Segundo parcial de Lógica

04 de julio 2016

Indicaciones generales

- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **60** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Parte A

Ejercicio 1 (15 puntos)

Considere un lenguaje de primer orden del tipo $\langle 2, 2; 1, 2; 1\rangle$ con símbolos de predicado P y Q, símbolos de función f (unario), g (binario) y símbolo de constante c. Sean A, B estructuras del mismo tipo definidas como sigue:
$A = \langle \mathbb{N}, \leq, \geq, S, +, 0\rangle$, donde $S(x) = x + 1$
$B = \langle \mathbb{N}, \leq, \geq, D, *, 1\rangle$, donde $D(x) = 2 * x$

a. Escriba (sin usar constantes extendidas) dos términos t_1, t_2 tal que $t_1^A = t_2^B$
b. Aplicar la siguiente sustitución: $(\forall x)(P(x, y) \to (\forall y)Q(y, y))[g(z, y)/y]$.
c. Encuentre una fórmula σ tal que: $\sigma[f(y)/y] = (\forall y)f(y) =' c \to P(f(y), f(y))$.
d. Demuestre por inducción que para todo término cerrado t (sin constantes extendidas) se cumple que $t^B = 2^{t^A}$.

Propuesta de solución

a. $t_1 = f(c)$ y $t_2 = c$

Por definición de interpretación de términos

$t_1{}^A = f(c)^A = S(c^A) = S(0) = 1$

$t_2{}^B = c^B = 1$

b. Por definición de sustitución $(\forall x)(P(x, y) \to (\forall y)Q(y, y))[g(z, y)/y]$

$=$

$(\forall x)(P(x, y)[g(z, y)/y] \to (\forall y)Q(y, y)[g(z, y)/y])$

$=$

$(\forall x)(P(x, g(z, y)) \to (\forall y)Q(y, y))$

c. Sea $\sigma = (((\forall y)f(y) =' c) \to P(y, y))$

Siguiende la definición de sustitucion:

$$\begin{array}{ll}
\sigma[f(y)/y] & = \\
(((\forall y)f(y) =' c) \to P(y, y))[f(y)/y] & = \\
(((\forall y)f(y) =' c)[f(y)/y] \to P(y, y)[f(y)/y]) & = \\
(((\forall y)f(y) =' c) \to P(f(y), f(y))) & =
\end{array}$$

d. Se demuestra usando PIP para $\texttt{TERM}_C$ (lenguaje de términos cerrados).

Definición de la propiedad $P(t) := t^B = 2^{t^A}$

Paso Base

(T) $P(c) \ : \ c^B = 2^{c^A}$

Demostración: La siguiente cadena de igualdades prueba la tesis:

$$\begin{aligned} c^B &= 1 && \text{((por def. de } B\text{))} \\ &= 2^0 && \text{((por aritmética))} \\ &= 2^{c^A} && \text{((por def. de } A\text{))} \end{aligned}$$

$\square$

Paso Inductivo 1

(H) $P(t) := t^B = 2^{t^A}$

(T) $P(f(t)) := f(t)^B = 2^{f(t)^A}$

Demostración

$$\begin{aligned} f(t)^B &= 2 \times t^B && \text{((por definición de } B\text{))} \\ &= 2 \times 2^{t^A} && \text{((por (H)))} \\ &= 2^{(t^A+1)} && \text{((por aritmética))} \\ &= 2^{f(t)^A} && \text{((por definición de } A\text{))} \end{aligned}$$

$\square$

Paso Inductivo 2

(H1) $P(t_1) := t_1^B = 2^{t_1^A}$

(H2) $P(t_2) := {t_2}^B = 2^{{t_2}^A}$

(T) $P(g(t_1, t_2)) := g(t_1, t_2)^B = 2^{g(t_1,t_2)^A}$

Demostración:

$$\begin{aligned} g(t_1, t_2)^B &= {t_1}^B * {t_2}^B && \text{(definición de interpretación y de } B\text{)} \\ &= 2^{{t_1}^A} * 2^{{t_2}^A} && \text{(por (HI))} \\ &= 2^{{t_1}^A + {t_2}^A} && \text{(aritmética)} \\ &= 2^{g(t_1,t_2)^A} && \text{(definición de A)} \end{aligned}$$

$\square$

Por PIP para $\texttt{TERM}_C$, queda demostrado que $(\bar{\forall} t \in \texttt{TERM}_C)\ t^B = 2^{t^A}$.

