \\ (\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}_2|)((\bar{\forall} b \in |\mathcal{M}_2|)(\mathcal{M}_2 \models P(\bar{a}, \bar{b}) \leftrightarrow f(\bar{a}) =' \bar{b})) \\ \Leftrightarrow \text{(2.4.5)} \\ (\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}_2|)((\bar{\forall} b \in |\mathcal{M}_2|)(\mathcal{M}_2 \models P(\bar{a}, \bar{b}) \Leftrightarrow \mathcal{M}_2 \models f(\bar{a}) =' \bar{b})) \\ \Leftrightarrow (v^{\mathcal{M}_2} \text{ y } \_^{\mathcal{M}_2}) \\ (\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}_2|)((\bar{\forall} b \in |\mathcal{M}_2|)((a, b) \in \{(\bullet, \circ), (\circ, \bullet)\} \Leftrightarrow F(a) = b)) \end{array}$$

($\Rightarrow$) Sean a y b dos elementos arbitrarios de $|\mathcal{M}_2|$, tales que $(a, b) \in \{(\bullet, \circ), (\circ, \bullet)\}$.
Por definición de $\mathcal{M}_2$, o bien $a = \bullet$ y $b = \circ$, o bien $a = \circ$ y $b = \bullet$.
Por definición de F, en ambos casos se cumple que $F(a) = b$.

($\Leftarrow$) Sean a y b dos elementos arbitrarios de $|\mathcal{M}_2|$, tales que $F(a) = b$.
Por definición de F, si $a = \bullet$, entonces $b = \circ$ y si $a = \circ$, $b = \bullet$.
Por definición de $\{(\bullet, \circ), (\circ, \bullet)\}$, en ambos casos, $(a, b) \in \{(\bullet, \circ), (\circ, \bullet)\}$.

Por lo anterior, $\mathcal{M}_2 \models \varphi_1$.

Veamos ahora que $\mathcal{M}_2 \not\models \varphi_3$.

$$\begin{array}{l} \mathcal{M}_2 \not\models \varphi_3 \\ \Leftrightarrow \text{(Def } \varphi_3\text{)} \\ \mathcal{M}_2 \not\models (\exists x)P(x, x) \\ \Leftrightarrow \text{(contrarrecíproco 2.4.5 y sustitución)} \\ (\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}_2|)(\mathcal{M}_2 \not\models P(\bar{a}, \bar{a})) \\ \Leftrightarrow \text{(def } \mathcal{M}_2\text{)} \\ (\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}_2|)((a, a) \notin \{(\bullet, \circ), (\circ, \bullet)\}) \end{array}$$

Si $a = \bullet$, entonces $(\bullet, \bullet) \notin \{(\bullet, \circ), (\circ, \bullet)\}$.
Si $a = \circ$, entonces $(\circ, \circ) \notin \{(\bullet, \circ), (\circ, \bullet)\}$.

c. VERDADERO

Consideremos la siguiente derivación:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \leftrightarrow f(x) =' y)}{(\forall y)(P(c, y) \leftrightarrow f(c) =' y)}\, E\forall_{*_1}}{P(c, f(c)) \leftrightarrow f(c) =' f(c)}\, E\forall_{*_2} \qquad \dfrac{}{f(c) =' f(c)}\, RI1}{P(c, f(c))}\, E\leftrightarrow \qquad \dfrac{(\forall y)\neg P(c, y)}{\neg P(c, f(c))}\, E\forall_{*_3}}{\bot}\, E\neg$$

$*_1$ c está libre para x en $(\forall y)(P(x, y) \leftrightarrow f(x) =' y)$.

$*_2$ $f(c)$ está libre para y en $(P(c, y) \leftrightarrow f(c) =' y)$.

$*_3$ $f(c)$ está libre para y en $\neg P(c, y)$.

Esta derivación justifica el juicio $\varphi_1, \varphi_2 \vdash \bot$. Por lo tanto $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ es inconsistente. Por otra parte, por resultado del curso, $T_2 = \textsc{Cons}(\{\varphi_1, \varphi_2\})$ entonces $T_2 = \texttt{SENT}$.

Lo que demuestra que $\varphi_3 \in T_2$.

d. FALSO

Como T_2 es inconsistente, $\textsc{Cons}(T_1 \cup T_2)$ también lo es, por lo que no puede ser consistente maximal.

e. VERDADERO

Recordemos, un conjunto Γ es consistente maximal si y solo si es consistente y para toda sentencia α, $\alpha \in \Gamma$ o $\neg\alpha \in \Gamma$

En primer lugar, $Th(\{\mathcal{M}_1\})$ es consistente, ya que por definición, $\mathcal{M}_1$ lo modela.

Sea una sentencia α. Entonces:

$$
\begin{array}{l}
\alpha \notin Th(\{\mathcal{M}_1\}) \\
\Leftrightarrow \text{(def } Th\text{)} \\
\mathcal{M}_1 \not\models \alpha \\
\Leftrightarrow \text{(2.4.5)} \\
\mathcal{M}_1 \models \neg\alpha \\
\Leftrightarrow \text{(def } Th\text{)} \\
\neg\alpha \in Th(\{\mathcal{M}_1\})
\end{array}
$$

Entonces, para toda sentencia α, o bien $\alpha \in Th(\{\mathcal{M}_1\})$ o bien $\neg\alpha \in Th(\{\mathcal{M}_1\})$.

Por lo tanto, $Th(\{\mathcal{M}_1\})$ es consistente maximal.