Segundo parcial de Lógica

08 de Julio de 2013

Indicaciones generales

- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **60** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (15 puntos)

Sea $\Sigma = \{0,1\}$ y la siguiente estructura $A = \langle \Sigma^*, R, F, \varepsilon, 11 \rangle$ donde:

- $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$,

  $R = \{(\alpha, \beta) / Cant1\,(\alpha) \geq Cant1\,(\beta)\}$

  La función $Cant1$ cuenta las ocurrencias de símbolos 1 en su argumento. Por ejemplo $Cant1\,(1011) = 3$.

- $$\begin{array}{l} F : \Sigma^* \to \Sigma^* \\ F(\varepsilon) \quad = \varepsilon \\ F(x\alpha) = 1F(\alpha) \end{array}$$

a. Determine el tipo de similaridad de la estructura A. Justifique su respuesta.

b. Defina un lenguaje de primer orden con igualdad L del tipo de similaridad dado en **a.**.

   Incluya la definición del alfabeto (Σ_L), el conjunto de los términos ($\mathtt{TERM}_L$) y el lenguaje en si mismo.

c. Demostrar la siguiente propiedad:

$$(\bar{\forall} t \in \mathtt{TERM}_{C_L}) F(t^A) = t^A$$

   Donde $\mathtt{TERM}_{C_L}$ es el conjunto de los términos cerrados de L sin constantes extendidas.

d. Defina $\varphi \in L$ tal que interpretada en A es:

   El resultado de aplicar F a cualquier elemento de Σ^* tiene al menos la misma cantidad de símbolos 1 que su argumento.

   Justifique su respuesta.

Propuesta de solución

a. En A el universo es Σ^*, R es una relación binaria, F es una función unaria y hay dos constantes distinguidas, por lo tanto el tipo de similaridad de A es $\langle 2; 1; 2\rangle$.

b. **Alfabeto** Σ_L

- Símbolos de constantes: $C = \{c_1, c_2\}$
- Símbolo de función: $Fun = \{f\}$
- Símbolo de relación: $Rel = \{P, ='\}$
- Variables: $Var = \{x_i | i \in \mathbb{N}\}$
- Conectivos: $Con = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg, \perp\}$
- Cuantificadores: $Cuantif = \{\forall, \exists\}$
- Símbolos auxiliares: $Aux = \{(,), ,\}$

$\Sigma_L = C \cup Fun \cup Rel \cup Var \cup Con \cup Cuantif \cup Aux$

Términos $\mathtt{TERM}_L$

i si $i \in \mathbb{N}$, entonces $x_i \in \mathtt{TERM}_L$
ii $c_1 \in \mathtt{TERM}_L$
iii $c_2 \in \mathtt{TERM}_L$
iv Si $t \in \mathtt{TERM}_L$, entonces $f(t) \in \mathtt{TERM}_L$

Lenguaje L

i si $t_1 \in \mathtt{TERM}_L$ y $t_2 \in \mathtt{TERM}_L$, entonces $P(t_1, t_2) \in L$
ii si $t_1 \in \mathtt{TERM}_L$ y $t_2 \in \mathtt{TERM}_L$, entonces $t_1 =' t_2 \in L$
iii $\perp \in L$
iv si $\alpha \in L$ y $\beta \in L, \square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, entonces $(\alpha \square \beta) \in L$
v si $\alpha \in L$, entonces $(\neg\alpha) \in L$
vi si $i \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in L$, entonces $((\forall x_i)\alpha) \in L$
vii si $i \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in L$, entonces $((\exists x_i)\alpha) \in L$

c. Primero se define el conjunto $\mathtt{TERM}_{C_L}$

i $c_1 \in \mathtt{TERM}_{C_L}$
ii $c_2 \in \mathtt{TERM}_{C_L}$
iii Si $t \in \mathtt{TERM}_{C_L}$, entonces $f(t) \in \mathtt{TERM}_{C_L}$

Para demostrar la propiedad planteada se utilizará el PIP para el conjunto $\mathtt{TERM}_{C_L}$.

