Segundo parcial de Lógica

8 de julio 2015

Indicaciones generales

- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **60** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (15 puntos)

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad con tipo de similaridad $\langle -; 1, 1; 1 \rangle$, con símbolos de función: f y g y símbolo de constante c.

Considere la estructura $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, +1, +2, 0 \rangle$, donde $+1$ es la función que suma uno y $+2$ es la función que suma dos.

a. Sean los conjuntos: $A = \{0, 4\}$ y $B = \{2, 6\}$

Dé $s_1, s_2, s_3, s_4 \in \texttt{TERM}$ tales que: $A = \{s_1^{\mathcal{M}}, s_2^{\mathcal{M}}\}$, $B = \{s_3^{\mathcal{M}}, s_4^{\mathcal{M}}\}$. Justifique su respuesta.

b. I. Defina inductivamente, **sin usar el símbolo** f, el lenguaje infinito $T_1 \subseteq \texttt{TERM}$ tal que las interpretaciones de los elementos de T_1 en $\mathcal{M}$ son múltipos de 4 (por ejemplo 8,12).

II. Demuestre que el lenguaje T_1 cumple la propiedad solicitada.

c. Defina inductivamente, **sin usar el símbolo** f, el lenguaje infinito $T_2 \subseteq \texttt{TERM}$ tal que las interpretaciones de los elementos de T_2 en $\mathcal{M}$ son múltipos de 4 más 2 (por ejemplo 10,14).

No es necesario demostrar que T_2 cumple la propiedad solicitada.

d. Pruebe que $(\bar{\forall} t_1 \in T_1)(\bar{\forall} t_2 \in T_2) t_1 \neq t_2$

e. Demuestre que la siguiente afirmación es falsa:

$$(\bar{\forall} t \in \texttt{TERM})\text{si } t^{\mathcal{M}} \text{ es par entonces } t \in T_1 \cup T_2$$

Propuesta de solución

a. Defino s_1, s_2, s_3, s_4 de la siguiente manera:

$$s_1 := c, \qquad s_2 := g(g(c)), \qquad s_3 := g(c), \qquad s_4 := g(g(g(c)))$$

Estas definiciones satisfacen lo pedido:

$$s_1^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{M}} = 0, \qquad s_3^{\mathcal{M}} = g(s_1)^{\mathcal{M}} = 2 + 0 = 2, \qquad s_2^{\mathcal{M}} = g(s_3)^{\mathcal{M}} = 2 + 2 = 4, \qquad s_4^{\mathcal{M}} = g(s_2)^{\mathcal{M}} = 2 + 4 = 6,$$

por lo que $A = \{s_1^{\mathcal{M}}, s_2^{\mathcal{M}}\}$ y $B = \{s_3^{\mathcal{M}}, s_4^{\mathcal{M}}\}$.

b. I. Defino inductivamente $T_1 \subseteq \texttt{TERM}$ con las siguientes reglas:

   I $c \in T_1$
   II si $t \in T_1$ entonces $g(g(t)) \in T_1$

   II. Defino la siguiente propiedad sobre T_1:

$$\mathcal{P}(t) := t^{\mathcal{M}} \text{ es múltiplo de } 4$$

Voy a probar las hipótesis del PIP sobre T_1:

Caso base: $\mathcal{P}(c)$,
$c^M = 0$ por definición de $\mathcal{M}$
0 es múltiplo de 4
$\square$

Caso inductivo:
H) $\mathcal{P}(t) : t^M$ es múltiplo de 4.
T) $\mathcal{P}(g(g(t))) : g(g(t))^M$ es múltiplo de 4
Demostración:

$$\begin{array}{ll} g(g(t))^M & = \text{(definición de } M) \\ g(t)^M + 2 & = \text{(definición de } M) \\ t^M + 2 + 2 & = \text{(aritmética)} \\ t^M + 4 & \end{array}$$

Por H) t^M es múltiplo de 4. Por lo tanto también lo es $t^M + 4$ (aritmética).

Ahora puedo aplicar el PIP, y concluir que

$$(\bar{\forall} t \in T_1)\mathcal{P}(t).$$

c. Defino inductivamente $T_2 \subseteq \texttt{TERM}$ con las siguientes reglas:

   I $g(c) \in T_2$
   II si $t \in T_2$ entonces $g(g(t)) \in T_2$

d. Sean $t_1 \in T_1$ y $t_2 \in T_2$.

Suponemos $t_1 = t_2$.

Luego: ${t_1}^M = {t_2}^M$.

Pero esto no es posible porque ${t_1}^M$ es múltiplo de 4 y ${t_2}^M$ es múltiplo de 4 más 2.

