Segundo parcial de Lógica

2 de julio 2012

Indicaciones generales

- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **60** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (15 puntos)

Sea un lenguaje de primer orden de tipo de similaridad $\langle -; 1, 2; 1\rangle$, con símbolos de función f_1, f_2 y símbolo de constante c_1.

Sea $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, \mathsf{S}, +, 0\rangle$ la estructura de los naturales con las funciones de sucesor y suma, y el cero.

a. Defina inductivamente el lenguaje $\mathtt{TERM}_C$ de los términos cerrados adecuados.
b. Demuestre por inducción que $(\bar{\forall} t \in \mathtt{TERM}_C)(\bar{\exists} u \in \mathtt{TERM}_C)\mathcal{N} \models t =' f_1(u) \lor t =' c_1$

Propuesta de Solución

a. I. $c_1 \in \mathtt{TERM}_C$
   II. Si $t \in \mathtt{TERM}_C$ entonces $f_1(t) \in \mathtt{TERM}_C$
   III. Si $t_1 \in \mathtt{TERM}_C$ y $t_2 \in \mathtt{TERM}_C$ entonces $f_2(t_1, t_2) \in \mathtt{TERM}_C$
b. Se demuestra por inducción en $\mathtt{TERM}_C$, utilizando la siguiente propiedad:

$$P(t) := (\bar{\exists} u \in \mathtt{TERM}_C)\mathcal{N} \models t =' f_1(u) \lor t =' c_1$$

Paso base

T) $P(c_1) : (\bar{\exists} u \in \mathtt{TERM}_C)\mathcal{N} \models c_1 =' f_1(u) \lor c_1 =' c_1$

Demo.

$(\bar{\exists} u \in \mathtt{TERM}_C)\mathcal{N} \models c_1 =' f_1(u) \lor c_1 =' c_1$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$(\bar{\exists} u \in \mathtt{TERM}_C)({c_1}^{\mathcal{N}} = f_1(u)^{\mathcal{N}}$ o ${c_1}^{\mathcal{N}} = {c_1}^{\mathcal{N}})$
$\Leftarrow$ (tomamos cualquier testigo, por ejemplo c_1)
${c_1}^{\mathcal{N}} = f_1(c_1)^{\mathcal{N}}$ o ${c_1}^{\mathcal{N}} = {c_1}^{\mathcal{N}}$
$\Leftarrow$ (se cumple la parte derecha de la disyunción)
${c_1}^{\mathcal{N}} = {c_1}^{\mathcal{N}}$

Paso inductivo 1

HI) $P(t) : (\bar{\exists} u \in \mathtt{TERM}_C)\mathcal{N} \models t =' f_1(u) \vee t =' c_1$

TI) $P(f_1(t)) : (\bar{\exists} u \in \mathtt{TERM}_C)\mathcal{N} \models f_1(t) =' f_1(u) \vee f_1(t) =' c_1$

Demo.

$$
\begin{aligned}
&(\bar{\exists} u \in \mathtt{TERM}_C)\mathcal{N} \models f_1(t) =' f_1(u) \vee f_1(t) =' c_1 \\
&\Leftrightarrow \text{(2.4.5)} \\
&(\bar{\exists} u \in \mathtt{TERM}_C)(f_1(t)^{\mathcal{N}} = f_1(u)^{\mathcal{N}} \text{ o } f_1(t)^{\mathcal{N}} = c_1{}^{\mathcal{N}}) \\
&\Leftarrow \text{(tomamos } t \text{ como testigo)} \\
&f_1(t)^{\mathcal{N}} = f_1(t)^{\mathcal{N}} \text{ o } f_1(t)^{\mathcal{N}} = c_1{}^{\mathcal{N}} \\
&\Leftarrow \text{(se cumple la parte izquierda de la disyunción)} \\
&f_1(t)^{\mathcal{N}} = f_1(t)^{\mathcal{N}}
\end{aligned}
$$

Paso inductivo 2

HI1) $P(t_1) : (\bar{\exists} u \in \mathtt{TERM}_C)\mathcal{N} \models t_1 =' f_1(u) \vee t_1 =' c_1$