Identificación de la propiedad: $Q(t) := F(t^A) = t^A$

Paso Base 1

T) $Q(c_1) : F(c_1^A) = c_1^A$

Demo.

$$
\begin{aligned}
& F(c_1^A) \\
&= \text{(def. } A) \\
& F(\varepsilon) \\
&= \text{(def. } F) \\
& \varepsilon \\
&= \text{(def. } A) \\
& c_1^A
\end{aligned}
$$

Paso Base 2

T) $Q(c_2) : F(c_2^A) = c_2^A$

Demo.

$$\begin{array}{l} F(c_2^A) \\ = \text{(def. } A\text{)} \\ F(11) \\ = \text{(def. } F\text{)} \\ 1F(1) \\ = \text{(def. } F\text{)} \\ 11F(\varepsilon) \\ = \text{(def. } F\text{)} \\ 11 \\ = \text{(def. } A\text{)} \\ c_2^A \end{array}$$

Paso Inductivo

HI) $Q(t) : F(t^A) = t^A$

TI) $Q(f(t)) : F(f(t)^A) = f(t)^A$

Demo.

$$\begin{array}{l} F(f(t)^A) \\ = \text{(def. } A\text{)} \\ F(F(t^A)) \\ = \text{(HI)} \\ F(t^A) \\ = \text{(def. } A\text{)} \\ f(t)^A \end{array}$$

Por lo demostrado en los Pasos Bases y el Paso Inductivo, aplicando el PIP para el conjunto $\mathtt{TERM}_{C_L}$ queda demostrado que

$$(\bar{\forall} t \in \mathtt{TERM}_{C_L}) F(t^A) = t^A$$

.

d. $\varphi := (\forall x_1) P(f(x_1), x_1)$

$$\begin{array}{l} A \models \varphi \\ \Leftrightarrow \text{(def. } \varphi\text{)} \\ A \models (\forall x_1) P(f(x_1), x_1) \\ \Leftrightarrow \text{(2.4.5)} \\ (\bar{\forall} w \in \Sigma^*) A \models P(f(\overline{w}), \overline{w}) \\ \Leftrightarrow \text{(def. } \models \text{ y def. } A\text{)} \\ (\bar{\forall} w \in \Sigma^*) \langle F(w), w \rangle \in R \\ \Leftrightarrow \text{(def. } R\text{)} \\ (\bar{\forall} w \in \Sigma^*) Cant1(F(w)) \geq Cant1(w) \end{array}$$

Por lo tanto, $A \models \varphi$ si y sólo si, *el resultado de aplicar F a cualquier elemento de Σ^* tiene al menos la misma cantidad de símbolos 1 que su argumento*, que era lo que se quería probar.

Ejercicio 2 (15 puntos)

Considere un lenguaje de primer orden del tipo $\langle 1; 1; 0 \rangle$ y las siguentes fórmulas

- $\varphi_1 := P(f(x)) \land (\exists y)\neg P(y)$.
- $\varphi_2 := (\exists x)(\forall y)x =' y \to (\forall x)x =' f(x)$.

a. Para cada caso propocione una estructura M_i en caso que exista. Justifique su respuesta.
   - I. $M_1 \models \varphi_1$.
   - II. $M_2 \models \varphi_2$.
   - III. $M_3 \not\models \varphi_2$.

b. Demuestre o refute las siguientes afirmaciones.
   - I. $\models (\forall x)(P(f(x) \land (\exists y)\neg P(y)) \lor ((\exists x)(\forall y)x =' y \to (\forall x)x =' f(x))$.
   - II. $\bar{\exists}\psi \in$ SENT tal que ψ no es subfórmula de φ_1, φ_1 no es subfórmula de ψ y $\psi \models \varphi_1$.

Propuesta de solución

a. I. Sea $M_1 = \langle \{\circ, \bullet\}, \{\circ\}, \{(\circ,\circ), (\bullet,\circ)\}\rangle$. Probaremos que $M_1 \models \varphi_1$:

$$
\begin{array}{l}
\mathcal{M}_1 \models \varphi_1 \\
\Leftrightarrow \text{(def. } \varphi_1) \\
\mathcal{M}_1 \models P(f(x)) \land (\exists y)\neg P(y) \\
\Leftrightarrow \text{(clausura)} \\
\mathcal{M}_1 \models (\forall x)(P(f(x)) \land (\exists y)\neg P(y)) \\
\Leftrightarrow (2.4.5) \\
(\bar{\forall} a \in \{\circ, \bullet\})(\mathcal{M}_1 \models P(f(\overline{a})) \land (\exists y)\neg P(y)) \\
\Leftrightarrow (2.4.5) \\
(\bar{\forall} a \in \{\circ, \bullet\})(\mathcal{M}_1 \models P(f(\overline{a})) \text{ y } (\bar{\exists} b \in \{\circ, \bullet\})\ \mathcal{M}_1 \not\models P(\overline{b})) \\
\Leftrightarrow \text{(def. } M_1) \\
(\bar{\forall} a \in \{\circ, \bullet\})(F(a) \in \{\circ\} \text{ y } (\bar{\exists} b \in \{\circ, \bullet\})\ b \notin \{\circ\})
\end{array}
$$