Concluímos que $t_1 \neq t_2$.

e. Defino $t := f(f(c))$. Observemos que

$$t^{\mathcal{M}} = f(f(c))^{\mathcal{M}} = 1 + f(c)^{\mathcal{M}} = 2 + c^{\mathcal{M}} = 2,$$

que es par. Y por otra parte, t no está ni en T_1 ni en T_2 porque el símbolo f no aparece en esos lenguajes.

Encontramos t tal que t^M es par pero $t \notin T_1 \cup T_2$. Esto prueba que la propiedad enunciada **es falsa**.

Ejercicio 2 (15 puntos)

Considere el lenguaje de primer orden con igualdad definido por el tipo de similaridad $\langle 1, 1; -; 0\rangle$, con símbolos de predicados P y Q y una estructura $\mathcal{M}$ de este tipo.

a. I. Pruebe que $\mathcal{M} \models (\forall y)P(y) \Leftrightarrow \mathcal{M} \models P(x)$
   II. Pruebe que $\not\models P(x) \rightarrow (\forall y)P(y)$

b. Dé $\mathcal{M}_1$ tal que $\mathcal{M}_1 \not\models (\exists y)(P(y) \wedge \neg x \doteq y) \rightarrow (\forall x)P(x)$. Justifique su respuesta.

c. Demuestre usando equivalentes (y sin usar el lema 2.4.5) que:

$\models ((\exists x)P(z) \vee \neg Q(y)) \leftrightarrow \neg(\forall x)(\neg P(z) \wedge Q(y))$

Propuesta de solución

a. I.

$$\begin{array}{l} \mathcal{M} \models (\forall y)P(y) \\ \Leftrightarrow \text{ (2.4.5)} \\ (\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \models P(\bar{a}) \\ \Leftrightarrow \text{ (2.4.5)} \\ \mathcal{M} \models (\forall x)P(x) \\ \Leftrightarrow \text{ (def. y clausura)} \\ \mathcal{M} \models P(x) \end{array}$$

II. Para probar que no se cumple $\models P(x) \rightarrow (\forall y)P(y)$ alcanza con encontrar $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \not\models P(x) \rightarrow (\forall y)P(y)$.

Analizamos qué debe cumplir una estructura para ser modelo de $P(x) \rightarrow (\forall y)P(y)$

$$\begin{array}{lcr} \mathcal{M} \models P(x) \rightarrow (\forall y)P(y) & \Leftrightarrow & \text{(definición de } \models\text{, clausura)} \\ \mathcal{M} \models (\forall x)(P(x) \rightarrow (\forall y)P(y)) & \Leftrightarrow & \text{(2.4.5)} \\ (\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|)\ \mathcal{M} \models P(\bar{a}) \rightarrow (\forall y)P(y) & \Leftrightarrow & \text{(definición de } \models\text{)} \\ (\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|)\ (\mathcal{M} \models P(\bar{a}) \Rightarrow \mathcal{M} \models (\forall y)P(y)) & \Leftrightarrow & \text{(2.4.5)} \\ (\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|)\ (\mathcal{M} \models P(\bar{a}) \Rightarrow (\bar{\forall} b \in |\mathcal{M}|)\ \mathcal{M} \models P(\bar{b})) & & \end{array}$$

Una estructura $\mathcal{M}$ que haga falsa esta última afirmación deberá cumplir:

$$\begin{array}{lcr} (\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}|)\ (\mathcal{M} \models P(\bar{a}) \text{ y } (\bar{\exists} b \in |\mathcal{M}|)\ \mathcal{M} \not\models P(\bar{b})) & \Leftrightarrow & \text{(definición de } \models\text{)} \\ (\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}|)\ (a \in P^{\mathcal{M}} \text{ y } (\bar{\exists} b \in |\mathcal{M}|)\ b \notin P^{\mathcal{M}}) & & \end{array}$$

Luego, me basta con tomar $\mathcal{M} = \langle \{\circ, \bullet\}, \{\circ\}, \emptyset\rangle$, $a = \circ$, $b = \bullet$.

b.