Parte B

Considere un lenguaje de primer orden de tipo $\langle 1, 2, 2; -; 1\rangle$. Definimos:

$\varphi_1 :\ = (\exists x)P_1(x)$ $\varphi_2 :\ = (\exists x)(\exists y)(\neg P_2(x, y))$ $\varphi_3 :\ = (\forall x)(P_1(x) \to \exists y P_2(x, y))$ $\varphi_4 :\ = (\forall x)(\forall y)(\neg(P_1(x) \leftrightarrow P_2(x, y)))$ $\varphi_5 :\ = (\forall w)(P_1(w) \to (\forall z)(\neg P_2(w, z)))$ $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$	$M_1 = \langle \mathbb{N}, \mathbb{N}, \geq, \leq, 0\rangle$ $M_2 = \langle \{\bullet, \circ\}, \{\}, \{(\bullet, \circ)\}, \{(\circ, \circ)\}, \circ\rangle$ $M_3 = \langle \{\bullet, \circ\}, \{\bullet, \circ\}, \{(\bullet, \bullet), (\bullet, \circ), (\circ, \bullet), (\circ, \circ)\}, \{(\circ, \circ)\}, \circ\rangle$

Decimos que M es Gamera sii $M \models \Gamma$.

Ejercicio 2 (15 puntos)

a. Demostrar que M_1 es Gamera.
b. Investigar si M_2 y M_3 son Gameras. Justifique.
c. Demostrar que $\Gamma \not\models \varphi_4$.

Propuesta de solución

a. Hay que probar $\mathcal{M}_1 \models \Gamma$

- $\mathcal{M}_1 \models \varphi_1$.
  $\mathcal{M}_1 \models (\exists x)P_1(x) \Leftrightarrow$ (2.4.5 y sustitución)
  $(\bar{\exists} a \in \mathbb{N})(\mathcal{M}_1 \models P_1(\bar{a})) \Leftrightarrow$ (interpretación de términos y fórmulas cerrados)
  $(\bar{\exists} a \in \mathbb{N})(a \in \mathbb{N})$
  Y esto se cumple ya que $\mathbb{N} \neq \emptyset$ y podemos elegir cualquier natural como testigo.
- $\mathcal{M}_1 \models \varphi_2$.
  $\mathcal{M}_1 \models (\exists x)(\exists y)\neg P_2(x, y) \Leftrightarrow$ (2.4.5 y sustitución)
  $(\bar{\exists} a \in \mathbb{N})(\bar{\exists} b \in \mathbb{N})(\mathcal{M}_1 \models \neg P_2(\bar{a}, \bar{b})) \Leftrightarrow$ (2.4.5)
  $(\bar{\exists} a \in \mathbb{N})(\bar{\exists} b \in \mathbb{N})(\mathcal{M}_1 \not\models P_2(\bar{a}, \bar{b})) \Leftrightarrow$ (int. de términos y fórmulas cerrados)
  $(\bar{\exists} a \in \mathbb{N})(\bar{\exists} b \in \mathbb{N})(a < b)$
  Hay que probar $(\bar{\exists} a \in \mathbb{N})(\bar{\exists} b \in \mathbb{N})(a < b)$
  Sea $a = 1$ y $b = 2 \Rightarrow a < b$
- $\mathcal{M}_1 \models \varphi_3$.
  $\mathcal{M}_1 \models (\forall x)P_1(x) \rightarrow (\exists y)P_2(x, y) \Leftrightarrow$ (2.4.5 y sustitución)
  $(\bar{\forall} a \in \mathbb{N})(\mathcal{M}_1 \models P_1(\bar{a}) \rightarrow (\exists y)P_2(\bar{a}, y))) \Leftrightarrow$ (2.4.5)
  $(\bar{\forall} a \in \mathbb{N})(\text{Si } \mathcal{M}_1 \models P_1(\bar{a}) \text{ entonces } \mathcal{M}_1 \models (\exists y)P_2(\bar{a}, y)) \Leftrightarrow$ (2.4.5 y sustitución)
  $(\bar{\forall} a \in \mathbb{N})(\text{Si } \mathcal{M}_1 \models (P_1(\bar{a}) \text{ entonces } (\bar{\exists} b \in \mathbb{N})(\mathcal{M}_1 \models P_2(\bar{a}, \bar{b}))) \Leftrightarrow$ (int. de términos y fórmulas cerrados)
  $(\bar{\forall} a \in \mathbb{N})(\text{Si } a \in \mathbb{N} \text{ entonces } (\bar{\exists} b \in \mathbb{N})(a \geq b))$
  Hay que probar $(\bar{\forall} a \in \mathbb{N})(\text{Si } a \in \mathbb{N} \text{ entonces } (\bar{\exists} b \in \mathbb{N})(a \geq b))$
  Sea $a \in \mathbb{N}$ arbitrario, como $a \in \mathbb{N}$ hay que probar $(\bar{\exists} b \in \mathbb{N})(a \geq b)$
  Si $b = 0 \Rightarrow a \geq b$

