Segundo parcial de Lógica

11 de julio 2014

Indicaciones generales

- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **60** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (15 puntos)

Sea el lenguaje de primer orden con igualdad definido por el tipo de similaridad $\langle 2; 2; 1\rangle$, con símbolo de predicado P, símbolo de función f y símbolo de constantes c.

Considere la siguiente definición de subtérmino: Se dice que t' es subtérmino de t si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

- $t' = t$.
- t es de la forma $f(t_1, t_2)$ y t' es subtérmino de t_1 o de t_2.

a. Dé la definición inductiva del conjunto de términos del lenguaje ($\mathtt{TERM}$).

b. Dé la definición recursiva de la función $FV : \mathtt{TERM} \to 2^V$ que devuelve las variables de un término del lenguaje.

c. Demuestre por inducción en $\mathtt{TERM}$ que $(\bar{\forall} t \in \mathtt{TERM})(\bar{\forall} t' \in \mathtt{TERM})(t'$ es subtérmino de $t \Rightarrow FV(t') \subseteq FV(t))$.

d. Dé la definición recursiva de la función $FV : \mathtt{FORM} \to 2^V$ que devuelve las variables libres de una fórmula del lenguaje.

e. ¿Se cumple que $(\bar{\forall} \varphi \in \mathtt{FORM})(\bar{\forall} \psi \in \mathtt{FORM})(\psi$ es subfórmula de $\varphi \Rightarrow FV(\psi) \subseteq FV(\varphi))$? Justifique.

   Nota: La noción de subfórmula en $\mathtt{FORM}$ es análoga a la definición de subfórmula en $\mathtt{PROP}$ donde se agrega la regla:

   Las subfórmulas de $(\forall x)\alpha$ son las subfórmulas de α y $(\forall x)\alpha$. Análogamente para $(\exists x)\alpha$

Propuesta de solución

a. Se define $\mathtt{TERM}$ como:

   i $c \in \mathtt{TERM}$

   ii si $i \in \mathbb{N}$, entonces $x_i \in \mathtt{TERM}$

   iii si $t_1 \in \mathtt{TERM}$ y $t_2 \in \mathtt{TERM}$, entonces $f(t_1, t_2) \in \mathtt{TERM}$

b.

$$\begin{array}{ll} FV : \texttt{TERM} \to 2^V & \\ FV(c) & = \emptyset \\ FV(x_i) & = \{x_i\} \\ FV(f(t_1,t_2)) & = FV(t_1) \cup FV(t_2) \end{array}$$

c. La propiedad a probar sobre cada término es:

$$P(t) := (\bar{\forall} t' \in \texttt{TERM})(t' \text{ es subtérmino de } t \Rightarrow FV(t') \subseteq FV(t))$$

Paso Base 1

T) $P(c) : (\bar{\forall} t' \in \texttt{TERM})(t' \text{ es subtérmino de } c \Rightarrow FV(t') \subseteq FV(c))$

Demo.

Por definición, el único subtérmino de c es c y es trivial que $FV(c) \subseteq FV(c)$

Paso Base 2

T) $P(x_i) : (\bar{\forall} t' \in \texttt{TERM})(t' \text{ es subtérmino de } x_i \Rightarrow FV(t') \subseteq FV(x_i))$

Demo.

Por definición, el único subtérmino de x_i es x_i y es trivial que $FV(x_i) \subseteq FV(x_i)$

Paso Inductivo

HI1) $P(t_1) : (\bar{\forall} t' \in \texttt{TERM})(t' \text{ es subtérmino de } t_1 \Rightarrow FV(t') \subseteq FV(t_1))$

HI2) $P(t_2) : (\bar{\forall} t' \in \texttt{TERM})(t' \text{ es subtérmino de } t_2 \Rightarrow FV(t') \subseteq FV(t_2))$

TI) $P(f(t_1,t_2)) : (\bar{\forall} t' \in \texttt{TERM})(t' \text{ es subtérmino de } f(t_1,t_2) \Rightarrow FV(t') \subseteq FV(f(t_1,t_2)))$

Demo.