$$\mathcal{M}_1 \not\models (\exists y)(P(y) \wedge \neg x =' y) \to (\forall x)P(x)$$
$\Leftrightarrow$ (clausura)
$$\mathcal{M}_1 \not\models (\forall x)((\exists y)(P(y) \wedge \neg x =' y) \to (\forall x)P(x))$$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$$\mathcal{M}_1 \models \neg(\forall x)((\exists y)(P(y) \wedge \neg x =' y) \to (\forall x)P(x))$$
$\Leftrightarrow$ (equivalencia (1))
$$\mathcal{M}_1 \models (\exists x)(\neg((\exists y)(P(y) \wedge \neg x =' y) \to (\forall x)P(x))$$
$\Leftrightarrow$ (equivalencia (2))
$$\mathcal{M}_1 \models (\exists x)((\exists y)(P(y) \wedge \neg x =' y) \wedge \neg(\forall x)P(x))$$
$\Leftrightarrow$ (equivalencia (3))
$$\mathcal{M}_1 \models (\exists x)((\exists y)(P(y) \wedge \neg x =' y) \wedge (\exists x)\neg P(x))$$
$\Leftrightarrow$ (equivalencia (4))
$$\mathcal{M}_1 \models (\exists x)((\exists y)(P(y) \wedge \neg x =' y) \wedge (\exists z)\neg P(z))$$
$\Leftrightarrow$ (equivalencia (5))
$$\mathcal{M}_1 \models (\exists x)(\exists y)(\exists z)(P(y) \wedge \neg x =' y \wedge \neg P(z))$$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$$(\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}_1|)(\bar{\exists} b \in |\mathcal{M}_1|)(\bar{\exists} c \in |\mathcal{M}_1|)\ \mathcal{M}_1 \models P(\bar{b}) \wedge \neg \bar{a} =' \bar{b} \wedge \neg P(\bar{c})$$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5, definición de $\models$)
$$(\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}_1|)(\bar{\exists} b \in |\mathcal{M}_1|)(\bar{\exists} c \in |\mathcal{M}_1|)\ b \in P^{\mathcal{M}} \text{ y } a \neq b \text{ y } c \notin P^{\mathcal{M}}$$

Consideramos entonces: $\mathcal{M}_1 := \langle \{\bullet, \circ\}, \{\circ\}, \emptyset \rangle$ y tomamos $a = c = \bullet, \quad b = \circ$.

Las equivalencias usadas:

(1) $\neg(\forall x)\varphi$ $\texttt{eq}$ $(\exists x)\neg\varphi$

(2) $\neg(\varphi \to \psi)$ $\texttt{eq}$ $\varphi \wedge \neg\psi$

(3) idem (1)

(4) $(\exists x)\varphi$ $\texttt{eq}$ $(\exists z)\varphi[z/x]$ si z libre para x en φ

(5) $((\exists x)\varphi \wedge \psi)$ $\texttt{eq}$ $(\exists x)(\varphi \wedge \psi)$ si $x \notin \mathrm{FV}(\psi)$
y conmutativa de $\wedge$

c. La siguiente cadena de equivalencias demuestra lo solicitado:

$$\neg(\forall x)(\neg P(z) \wedge Q(y))$$
$\texttt{eq}$ (1)
$$\neg(\neg P(z) \wedge Q(y))$$
$\texttt{eq}$ (2)
$$\neg\neg P(z) \vee \neg Q(y)$$
$\texttt{eq}$ (3)
$$P(z) \vee \neg Q(y)$$
$\texttt{eq}$ (4)
$$(\exists x)P(z) \vee \neg Q(y).$$

Las equivalencias usadas:

(1) $(\forall x)\varphi$ $\texttt{eq}$ φ si $x \notin \mathrm{FV}(\varphi)$

(2) de Morgan

(3) doble negación

(4) $(\exists x)\varphi$ $\texttt{eq}$ φ si $x \notin \mathrm{FV}(\varphi)$

Ejercicio 3 (15 puntos)

Construya derivaciones que prueben los siguiente juicios.

a. $(\forall z)(P(x,z) \land P(y,z) \to P(f(x,y),z))$,
$P(x,f(y,x)), P(y,f(y,x)) \vdash P(f(x,y),f(y,x))$

b. $\vdash (\exists x)(\exists y)(\forall w)P(f(x,y),w) \to (\exists x)(\forall w)P(x,w)$

c. $(\forall x)(\forall y)P(y,f(x,y)) \vdash (\forall y)(\forall x)P(x,f(y,x))$

Propuesta de solución

a.

$$\dfrac{\dfrac{(\forall z)(P(x,z) \land P(y,z) \to P(f(x,y),z)}{P(x,f(y,x)) \land P(y,f(y,x)) \to P(f(x,y),f(y,x))}\,E\forall(*) \qquad \dfrac{P(x,f(y,x)) \quad P(y,f(y,x))}{P(x,f(y,x)) \land P(y,f(y,x))}\,I\land}{P(f(x,y),f(y,x))}\,E\to$$