b.
- $\mathcal{M}_2$ no es Gamera ya que $\mathcal{M}_2 \not\models \varphi_1$.
  $\mathcal{M}_2 \not\models (\exists x)P_1(x) \Leftrightarrow$ (2.4.5 y sustitución)
  $(\bar{\forall} a \in \{\bullet, \circ\})(\mathcal{M}_2 \not\models P_1(\bar{a})) \Leftrightarrow$ (interpretación de términos y fórmulas cerrados)
  $(\bar{\forall} a \in \{\bullet, \circ\})(a \notin \emptyset)$
  Y esto se cumple porque ningún elemento pertenece al vacío.
- $\mathcal{M}_3$ no es Gamera ya que $\mathcal{M}_3 \not\models \varphi_2$.
  $\mathcal{M}_3 \models (\exists x)(\exists y)(\neg P_2(x, y))$
  $\Leftrightarrow$ (2.4.5 y sustitución)
  $(\bar{\exists} a \in \{\bullet, \circ\})(\bar{\exists} b \in \{\bullet, \circ\})(\mathcal{M}_3 \models \neg P_2(\bar{a}, \bar{b}))$
  $\Leftrightarrow$ (2.4.5)
  $(\bar{\exists} a \in \{\bullet, \circ\})(\bar{\exists} b \in \{\bullet, \circ\})(\mathcal{M}_3 \not\models P_2(\bar{a}, \bar{b}))$
  $\Leftrightarrow$ (interpretación de términos y fórmulas cerrados)
  $(\bar{\exists} a \in \{\bullet, \circ\})(\bar{\exists} b \in \{\bullet, \circ\})(a, b) \notin {P_2}^{M_3}$
  Esto no se cumple, ya que el conjunto ${P_2}^{M_3}$ contiene todos los pares posibles.

c. Hay que probar $\Gamma \nvdash \varphi_4$

$\Gamma \nvdash \varphi_4 \Leftrightarrow$ (corrección y completitud)

$\Gamma \not\models \varphi_4 \Leftrightarrow$ (definición de modela)

$(\bar{\exists}\mathcal{M} :$ estructura de tipo adecuado$)(\mathcal{M} \models \Gamma\ y\ \mathcal{M} \not\models \varphi_4)$

Voy a probar $\mathcal{M}_1 \models \Gamma$ y $\mathcal{M}_1 \not\models \varphi_4$

- $\mathcal{M}_1 \models \Gamma$ por parte a
- $\mathcal{M}_1 \not\models \varphi_4$

  $\mathcal{M}_1 \not\models (\forall x)(\forall y)(\neg(P_1(x) \leftrightarrow P_2(x,y))) \Leftrightarrow$ (2.4.5 y sustitución)

  $(\bar{\exists} a \in \mathbb{N})(\bar{\exists} b \in \mathbb{N})(\mathcal{M}_1 \not\models \neg(P_1(\bar{a}) \leftrightarrow P_2(\bar{a},\bar{b}))) \Leftrightarrow$ (2.4.5 x2)

  $(\bar{\exists} a \in \mathbb{N})(\bar{\exists} b \in \mathbb{N})(\mathcal{M}_1 \models P_1(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathcal{M}_1 \models P_2(\bar{a},\bar{b})) \Leftrightarrow$ (int. de términos y fórmulas cerrados)