HI2) $P(t_2) : (\bar{\exists} u \in \mathtt{TERM}_C)\mathcal{N} \models t_2 =' f_1(u) \vee t_2 =' c_1$

TI) $P(f_2(t_1, t_2)) : (\bar{\exists} u \in \mathtt{TERM}_C)\mathcal{N} \models f_2(t_1, t_2) =' f_1(u) \vee f_2(t_1, t_2) =' c_1$

Demo.

$$
\begin{aligned}
&(\bar{\exists} u \in \mathtt{TERM}_C)\mathcal{N} \models f_2(t_1, t_2) =' f_1(u) \vee f_2(t_1, t_2) =' c_1 \\
&\Leftrightarrow \text{(2.4.5)} \\
&(\bar{\exists} u \in \mathtt{TERM}_C)(f_2(t_1, t_2)^{\mathcal{N}} = f_1(u)^{\mathcal{N}} \text{ o } f_2(t_1, t_2)^{\mathcal{N}} = c_1{}^{\mathcal{N}}) \\
&\Leftrightarrow \text{(def. } \mathcal{N}\text{)} \\
&(\bar{\exists} u \in \mathtt{TERM}_C)(t_1{}^{\mathcal{N}} + t_2{}^{\mathcal{N}} = f_1(u)^{\mathcal{N}} \text{ o } t_1{}^{\mathcal{N}} + t_2{}^{\mathcal{N}} = c_1{}^{\mathcal{N}}) \quad (1)
\end{aligned}
$$

$t_1^{\mathcal{N}}$ es un natural, y por lo tanto hay 2 casos: o bien $t_1^{\mathcal{N}} = 0$, o bien $t_1^{\mathcal{N}} \neq 0$

Si $t_1^{\mathcal{N}} = 0$, continuando en (1) tenemos:

$$
\begin{aligned}
&(\bar{\exists} u \in \mathtt{TERM}_C)(t_1{}^{\mathcal{N}} + t_2{}^{\mathcal{N}} = f_1(u)^{\mathcal{N}} \text{ o } t_1{}^{\mathcal{N}} + t_2{}^{\mathcal{N}} = c_1{}^{\mathcal{N}}) \\
&\Leftrightarrow (t_1{}^{\mathcal{N}} = 0) \\
&(\bar{\exists} u \in \mathtt{TERM}_C)(t_2{}^{\mathcal{N}} = f_1(u)^{\mathcal{N}} \text{ o } t_2{}^{\mathcal{N}} = c_1{}^{\mathcal{N}}) \\
&\text{(que se cumple, ya que es es HI2)}
\end{aligned}
$$

Si $t_1^{\mathcal{N}} \neq 0$, por HI1 sabemos que:

$$
\begin{aligned}
&(\bar{\exists} u \in \mathtt{TERM}_C)\mathcal{N} \models t_1 =' f_1(u) \vee t_1 =' c_1 \\
&\Rightarrow \text{(2.4.5)} \\
&(\bar{\exists} u \in \mathtt{TERM}_C)(t_1{}^{\mathcal{N}} = f_1(u)^{\mathcal{N}} \text{ o } t_1{}^{\mathcal{N}} = c_1{}^{\mathcal{N}}) \\
&\Rightarrow \text{(def. } \mathcal{N}\text{)} \\
&(\bar{\exists} u \in \mathtt{TERM}_C)(t_1{}^{\mathcal{N}} = f_1(u)^{\mathcal{N}} \text{ o } t_1{}^{\mathcal{N}} = 0) \\
&\Rightarrow (t_1^{\mathcal{N}} \neq 0) \\
&(\bar{\exists} u \in \mathtt{TERM}_C)t_1^{\mathcal{N}} = f_1(u)^{\mathcal{N}}
\end{aligned}
$$

Llamemos u_1 a este término que sabemos que existe y que cumple:

$$t_1{}^{\mathcal{N}} = f_1(u_1)^{\mathcal{N}}$$

Continuando en (1), tenemos:

$(\bar{\exists} u \in \texttt{TERM}_C)({t_1}^{\mathcal{N}} + {t_2}^{\mathcal{N}} = f_1(u)^{\mathcal{N}} \text{ o } {t_1}^{\mathcal{N}} + {t_2}^{\mathcal{N}} = {c_1}^{\mathcal{N}})$

$\Leftrightarrow$ $({t_1}^{\mathcal{N}} = f_1(u_1)^{\mathcal{N}})$

$(\bar{\exists} u \in \texttt{TERM}_C)(f_1(u_1)^{\mathcal{N}} + {t_2}^{\mathcal{N}} = f_1(u)^{\mathcal{N}} \text{ o } {t_1}^{\mathcal{N}} + {t_2}^{\mathcal{N}} = {c_1}^{\mathcal{N}})$

$\Leftrightarrow$ (propiedad del existe en el metalenguaje)

$(\bar{\exists} u \in \texttt{TERM}_C)f_1(u_1)^{\mathcal{N}} + {t_2}^{\mathcal{N}} = f_1(u)^{\mathcal{N}} \text{ o } (\bar{\exists} u \in \texttt{TERM}_C)t_1^{\mathcal{N}} + {t_2}^{\mathcal{N}} = {c_1}^{\mathcal{N}}$

$\Leftarrow$ (se cumple la parte izquierda de la disyunción)

$(\bar{\exists} u \in \texttt{TERM}_C)f_1(u_1)^{\mathcal{N}} + {t_2}^{\mathcal{N}} = f_1(u)^{\mathcal{N}}$

$\Leftrightarrow$ (def. $\mathcal{N}$)

$(\bar{\exists} u \in \texttt{TERM}_C)({u_1}^{\mathcal{N}} + 1) + {t_2}^{\mathcal{N}} = f_1(u)^{\mathcal{N}}$

$\Leftrightarrow$ (conmutativa)

$(\bar{\exists} u \in \texttt{TERM}_C)({u_1}^{\mathcal{N}} + {t_2}^{\mathcal{N}}) + 1 = f_1(u)^{\mathcal{N}}$

$\Leftrightarrow$ (def. $\mathcal{N}$)

$(\bar{\exists} u \in \texttt{TERM}_C)f_1(f_2(u_1, t_2))^{\mathcal{N}} = f_1(u)^{\mathcal{N}}$

$\Leftarrow$ (tomamos $f_2(u_1, t_2)$ como testigo)

$f_1(f_2(u_1, t_2))^{\mathcal{N}} = f_1(f_2(u_1, t_2))^{\mathcal{N}}$

(que se cumple por reflexiva)

Por el principio de inducción primitiva para $\texttt{TERM}_C$ concluimos que:

$$(\bar{\forall} t \in \texttt{TERM}_C)(\bar{\exists} u \in \texttt{TERM}_C)\mathcal{N} \models t =' f_1(u) \vee t =' c_1$$

Ejercicio 2 (15 puntos)

Sea un lenguaje de primer orden de tipo de similaridad $\langle 1, 1, 2; 1; 0\rangle$, con símbolos de relación P_1, P_2, P_3 y símbolo de función f_1.

a. Sea $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, \mathsf{Par}, \mathsf{Impar}, \leq, F\rangle$ la estructura de los naturales con las relaciones "ser par", "ser impar", "menor o igual".

   Proporcione sentencias φ_1 y φ_2 que formalicen las siguientes nociones:

   I. F es decreciente.
   II. F aplicada a impares devuelve pares, y recíprocamente, aplicada a pares devuelve impares.

   Demuestre que las interpretaciones de φ_1 y φ_2 en $\mathcal{N}$ se corresponden con las nociones anteriores.

b. Muestre que $\mathcal{N} \not\models \varphi_1 \wedge \varphi_2$, siendo $\mathcal{N}$ la misma estructura de la parte anterior.

c. Encuentre una estructura $\mathcal{M}_1$ tal que $\mathcal{M}_1 \models \varphi_1$ y $\mathcal{M}_1 \models \varphi_2$.