(*) $f(y,x)$ está libre para z en $P(x,z) \land P(y,z) \to P(f(x,y),z)$

b.

$$\dfrac{\dfrac{[(\exists x)(\exists y)(\forall w)P(f(x,y),w)]^3 \qquad \dfrac{[(\exists y)(\forall w)P(f(x,y),w)]^2 \qquad \dfrac{[(\forall w)P(f(x,y),w)]^1}{(\exists x)(\forall w)P(x,w)}\,I\exists(*1)}{(\exists x)(\forall w)P(x,w)}\,E\exists(*2)(1)}{(\exists x)(\forall w)P(x,w)}\,E\exists(*3)(2)}{(\exists x)(\exists y)(\forall w)P(f(x,y),w) \to (\exists x)(\forall w)P(x,w)}\,I\to(3)$$

(*1) $f(x,y)$ está libre para x en $(\forall w)P(x,w)$

(*2) $y \notin FV((\exists x)(\forall w)P(x,w))$

(*3) $x \notin FV((\exists x)(\forall w)P(x,w))$

c.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x)(\forall y)P(y,f(x,y))}{(\forall y)P(y,f(z,y))}\,E\forall(*1)}{P(x,f(z,x))}\,E\forall(*2)}{(\forall z)P(x,f(z,x))}\,I\forall(*3)}{P(x,f(y,x))}\,E\forall(*4)}{(\forall x)P(x,f(y,x))}\,I\forall(*5)}{(\forall y)(\forall x)P(x,f(y,x))}\,I\forall(*6)$$

(*1) z está libre para x en $(\forall y)P(y,f(x,y))$

(*2) x está libre para y en $P(y,f(z,y))$

(*3) $z \notin FV((\forall x)(\forall y)P(y,f(x,y)))$

(*4) y está libre para z en $P(x,f(z,x))$

(*5) $x \notin FV((\forall x)(\forall y)P(y,f(x,y)))$

(*6) $y \notin FV((\forall x)(\forall y)P(y,f(x,y)))$

Ejercicio 4 (15 puntos)

Considere un lenguaje de primer orden con igualdad $\mathcal{L}_1$, con tipo de similaridad $\langle 1; -; 0\rangle$. Sea $\texttt{SENT}_1$ el conjunto de todas las fórmulas cerradas en $\mathcal{L}_1$.

a. Dé $\varphi \in \texttt{SENT}_1$ tal que $\not\models \varphi$ y $\not\models \neg\varphi$. Justifique su respuesta.

b. Dé $\Gamma \subseteq \texttt{SENT}_1$, teoría consistente y $\varphi \in \Gamma$, siendo φ la definida en la parte a. Justifique su respuesta.

c. Dé $\Delta \subseteq \texttt{SENT}_1$, teoría consistente y $Mod(\Delta) \cap Mod(\Gamma) = \emptyset$. Justifique su respuesta.

d. Considere ahora un lenguaje de primer orden con igualdad $\mathcal{L}_2$, con tipo de similaridad $\langle 1; -; 1\rangle$. Sea $\texttt{SENT}_2$ el conjunto de todas las fórmulas cerradas en L_2.

   Demuestre que hay una fórmula ψ lógicamente válida en $\texttt{SENT}_2$ tal que $\psi \notin \Gamma$.

Propuesta de solución

a. Sea $\varphi := (\forall x_1)P_1(x_1)$

   Sea $\mathcal{M}_1 := \langle\{\bullet\}, \emptyset\rangle$.

$\mathcal{M}_1 \models ((\forall x)P_1(x_1))$	$\Leftrightarrow$	(definición de $\models$)
$\text{mín}\{v^{\mathcal{M}_1}(P_1(\bar{a}))\ :\ a \in \lvert\mathcal{M}_1\rvert\} = 1$	$\Leftrightarrow$	(mínimo de conjunto unitario)
$v^{\mathcal{M}_1}(P_1(\bar{\bullet})) = 1$	$\Leftrightarrow$	(definición de $\mathcal{M}_1$)
$\bullet \in \emptyset$		(no se cumple)

   Se concluye que $\mathcal{M}_1 \not\models \varphi$ y por lo tanto $\not\models \varphi$.

   Sea $\mathcal{M}_2 := \langle\{\bullet\}, \{\bullet\}, \rangle$.