Sea t' un subtérmino de $f(t_1,t_2)$. Por definición de subtérmino, t' debe ser o bien $f(t_1,t_2)$ o bien subtérmino de t_1 o subtérmino de t_2, por lo que analizamos estos tres casos:

- $t' = f(t_1,t_2)$:
  Es trivial ver que $FV(f(t_1,t_2)) \subseteq FV(f(t_1,t_2))$.
- t' es subtérmino de t_1:

$$\begin{array}{l} t' \text{ es subtérmino de } t_1 \\ \Rightarrow \text{(HI)} \\ FV(t') \subseteq FV(t_1) \\ \Rightarrow \text{(propiedad de conjuntos)} \\ FV(t') \subseteq FV(t_1) \cup FV(t_2) \\ \Rightarrow \text{(def. } FV\text{)} \\ FV(t') \subseteq FV(f(t_1,t_2)) \end{array}$$

- t' es subtérmino de t_2:
  Análogo al anterior.

Dado que para la propiedad definida se cumplen las hipótesis del PIP para `TERM`, se cumple que $(\bar{\forall} t \in \texttt{TERM})(\bar{\forall} t' \in \texttt{TERM})(t' \text{ es subtérmino de } t \Rightarrow FV(t') \subseteq FV(t))$.

d. Se define FV como:

$$\begin{array}{ll} FV : \texttt{FORM} \to 2^V & \\ FV(\bot) & = \emptyset \\ FV(t_1 =' t_2) & = FV(t_1) \cup FV(t_2) \\ FV(P(t_1,t_2)) & = FV(t_1) \cup FV(t_2) \\ FV(\varphi \Box \psi) & = FV(\varphi) \cup FV(\psi), \Box \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\} \\ FV(\neg\varphi) & = FV(\varphi) \\ FV((\forall x_i)\varphi) & = FV(\varphi) \setminus \{x_i\} \\ FV((\exists x_i)\varphi) & = FV(\varphi) \setminus \{x_i\} \end{array}$$

e. La afirmación es falsa ya que $x_1 =' x_1$ es subfórmula de $(\forall x_1)x_1 =' x_1$, pero

$$FV(x_1 =' x_1) = \{x_1\} \nsubseteq FV((\forall x_1)x_1 =' x_1) = \emptyset$$

.

Ejercicio 2 (15 puntos)

Considere un lenguaje de primer orden con igualdad de tipo de similaridad $\langle -; 1; 0\rangle$ con símbolo de función f.

a. Considere una estructura $\mathcal{M}_1 = \langle U, F\rangle$ de tipo de similaridad $\langle -; 1; 0\rangle$. Decimos que F tiene al menos un punto fijo si existe un elemento a de U, tal que $F(a) = a$. Dar una fórmula de `FORM` que indique que F tiene al menos un punto fijo.

b. Considere la siguiente familia de términos:

$$\begin{array}{lll} t_0 & := & x \\ t_{n+1} & := & f(t_n) \quad \text{con } n \in \mathbb{N} \end{array}$$

I. Dé una estructura $\mathcal{M}_2$ tal que $\mathcal{M}_2 \models (\exists x)t_2 =' x$ y $\mathcal{M}_2 \not\models (\exists x)t_1 =' x$ Justifique su respuesta.

II. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.