  $(\bar{\exists} a \in \mathbb{N})(\bar{\exists} b \in \mathbb{N})(a \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a \geq b)$

  Hay que probar $(\bar{\exists} a \in \mathbb{N})(\bar{\exists} b \in \mathbb{N})(a \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a \geq b)$

  Sean $a = 2$ y $b = 1 \Rightarrow a \in \mathbb{N}$ y $a \geq b$

Ejercicio 3 (15 puntos)

a. Construya la derivación que prueba $\Gamma \cup \{(\forall x)(\forall y)(P_3(x,y) \leftrightarrow P_2(x,y))\} \vdash (\exists x)(\exists y)(\neg P_3(x,y))$.

b. Probar que $\Gamma \cup \{\varphi_5\}$ es inconsistente.

c. Demostrar que si M es Gamera, entonces $M \not\models \varphi_5$.

Propuesta de solución

a. $\Gamma \cup \{(\forall x)(\forall y)(P_3(x,y) \leftrightarrow P_2(x,y))\} \vdash (\exists x)(\exists y)(\neg P_3(x,y))$

$$\dfrac{(\exists x)(\exists y)\neg P_2(x,y) \qquad \dfrac{[(\exists y)\neg P_2(x,y)]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg P_2(x,y)]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x)(\forall y)(P_3(x,y) \leftrightarrow P_2(x,y))}{(\forall y)(P_3(x,y) \leftrightarrow P_2(x,y))}E\forall(*1)}{P_3(x,y) \leftrightarrow P_2(x,y)}E\forall(*2) \qquad [P_3(x,y)]^3}{P_2(x,y)}E\leftrightarrow}{\bot}E\neg}{\neg P_3(x,y)}I\neg^3}{(\exists y)\neg P_3(x,y)}I\exists(*3)}{(\exists x)(\exists y)\neg P_3(x,y)}I\exists(*4)}{(\exists x)(\exists y)\neg P_3(x,y)}E\exists^2(*5)}{(\exists x)(\exists y)(\neg P_3(x,y))}E\exists^1(*6)$$

(*1) x está libre para x en $(\forall y)(P_3(x,y) \leftrightarrow P_2(x,y))$

(*2) y está libre para y en $(P_3(x,y) \leftrightarrow P_2(x,y))$

(*3) y está libre para y en $\neg P_3(x,y)$

(*4) x está libre para x en $(\exists y)\neg P_3(x,y)$

(*5) $y \notin \mathrm{FV}(\{(\exists x)(\exists y)\neg P_3(x,y), (\forall x)(\forall y)(P_3(x,y) \leftrightarrow P_2(x,y))\})$

(*6) $x \notin \mathrm{FV}(\{(\exists x)(\exists y)\neg P_3(x,y), (\forall x)(\forall y)(P_3(x,y) \leftrightarrow P_2(x,y))\})$

b. Probar que $\Gamma \cup \{\varphi_5\}$ es inconsistente.

$$\dfrac{(\exists x)P_1(x) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x)(P_1(x) \to (\exists y)P_2(x,y))}{P_1(x) \to (\exists y)P_2(x,y)}E\forall(*3) \qquad [P_1(x)]^1}{(\exists y)P_2(x,y)}E\to \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall w)(P_1(w) \to (\forall z)\neg P_2(w,z))}{P_1(x) \to (\forall z)\neg P_2(x,z)}E\forall(*1) \qquad [P_1(x)]^1}{(\forall z)\neg P_2(x,z)}E\to}{\neg P_2(x,y)}E\forall(*2) \qquad [P_2(x,y)]^2}{\bot}E\neg}{\bot}E\exists^2(*4)}{\bot}E\exists^1(*5)$$

(*1) x está libre para w en $P_1(w) \to (\forall z)\neg P_2(w,z)$

(*2) y está libre para z en $\neg P_2(x, z)$

(*3) x está libre para x en $(P_1(x) \to (\exists y)P_2(x, y))$

(*4) $y \notin \mathrm{FV}(\{P_1(x), (\forall w)(P_1(w) \to (\forall z)\neg P_2(w, z)), \bot\})$

(*5) x $\notin \mathrm{FV}(\{(\forall x)(P_1(x) \to (\exists y)P_2(x, y)), (\forall w)(P_1(w) \to (\forall z)\neg P_2(w, z)), \bot\})$

c. Demostrar que si M es Gamera, entonces $M \not\models \varphi_5$.