$\mathcal{M}_2 \models \neg((\forall x)P_1(x_1))$	$\Leftrightarrow$	(definición de $\models$)
$v^{\mathcal{M}_2}(\neg((\forall x)P_1(x_1))) = 1$	$\Leftrightarrow$	(definición de v y aritmética)
$\text{mín}\{v^{\mathcal{M}_2}(P_1(\bar{a}))\ :\ a \in \lvert\mathcal{M}_2\rvert\} = 0$	$\Leftrightarrow$	(mínimo de conjunto unitario)
$v^{\mathcal{M}_2}(P_1(\bar{\bullet})) = 0$	$\Leftrightarrow$	(definición de $\mathcal{M}_2$)
$\bullet \notin \{\bullet\}$		(no se cumple)

   Se concluye que $\mathcal{M}_2 \not\models \neg\varphi$ y por lo tanto $\not\models \neg\varphi$.

b. Sea $\Gamma := \textsc{Cons}(\{\varphi\})$.

   - Γ es teoría por construcción por estar definida como $\textsc{Cons}$.
   - $\varphi \in \Gamma$ por construcción ($\varphi \in \textsc{Cons}(\{\varphi\})$)
   - Probaremos que Γ es consistente

     Primero observamos que $\mathcal{M}_2 \models \varphi$.

$\mathcal{M}_2 \not\models \neg\varphi$	(por parte anterior)
$\Leftrightarrow$	(2.4.5)
$\mathcal{M}_2 \models \neg\neg\varphi$	
$\Leftrightarrow$	(equivalencia - doble negación)
$\mathcal{M}_2 \models \varphi$	

     Probamos ahora que $\mathcal{M}_2 \models \Gamma$:

$$
\begin{array}{lcr}
\alpha \in \Gamma & \Leftrightarrow & \text{(Definición de C{\scriptsize ONS})} \\
\varphi \vdash \alpha & \Leftrightarrow & \text{(correctitud-completitud)} \\
\varphi \models \alpha & \Leftrightarrow & \text{(definición de } \models) \\
(\bar{\forall}\mathcal{M} : eta)\ (\mathcal{M} \models \varphi \Rightarrow \mathcal{M} \models \alpha) & &
\end{array}
$$

De lo anterior, concluímos que $(\bar{\forall}\alpha \in \Gamma)\ \mathcal{M}_2 \models \alpha$. Por lo tanto $\mathcal{M}_2 \models \Gamma$.

Como $\mathcal{M}_2$ es un modelo de Γ, queda demostrado que este es *consistente* (condición suficiente de consistencia).

c. Sea $\Delta := \text{C{\scriptsize ONS}}(\{\neg\varphi\})$.

- Δ es teoría por construcción por estar definida como CONS.
- $\neg\varphi \in \Delta$ por construcción.
- Probaremos que Δ es consistente

  Primero observamos que $\mathcal{M}_1 \models \neg\varphi$.

  $$
  \begin{array}{lr}
  \mathcal{M}_1 \not\models \varphi & \text{(por parte anterior)} \\
  \Leftrightarrow & (2.4.5) \\
  \mathcal{M}_1 \models \neg\varphi &
  \end{array}
  $$

  Probamos ahora que $\mathcal{M}_1 \models \Delta$:

  $$
  \begin{array}{lcr}
  \alpha \in \Delta & \Leftrightarrow & \text{(Definición de C{\scriptsize ONS})} \\
  \neg\varphi \vdash \alpha & \Leftrightarrow & \text{(correctitud-completitud)} \\
  \neg\varphi \models \alpha & \Leftrightarrow & \text{(definición de } \models) \\
  (\bar{\forall}\mathcal{M} : eta)\ (\mathcal{M} \models \neg\varphi \Rightarrow \mathcal{M} \models \alpha) & &
  \end{array}
  $$

  De lo anterior, concluímos que $(\bar{\forall}\alpha \in \Delta)\ \mathcal{M}_1 \models \alpha$. Por lo tanto $\mathcal{M}_1 \models \Delta$.

  Como $\mathcal{M}_1$ es un modelo de Δ, queda demostrado que este es *consistente* (condición suficiente de consistencia).
- Se cumple además que $\Gamma \cup \Delta \vdash \bot$, por lo que esa unión no tiene modelo, o sea, $Mod(\Delta \cup \Gamma) = \emptyset$. Por ejercicio del práctico 9 sabemos que $Mod(\Delta) \cap Mod(\Gamma) = Mod(\Delta \cup \Gamma)$. Por lo que queda probado que $Mod(\Delta) \cap Mod(\Gamma) = \emptyset$

d. Considere la fórmula $c =' c$ esta fórmula es un teorema (basta aplicar sólo RI1 para derivarla) y por el teorema de corrección, es una fórmula lógicamente válida. Como utiliza la constante c, está en en $\texttt{SENT}_2$ pero no está en $\texttt{SENT}_1$ y por lo tanto no está en Γ.