Sea $a \in \{\circ, \bullet\}$ cualquiera. Como $F(a) = \circ$, entonces $F(a) \in \{\circ\}$. Además, basta tomar $b = \bullet$ como testigo de la segunda parte de la conjunción para ver que $\bullet \notin \{\circ\}$. Por lo tanto, $M_1 \models \varphi_1$.

II. La siguiente derivación muestra que φ_2 es un teorema:

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      [(\exists x)(\forall y)x =' y]^1
      \qquad
      \dfrac{
        \dfrac{
          \dfrac{\dfrac{[(\forall y)x =' y]^2}{x =' z}\,E\forall^{*5}}{z =' x}\,RI2
          \qquad
          \dfrac{[(\forall y)x =' y]^2}{x =' f(z)}\,E\forall^{*6}
        }{z =' f(z)}\,RI3
      }{(\forall z)z =' f(z)}\,I\forall^{*4}
    }{(\forall z)z =' f(z)}\,E\exists^{*3}_{(2)}
  }{
    \dfrac{x =' f(x)}{(\forall x)x =' f(x)}\,I\forall^{*1}
  }\,E\forall^{*2}
}{(\exists x)(\forall y)x =' y \to (\forall x)x =' f(x)}\,I\to_{(1)}
$$

***1)** $x \notin FV((\exists x)(\forall y)x =' y)$.
***2)** x libre para z en $z =' f(z)$.
***3)** $x \notin FV((\forall z)z =' f(z))$.

***4)** $z \notin FV((\forall y)x =' y)$.
***5)** z libre para y en $x =' y$.
***6)** $f(z)$ libre para y en $x =' y$.

Por lo tanto, tomando $M_2 = M_1$, la estructura dada en la parte anterior, $M_2 \models \varphi_2$, ya que φ_2 debe ser verdad lógica por el teorema de completitud.

III. No es posible dar M_3 que no modele φ_2, ya que como se probó en la parte anterior, φ_2 es una verdad lógica.

b. I. Por la parte aII sabemos que $(\bar{\exists} D \in \texttt{DER})(H(D) = \emptyset$ y $C(D) = \varphi_2)$. Aplicando la regla de la introducción de la disyunción, probamos que:

$$(\bar{\exists} D \in \texttt{DER})(H(D) = \emptyset \text{ y } C(D) = (\forall x)\varphi_1 \vee \varphi_2)$$

Por lo tanto, la fórmula es un teorema y por completitud, una verdad lógica.

II. Podemos tomar $\psi = \bot$:

1) La única subfórmula de $\bot$ es $\bot$ por lo que ψ no es subfóormula de $\bot$.
2) Siguiendo la definición de subfórmula y dado que $\bot \neq \psi$, para que $\bot$ sea subfórmula de ψ entonces debe serlo de $P(f(x))$ o de $(\exists y)\neg P(y)$. Dado que $\bot \neq P(f(x))$, $\bot$ no es subfórmula de $P(f(x))$. Dado que $\bot \neq (\exists y)\neg P(y)$, $\bot \neq \neg P(y)$ y $\bot \neq P(y)$, $\bot$ no es subfórmula de $(\exists y)\neg P(y)$. En definitiva, $\bot$ no es subfórmula de ψ.
3) Dado que $(\bar{\forall} \alpha)\ \bot \models \alpha$, en particular se cumple $\bot \models \varphi_1$.

Ejercicio 3 (15 puntos)

Considere $\Gamma = \{(\forall x)P(f(x)), (\forall x)(\neg x =' c_0 \to \neg P(x))\}$.

a. Construya una derivación que demuestre que $\Gamma \vdash (\forall x)f(x) =' c_0$
b. Construya una derivación que demuestre que $(\forall x)f(x) =' c_0 \vdash \neg(\exists x)(\exists y)(\neg f(x) =' f(y))$
c. Demuestre que $\Gamma \vdash \neg(\exists x)(\exists y)(\neg f(x) =' f(y))$

Nota: En ningún caso son aceptables justificaciones basadas en consideraciones semánticas.