Propuesta de Solución

a. I. $\varphi_1 = (\forall x)(\forall y)(P_3(x, y) \to P_3(f_1(y), f_1(x)))$

$\mathcal{N} \models \varphi_1$
$\Leftrightarrow$ (def. φ_1)
$\mathcal{N} \models (\forall x)(\forall y)(P_3(x,y) \to P_3(f_1(y), f_1(x)))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$(\bar{\forall} a \in \mathbb{N})(\bar{\forall} b \in \mathbb{N})\ \mathcal{N} \models P_3(\overline{a}, \overline{b}) \to P_3(f_1(\overline{b}), f_1(\overline{a}))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$(\bar{\forall} a \in \mathbb{N})(\bar{\forall} b \in \mathbb{N})(\mathcal{N} \models P_3(\overline{a}, \overline{b}) \Rightarrow \mathcal{N} \models P_3(f_1(\overline{b}), f_1(\overline{a})))$
$\Leftrightarrow$ (def. $\mathcal{N}$)
$(\bar{\forall} a \in \mathbb{N})(\bar{\forall} b \in \mathbb{N})(a \leq b \Rightarrow f_1(\overline{b})^{\mathcal{N}} \leq f_1(\overline{a})^{\mathcal{N}})$
$\Leftrightarrow$ (def. $\mathcal{N}$)
$(\bar{\forall} a \in \mathbb{N})(\bar{\forall} b \in \mathbb{N})(a \leq b \Rightarrow F(b) \leq F(a))$
(que es la definición de que F es decreciente)

II. $\varphi_2 = (\forall x)((P_1(x) \to P_2(f_1(x))) \wedge (P_2(x) \to P_1(f_1(x))))$
$\mathcal{N} \models \varphi_2$
$\Leftrightarrow$ (def. φ_2)
$\mathcal{N} \models (\forall x)((P_1(x) \to P_2(f_1(x))) \wedge (P_2(x) \to P_1(f_1(x))))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$(\bar{\forall} a \in \mathbb{N})\mathcal{N} \models ((P_1(\overline{a}) \to P_2(f_1(\overline{a}))) \wedge (P_2(\overline{a}) \to P_1(f_1(\overline{a}))))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$(\bar{\forall} a \in \mathbb{N})(\mathcal{N} \models (P_1(\overline{a}) \to P_2(f_1(\overline{a})))$ y $\mathcal{N} \models (P_2(\overline{a}) \to P_1(f_1(\overline{a}))))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$(\bar{\forall} a \in \mathbb{N})(\mathcal{N} \models P_1(\overline{a}) \Rightarrow \mathcal{N} \models P_2(f_1(\overline{a}))$ y $\mathcal{N} \models P_2(\overline{a}) \Rightarrow \mathcal{N} \models P_1(f_1(\overline{a})))$
$\Leftrightarrow$ (def. $\mathcal{N}$)
$(\bar{\forall} a \in \mathbb{N})(\mathsf{Par}(a) \Rightarrow \mathsf{Impar}(F(a))$ y $\mathsf{Impar}(a) \Rightarrow \mathsf{Par}(F(a)))$
(lo que significa que F aplicada a pares devuelve impares y aplicada a impares devuelve pares)

b. Supongamos que $\mathcal{N} \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$ y llegaremos a un absurdo.

Por lo visto en las partes anteriores, esto pasa si y solo si la función F es decreciente y convierte pares en impares y viceversa.

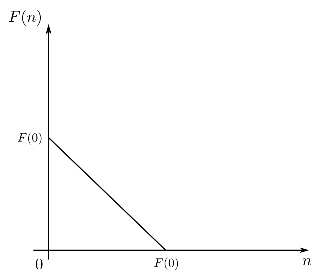
Esto implica que F debe ser estrictamente decreciente: si tomamos un n arbitrario, si es par, $F(n)$ es impar y $F(n+1)$ es par; pero si n es impar, $F(n)$ es par y $F(n+1)$ es impar. Por lo tanto $F(n) \neq F(n+1)$, y como F es decreciente, se debe cumplir:

$$F(n+1) < F(n) \tag{1}$$

y por aritmética:

$$F(n+1) + 1 \leq F(n) \tag{2}$$

Intuitivamente podemos ver que funciones estrictamente decrecientes de naturales en naturales no puede haber. Dado un valor para $F(n)$, $F(n+1)$ puede ser a lo sumo $F(n) - 1$. Gráficamente, la función F tiene que quedar por debajo de la línea $F(0) - n$:



En otras palabras, deberíamos poder probar que para todo n, $F(n) \leq F(0) - n$. Lo haremos usando el PIP en $\mathbb{N}$ con la siguiente propiedad:

$$P(n) := F(n) \leq F(0) - n$$

Paso base

T) $P(0) : F(0) \leq F(0) - 0$

Demo.