1. Para todo $k \in \mathbb{N}$ se cumple: $(\exists x)t_0 =' x \;\models\; (\exists x)t_{k+1} =' x$
2. Para todo $k \in \mathbb{N}$ se cumple: $(\exists x)t_1 =' t_0 \;\models\; (\exists x)t_{k+1} =' t_k$

Propuesta de solución

a. Se propone la siguiente fórmula: $(\exists x)f(x) =' x$.

$$\begin{array}{l} \mathcal{M}_1 \models (\exists x)f(x) =' x \\ \Leftrightarrow \text{(2.4.5)} \\ (\bar{\exists} a \in U)\mathcal{M}_1 \models f(\bar{a}) =' \bar{a} \\ \Leftrightarrow \text{(2.4.5)} \\ (\bar{\exists} a \in U)f(\bar{a})^{\mathcal{M}_1} = a \\ \Leftrightarrow \text{(def. } \mathcal{M}_1) \\ (\bar{\exists} a \in U)F(a) = a, \end{array}$$

y esta última es precisamente la definición de existencia de punto fijo.

b. I. Se busca una estructura $\mathcal{M}_2$ que cumpla

- $\mathcal{M}_2 \models (\exists x)f(f(x)) =' x$
- $\mathcal{M}_2 \not\models (\exists x)f(x) =' x$

Se propone la siguiente estructura: $\mathcal{M}_2 = \langle \{0, 1\}, G\rangle$, donde $G(n) = 1 - n$.

$$\begin{array}{l} \mathcal{M}_2 \models (\exists x)f(f(x)) =' x \\ \Leftrightarrow \text{(2.4.5)} \\ (\bar{\exists} u \in \{0,1\})\ \mathcal{M}_2 \models f(f(\bar{u})) =' \bar{u} \\ \Leftarrow \text{(tomando 0 como testigo)} \\ \mathcal{M}_2 \models f(f(\bar{0})) =' \bar{0} \\ \Leftrightarrow \text{(2.4.5)} \\ f(f(\bar{0}))^{\mathcal{M}_2} = 0 \\ \Leftarrow \text{(def. } \mathcal{M}_2) \\ G(G(0)) = 0 \\ \Leftarrow \text{(def. } G) \\ 1 - (1 - 0) = 0 \\ \text{(lo que se cumple por aritmética)} \end{array}$$

$\mathcal{M}_2 \not\models (\exists x)f(x) =' x$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$(\bar{\forall} a \in \{0,1\})\ \mathcal{M}_2 \not\models f(x) =' x$
$\Leftrightarrow$ (hay sólo dos casos para a)
$\mathcal{M}_2 \not\models f(\bar{0}) =' \bar{0}$ y $\mathcal{M}_2 \not\models f(\bar{1}) =' \bar{1}$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$f(\bar{0})^{\mathcal{M}_2} \neq 0$ y $f(\bar{1})^{\mathcal{M}_2} \neq 1$
$\Leftarrow$ (def. $\mathcal{M}_2$)
$1 - 0 \neq 0$ y $1 - 1 \neq 1$
(lo que se cumple por aritmética)

II. 1) **Falso.**
Se propone el siguiente contraejemplo: $k := 0$, y la estructura $\mathcal{M}_2$ dada en la parte anterior. Debo probar que

- $\mathcal{M}_2 \models (\exists x)x =' x$
- $\mathcal{M}_2 \not\models (\exists x)f(x) =' x$

En la parte anterior se probó la segunda condición. La siguiente derivación muestra que la primer fórmula es un teorema, y por corrección, debe ser modelada por toda estructura del tipo dado:

$$\dfrac{\dfrac{}{x =' x}\,RI1}{(\exists x)x =' x}\,I\exists^*$$

***)** x libre para x en $x =' x$.

2) **Verdadero.**
Probaremos la afirmación por inducción sobre los naturales utilizando la propiedad:

$$P(k) := (\exists x)t_1 =' t_0 \ \vdash\ (\exists x)t_{k+1} =' t_k$$

Paso Base

T) $P(0) : (\exists x)t_1 =' t_0 \vdash (\exists x)t_1 =' t_0$

Demo.

La siguiente derivación justifica la tesis:

$$(\exists x)t_1 =' t_0$$

Paso Inductivo

HI) $P(k) : (\exists x)t_1 =' t_0 \vdash (\exists x)t_{k+1} =' t_k$

TI) $P(k+1) : (\exists x)t_1 =' t_0 \vdash (\exists x)t_{k+2} =' t_{k+1}$

Demo.