Propuesta de solución

a.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x)(\neg x =' c_0 \to \neg P(x))}{\neg f(x) =' c_0 \to \neg P(f(x))}\,E\forall(*2) \qquad [\neg f(x) =' c_0]^1}{\neg P(f(x))}\,E\to \qquad \dfrac{(\forall x)P(f(x))}{P(f(x))}\,E\forall(*1)}{\bot}\,E\neg}{f(x) =' c_0}\,RAA^1}{(\forall x)f(x) =' c_0}\,I\forall(*3)$$

(*1) x libre para x en $P(f(x))$

(*2) $f(x)$ libre para x en $(\neg x =' c_0 \to \neg P(x))$

(*3) $x \notin \mathrm{FV}(\{(\forall x)P(f(x)), (\forall x)(\neg x =' c_0 \to \neg P(x))\})$

b.

$$\dfrac{\dfrac{[(\exists x)((\exists y)(\neg f(x) =' f(y)))]^1 \qquad \dfrac{[(\exists y)(\neg f(x) =' f(y))]^2 \qquad \dfrac{[\neg f(x) =' f(y)]^3 \qquad \dfrac{\dfrac{(\forall x)f(x) =' c_0}{f(x) =' c_0}\,E\forall(*2) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x)f(x) =' c_0}{f(y) =' c_0}\,E\forall(*1)}{c_0 =' f(y)}\,RI2}{}}{f(x) =' f(y)}\,RI3}{\bot}\,E\neg}{\bot}\,E\exists^3(*3)}{\bot}\,E\exists^2(*4)}{\neg((\exists x)((\exists y)(\neg f(x) =' f(y))))}\,I\neg^1$$

(*1) y libre para x en $f(x) =' c_0$

(*2) x libre para x en $f(x) =' c_0$

(*3) $y \notin \mathrm{FV}(\{(\forall x)f(x) =' c_0, \bot\})$

(*4) $x \notin \mathrm{FV}(\{(\forall x)f(x) =' c_0, \bot\})$

c. Por la parte a sabemos:

$$(\bar{\exists} D_a \in \mathtt{DER})(H(D_a) \subseteq \Gamma \text{ y } C(D_a) = (\forall x)f(x) =' c_0$$

Por la parte b sabemos:

$$(\bar{\exists} D_b \in \mathtt{DER})(H(D_b) \subseteq \{(\forall x)f(x) =' c_0\} \text{ y } C(D_b) = \neg(\exists x)(\exists y)\neg f(x) =' f(y)$$

Construimos una derivación de lo pedido utilizando D_a y D_b de la siguiente forma:

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ \bigtriangledown D_a \\ (\forall x)f(x) =' c_0 \\ \bigtriangledown D_b \\ \neg(\exists x)(\exists y)\neg f(x) =' f(y) \end{array}$$

Ejercicio 4 (15 puntos)

Considere el tipo de similaridad $\langle 2; 1; 0\rangle$, el lenguaje $\mathcal{L}$ de primer orden correspondiente, y las sentencias $\varphi = (\exists x)(\exists y)(P(x, y) \to P(f(x), f(y)))$ y $\psi = (\forall x)(\forall y)\neg P(f(x), f(y))$ de ese lenguaje. Diga si las siguientes afirmaciones son ciertas. En cada caso justifique su respuesta.

a. $\{\varphi\}$ es consistente

b. $\{\varphi, \psi\}$ es consistente

c. $Th\,(Mod\,(\{\varphi, \psi\})) \subseteq Th\,(Mod\,(\{\varphi\}))$

Propuesta de solución

a. **Verdadero.**

Sea $\mathcal{M} = \langle \{\circ, \bullet\}, \emptyset, id \rangle$. Probaremos que esta estructura modela φ:

$\mathcal{M} \models \varphi$
$\Leftrightarrow$ (def. φ)
$\mathcal{M} \models (\exists x)(\exists y)(P(x,y) \to P(f(x), f(y)))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$(\bar{\exists} a \in \{\circ, \bullet\})(\bar{\exists} b \in \{\circ, \bullet\})(\mathcal{M} \models P(\bar{a}, \bar{b}) \Rightarrow \mathcal{M} \models P(f(\bar{a}), f(\bar{b})))$
$\Leftrightarrow$ (def. $\mathcal{M}$)
$(\bar{\exists} a \in \{\circ, \bullet\})(\bar{\exists} b \in \{\circ, \bullet\})((a,b) \in \emptyset \Rightarrow (a,b) \in \emptyset)$
(lo que se cumple trivialmente tomando cualesquier testigos a y b)

b. **Verdadero.**

Probaremos que la misma $\mathcal{M}$ de la parte anterior satisface ψ:

$\mathcal{M} \models \psi$
$\Leftrightarrow$ (def. ψ)
$\mathcal{M} \models (\forall x)(\forall y)\neg P(f(x), f(y))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$(\bar{\forall} a \in \{\circ, \bullet\})(\bar{\forall} b \in \{\circ, \bullet\})\ \mathcal{M} \not\models P(f(\bar{a}), f(\bar{b}))$
$\Leftrightarrow$ (def. $\mathcal{M}$)
$(\bar{\forall} a \in \{\circ, \bullet\})(\bar{\forall} b \in \{\circ, \bullet\})\ (a,b) \notin \emptyset$
(lo que trivialmente se cumple para cualquier a y b)

Por lo tanto $\mathcal{M} \models \{\varphi, \psi\}$.

c. **Falso.**

Por propiedad del curso (práctico 9, ejercicio 6c) $Th(Mod(\Gamma)) = \textsc{Cons}(\Gamma)$. Para probar que la afirmación es falsa, debemos encontrar una fórmula $\alpha \in \textsc{Cons}(\{\varphi, \psi\})$ que no esté en $\textsc{Cons}(\varphi)$.

Sea $\alpha = \psi$. Claramente $\psi \in \textsc{Cons}(\{\varphi, \psi\})$, ya que la derivación trivial prueba que $\{\varphi, \psi\} \vdash \psi$.

Por otra parte, $\psi \notin \textsc{Cons}(\varphi)$, ya la estructura $\mathcal{M}' = \langle \{\circ, \bullet\}, \{(\circ, \circ)\}, id \rangle$ modela a φ pero no a ψ:

$\mathcal{M}' \models \varphi$
$\Leftrightarrow$ (def. φ)
$\mathcal{M}' \models (\exists x)(\exists y)(P(x,y) \to P(f(x), f(y)))$
$\Leftrightarrow$ (análogo al desarrollo parte a)
$(\bar{\exists} a \in \{\circ, \bullet\})(\bar{\exists} b \in \{\circ, \bullet\})((a,b) \in \{(\circ, \circ)\} \Rightarrow (a,b) \in \{(\circ, \circ)\})$
(lo que se cumple tomando $a = b = \bullet$, ya que el antecedente del implica es falso)

$\mathcal{M}' \not\models \psi$
$\Leftrightarrow$ (def. φ)
$\mathcal{M}' \not\models (\forall x)(\forall y)\neg P(f(x), f(y))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$(\bar{\exists} a \in \{\circ, \bullet\})(\bar{\exists} b \in \{\circ, \bullet\})\ \mathcal{M}' \not\models \neg P(f(\bar{a}), f(\bar{b}))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$(\bar{\exists} a \in \{\circ, \bullet\})(\bar{\exists} b \in \{\circ, \bullet\})\ \mathcal{M}' \models P(f(\bar{a}), f(\bar{b}))$
$\Leftrightarrow$ (def. $\mathcal{M}$')
$(\bar{\exists} a \in \{\circ, \bullet\})(\bar{\exists} b \in \{\circ, \bullet\})\ (a,b) \in \{(\circ, \circ)\}$
(lo que se cumple tomando $a = b = \circ$)

Finalmente:

$$\begin{array}{l}
\mathcal{M}' \models \varphi \text{ y } \mathcal{M}' \not\models \psi \\
\Rightarrow \text{(def. } \models\text{)} \\
\varphi \not\models \psi \\
\Rightarrow \text{(corrección)} \\
\varphi \nvdash \psi \\
\Rightarrow \text{(def } \textsc{Cons}\text{)} \\
\psi \notin \textsc{Cons}(\varphi)
\end{array}$$

que es lo que había que probar.