Trivial por aritmética.

Paso inductivo

HI) $F(n) \leq F(0) - n$

TI) $F(n+1) \leq F(0) - (n+1)$

Demo.

$$F(n) \leq F(0) - n$$
$$\Rightarrow \text{ (}F(n+1)+1 \leq F(n) \text{ (2))}$$
$$F(n+1)+1 \leq F(0) - n$$
$$\Rightarrow \text{ (aritmética)}$$
$$F(n+1) \leq F(0) - (n+1)$$

Por lo que estamos en las hipótesis del PIP sobre $\mathbb{N}$ y lo podemos aplicar para probar la propiedad para cualquier n. En particular si analizamos qué pasa para $n = F(0)$:

$$F(F(0)) \leq F(0) - F(0)$$
$$\Leftrightarrow \text{ (aritmética)}$$
$$F(F(0)) \leq 0$$
$$\Rightarrow \text{ (}F(n+1) < F(n) \text{ (1))}$$
$$F(F(0)+1) < 0$$

Lo que es absurdo, ya que $F(F(0)+1)$ debe ser un natural. Por lo tanto:

$$\mathcal{N} \not\models \varphi_1 \land \varphi_2$$

c. Sea $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, \emptyset, \emptyset, \emptyset, id \rangle$.

Por un lado:

$$\mathcal{M} \models \varphi_1$$
$$\Leftrightarrow \text{ (def. } \varphi_1\text{)}$$
$$\mathcal{M} \models (\forall x)(\forall y)(P_3(x,y) \to P_3(f_1(y), f_1(x)))$$
$$\Leftrightarrow \text{ (2.4.5)}$$
$$(\bar{\forall} a \in \mathbb{N})(\bar{\forall} b \in \mathbb{N})(\mathcal{M} \models P_3(\overline{a}, \overline{b}) \Rightarrow \mathcal{M} \models P_3(f_1(\overline{b}), f_1(\overline{a})))$$
$$\Leftrightarrow \text{ (def. } \mathcal{M}\text{)}$$
$$(\bar{\forall} a \in \mathbb{N})(\bar{\forall} b \in \mathbb{N})((a,b) \in \emptyset \Rightarrow \mathcal{M} \models P_3(f_1(\overline{b}), f_1(\overline{a})))$$

(lo que se cumple, ya que el antecedente del implica es falso)

Por otra parte:

$$\mathcal{M} \models \varphi_2$$
$$\Leftrightarrow \text{ (def. } \varphi_2\text{)}$$
$$\mathcal{M} \models (\forall x)((P_1(x) \to P_2(f_1(x))) \land (P_2(x) \to P_1(f_1(x))))$$
$$\Leftrightarrow \text{ (2.4.5)}$$
$$(\bar{\forall} a \in \mathbb{N})(\mathcal{M} \models P_1(\overline{a}) \Rightarrow \mathcal{M} \models P_2(f_1(\overline{a})) \text{ y } \mathcal{M} \models P_2(\overline{a}) \Rightarrow \mathcal{M} \models P_1(f_1(\overline{a})))$$
$$\Leftrightarrow \text{ (def. } \mathcal{M}\text{)}$$
$$(\bar{\forall} a \in \mathbb{N})((a \in \emptyset \Rightarrow F(a) \in \emptyset) \text{ y } (a \in \emptyset \Rightarrow F(a) \in \emptyset))$$

(y ambas partes de la conjunción se cumplen, ya que el antecedente de cada parte es falso)

Juntando ambas cosas y aplicando 2.4.5 vemos que $\mathcal{M} \models \varphi_1 \land \varphi_2$.