Por parte (b) sabemos que $\Gamma \cup \{\varphi_5\}$ es inconsistente y por lo tanto no tiene modelo. Esto implica que si una estructura M modela a Γ (es gamera) entonces $M \not\models \varphi_5$.

Ejercicio 4 (15 puntos)

a. Investigar si $\textsc{Cons}(\Gamma)$ es consistente maximal. Justifique su respuesta.

b. Demuestre que M es Gamera si y solo si $M \in \mathit{Mod}(\{\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3\})$.

c. Hallar $\psi \in \mathit{Th}(\mathit{Mod}(\Gamma))$ y $\sigma \notin \mathit{Th}(\mathit{Mod}(\Gamma))$. Justifique.

Propuesta de solución

a. $\textsc{Cons}(\Gamma)$ no es consistente maximal. Lo probaremos dando una sentencia α tal que:

(A) $\alpha \notin \textsc{Cons}(\Gamma)$

(B) $\textsc{Cons}(\Gamma) \cup \{\alpha\}$ es consistente

Sea $\alpha := P_3(c, c)$.

Probaremos que $\alpha \notin \textsc{Cons}(\Gamma)$.

Sea $M_4 = \langle \mathbb{N}, \mathbb{N}, \geq, >, 0 \rangle$

- Observamos que M_4 y M_1 difieren solamente en la interpretación de P_3. Como el símbolo P_3 no aparece en las fórmulas de Γ se puede probar que $M_4 \models \Gamma$ a través del mismo análisis hecho para probar que $M_1 \models \Gamma$.
- $M_4 \vDash P_3(c, c) \Leftrightarrow 0 < 0$ (no se cumple)

De lo anterior surge que $\Gamma \not\models \alpha$ ya que encontré una estructura M_4 que modela Γ y no modela α. Por corrección, entonces $\Gamma \nvdash \alpha$ y $\alpha \notin \textsc{Cons}(\Gamma)$ (A)

Probaremos $\{\alpha\} \cup \textsc{Cons}(\Gamma)$ es consistente

- $M_1 \vDash \Gamma$ por parte (a). Sabemos que Cons(Γ) contiene todas las fórmulas que son consecuencia lógica de Γ por lo tanto (por def. de consecuencia lógica): $M_1 \vDash \textsc{Cons}(\Gamma)$.
- $M_1 \vDash P_3(c, c) \Leftrightarrow 0 \leq 0$ (se cumple).

La estructura M_1 es modelo de $\textsc{Cons}(\Gamma)$ y de α. Entonces $\textsc{Cons}(\Gamma) \cup \{\alpha\}$ es consistente (B)

De los resultados (A) y (B) se concluye que Γ no es consistente maximal.

b.

$$
\begin{array}{lcr}
M \text{ es gamera} & \Leftrightarrow & \text{(def. de Gamera)} \\
M \models \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} & \Leftrightarrow & \text{(def. de } \models\text{)} \\
M \models \varphi_1 \text{ y } M \models \varphi_2 \text{ y } M \models \varphi_3 & \Leftrightarrow & \text{((2.4.5))} \\
M \models \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 & \Leftrightarrow & \text{(definición de Mod)} \\
M \in \mathit{Mod}(\{\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3\}) & \square &
\end{array}
$$

c. Por propiedad vista en el curso: $\mathit{Th}(\mathit{Mod}(\Gamma)) = \textsc{Cons}(\Gamma)$.

Por lo tanto tenemos que encontrar: $\psi \in \textsc{Cons}(\Gamma)$ y $\sigma \notin \textsc{Cons}(\Gamma)$.

Sea $\psi = \neg\bot$ y $\sigma := \bot$.

Vemos que:

- $\Gamma \vdash \neg\bot$ por ser $\neg\bot$ un teorema. Por lo tanto $\psi \in \textsc{Cons}(\Gamma)$
- $\Gamma \nvdash \bot$ por ser Γ consistente. Entonces $\sigma \notin \textsc{Cons}(\Gamma)$