Por HI, $(\bar{\exists} D \in \mathtt{DER})(H(D) \subseteq \{(\exists x)t_1 =' t_0\}$ y $C(D) = (\exists x)t_{k+1} =' t_k$.
Podemos construir la siguiente derivación, utilizando D:

$$\dfrac{\begin{array}{c}(\exists x)t_1 =' t_0\\ \bigvee D\\ (\exists x)t_{k+1} =' t_k\end{array} \qquad \dfrac{\dfrac{[t_{k+1} =' t_k]^1}{f(t_{k+1}) =' f(t_k)}\,RI4}{(\exists x)t_{k+2} =' t_{k+1}}\,I\exists^{**}}{(\exists x)t_{k+2} =' t_{k+1}}\,E\exists^*(1)$$

***)** $x \notin FV((\exists x)t_{k+2} =' t_{k+1})$

****)** x libre para x en $t_{k+2} =' t_{k+1}$. Notar que $f(t_{k+1}) = t_{k+2}$ y que $f(t_k) = t_{k+1}$, por definición de t_n.

Como nos encontramos en las hipótesis del PIP para $\mathbb{N}$, concluimos que

$$(\bar{\forall} k \in \mathbb{N})\ (\exists x)t_1 =' t_0 \ \vdash\ (\exists x)t_{k+1} =' t_k$$

y por corrección, se cumple lo pedido:

$$(\bar{\forall} k \in \mathbb{N})\ (\exists x)t_1 =' t_0 \ \models\ (\exists x)t_{k+1} =' t_k$$

Ejercicio 3 (15 puntos)

Construya derivaciones que prueben los siguiente juicios.

a. $(\forall x)P(x, g(x)) \vdash (\forall x)(\exists y)(P(x, y) \land y =' g(x))$

b. $(\forall x)\neg(\exists y)(P(x, y) \land \neg y =' f(x)) \vdash (\forall x)P(x, g(x)) \to \neg(\exists x)\neg g(x) =' f(x)$

Propuesta de solución

a.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x)P(x,g(x))}{P(x,g(x))}\,E\forall^{*1} \qquad \dfrac{}{g(x) =' g(x)}\,RI_1}{P(x,g(x)) \land g(x) =' g(x)}\,I\land}{(\exists y)(P(x,y) \land y =' g(x)}\,I\exists^{*2}}{(\forall x)(\exists y)(P(x,y) \land y =' g(x)}\,I\forall^{*3}$$

***1)** x está libre para x en $P(x, g(x))$

***2)** $g(x)$ está libre para y en $(P(x, y) \land y =' g(x))$

***3)** $x \notin \mathrm{FV}((\forall x)P(x, g(x)))$

b.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(\exists x)\neg g(x) =' f(x))]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{(\forall x)\neg(\exists y)(P(x,y) \land \neg y =' f(x))}{\neg(\exists y)(P(x,y) \land \neg y =' f(x))}\,E\forall^{*3} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[(\forall x)P(x,g(x))]^1}{P(x,g(x))}\,E\forall^{*1} \qquad [\neg g(x) =' f(x)]^3}{P(x,g(x)) \land \neg g(x) =' f(x)}\,I\land}{(\exists y)(P(x,y) \land \neg y =' f(x))}\,I\exists^{*2}}{\bot}\,E\neg}{\bot}\,E\exists^{*4}_{(3)}}{\neg(\exists x)\neg g(x) =' f(x)}\,I\neg_{(2)}}{(\forall x)P(x,g(x)) \to \neg(\exists x)\neg g(x) =' f(x)}\,I\to_{(1)}$$

***1)** x está libre para x en $P(x, g(x))$

***2)** $g(x)$ está libre para y en $P(x, y) \land \neg y =' f(x)$

***3)** x está libre para x en $\neg(\exists y)(P(x, y) \land \neg y =' f(x))$

***4)** $x \notin \mathrm{FV}\{(\forall x)\neg(\exists y)(P(x, y) \land \neg y =' f(x)), (\forall x)P(x, g(x)), \bot\}$

Ejercicio 4 (15 puntos)

Considere una fórmula $\varphi \in \texttt{SENT}$ y una estructura $\mathcal{M}$ fijas, tales que $\mathcal{M} \models \varphi$.

a. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.

I. $\mathit{Th}(\{\mathcal{M}\}) = \{\varphi\}$

II. $\textsc{Cons}(\{\varphi\}) \subseteq \mathit{Th}(\{\mathcal{M}\})$

III. $\mathit{Mod}(\{\varphi\}) \subseteq \mathit{Mod}(\texttt{SENT})$

b. Dar dos conjuntos $\Gamma, \Delta \subseteq \texttt{SENT}$ tales que $\Delta \subset \Gamma$ y $\textsc{Cons}(\Delta) = \textsc{Cons}(\Gamma)$

Propuesta de solución

a. I. **Falso.** Por definición de Th, $Th(\{\mathcal{M}\}) = \{\alpha \in \texttt{SENT} : \mathcal{M} \models \alpha\}$. Pero $\mathcal{M}$ modela a todas las verdades lógicas, en particular a $\neg\bot$ y a $(\forall x)x =' x$. Por lo tanto, no importa quién sea φ, $Th(\{\mathcal{M}\})$ contendrá al menos esas dos sentencias y por lo tanto no puede ser igual a $\{\varphi\}$.

II. **Verdadero.** Consideremos $\alpha \in \textsc{Cons}(\{\varphi\})$. Probaremos que $\alpha \in Th(\{\mathcal{M}\})$:

$$\begin{array}{l} \alpha \in \textsc{Cons}(\{\varphi\}) \\ \Leftrightarrow \text{ (def. Cons)} \\ \varphi \vdash \alpha \\ \Leftrightarrow \text{ (Corr. y Compl.)} \\ \varphi \models \alpha \\ \Leftrightarrow \text{ (def. } \models) \\ (\bar{\forall}\mathcal{N})(\mathcal{N} \models \varphi \Rightarrow \mathcal{N} \models \alpha) \\ \Rightarrow (\mathcal{M} \models \varphi) \\ \mathcal{M} \models \alpha \\ \Leftrightarrow \text{ (def. } Th) \\ \alpha \in Th(\{\mathcal{M}\}) \end{array}$$

III. **Falso.** Por un lado sabemos que $Mod(\{\varphi\}) \neq \emptyset$, ya que $\mathcal{M} \in Mod(\{\varphi\})$. Por otro, sabemos que $Mod(\texttt{SENT}) = \emptyset$, ya que no hay estructuras que modelen a las contradicciones. Observamos entonces que $\mathcal{M} \in Mod(\{\varphi\})$ pero $\mathcal{M} \notin \emptyset$, por lo que $Mod(\{\varphi\}) \nsubseteq Mod(\texttt{SENT})$.

b. Sean $\Gamma = \texttt{SENT}$ y $\Delta = \{\bot\}$.
Probaremos que $\textsc{Cons}(\{\bot\}) = \textsc{Cons}(\texttt{SENT}) = \texttt{SENT}$.

Por definición de Cons sabemos que $\textsc{Cons}(\Gamma) \subseteq \texttt{SENT}$, para cualquier Γ.

Sea un $\varphi \in \texttt{SENT}$. Por regla de eliminación de bottom, $\bot \vdash \varphi$ y entonces $\varphi \in \textsc{Cons}(\{\bot\})$. Por lo tanto, $\textsc{Cons}(\{\bot\}) = \texttt{SENT}$.

Sea un $\varphi \in \texttt{SENT}$. La siguiente derivación (trivial) justifica $\texttt{SENT} \vdash \varphi$:

$$\varphi$$

y entonces $\varphi \in \textsc{Cons}(\texttt{SENT})$. Por lo tanto, $\textsc{Cons}(\texttt{SENT}) = \texttt{SENT}$.