Ejercicio 3 (15 puntos)

Construya derivaciones que justifiquen los siguientes juicios:

a. $\vdash \quad ((\forall y)f(y) =' g(y) \wedge (\exists x)f(x) =' c_0) \to (\exists x)c_0 =' g(x)$

b. $\vdash \quad (\forall z)((P(z) \vee Q(z)) \to z =' c_0) \to ((\forall x)(P(x) \to x =' c_0) \wedge (\forall y)(Q(y) \to y =' c_0))$

En ningún caso son aceptables justificaciones basadas en consideraciones semánticas. (Se sugiere utilizar la hoja horizontalmente)

Propuesta de Solución

a.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(\forall y)f(y) =' g(y) \wedge (\exists x)f(x) =' c_0]^1}{(\exists x)f(x) =' c_0}\,E_\wedge \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[f(x) =' c_0]^2}{c_0 =' f(x)}\,RI_2 \qquad \dfrac{\dfrac{[(\forall y)f(y) =' g(y) \wedge (\exists x)f(x) =' c_0]^1}{(\forall y)f(y) =' g(y)}\,E_\wedge}{f(x) =' g(x)}\,E_\forall(*3)}{c_0 =' g(x)}\,RI_3}{(\exists x)c_0 =' g(x)}\,I_\exists(*2)}{(\exists x)c_0 =' g(x)}\,E_\exists(2)(*1)}{(\forall y)f(y) =' g(y) \wedge (\exists x)f(x) =' c_0 \to (\exists x)c_0 =' g(x)}\,I_\to(1)$$

(*1) $x \notin FV((\forall y)f(y) =' g(y) \wedge (\exists x)f(x) =' c_0, (\exists x)c_0 =' g(x))$

(*2) x libre para x en $c_0 =' g(x)$

(*3) x libre para y en $f(y) =' g(y)$

b.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(\forall z)(P(z) \vee Q(z) \to z =' c_0)]^1}{P(x) \vee Q(x) \to x =' c_0}\,E\forall(*4) \qquad \dfrac{[P(x)]^2}{P(x) \vee Q(x)}\,I\vee}{x =' c_0}\,E\to}{P(x) \to x =' c_0}\,I\to(2)}{(\forall x)(P(x) \to x =' c_0)}\,I\forall(*1) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(\forall z)(P(z) \vee Q(z) \to z =' c_0)]^1}{P(y) \vee Q(y) \to y =' c_0}\,E\forall(*3) \qquad \dfrac{[Q(y)]^3}{P(y) \vee Q(y)}\,I\vee}{y =' c_0}\,E\to}{Q(y) \to y =' c_0}\,I\to(3)}{(\forall y)(Q(y) \to y =' c_0)}\,I\forall(*2)}{(\forall x)(P(x) \to x =' c_0) \wedge (\forall y)(Q(y) \to y =' c_0)}\,I\wedge}{(\forall z)(P(z) \vee Q(z) \to z =' c_0) \to (\forall x)(P(x) \to x =' c_0) \wedge (\forall y)(Q(y) \to y =' c_0)}\,I\to(1)$$

(*1) $x \notin FV((\forall z)(P(z) \vee Q(z) \to z =' c_0))$

(*2) $y \notin FV((\forall z)(P(z) \vee Q(z) \to z =' c_0))$

(*3) y libre para z en $P(z) \vee Q(z) \to z =' c_0$

(*4) x libre para z en $P(z) \vee Q(z) \to z =' c_0$

Ejercicio 4 (15 puntos)

Considere un lenguaje de primer orden de tipo $\langle 2; 1; 0\rangle$ con símbolo de predicado P, símbolo de función f y el siguiente conjunto de estructuras de ese tipo de similaridad:
$\mathcal{K} = \{\mathcal{M} : \mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, R, F\rangle$ y F es una función inyectiva y $F \subseteq R\}$

a. Defina por extensión un conjunto de sentencias Γ tal que $Th(\mathcal{K}) = \textsc{Cons}(\Gamma)$.

b. Defina un conjunto de estructuras $\mathcal{K}_2$ tal que $\mathcal{K}_2 \neq \emptyset$ y $\textsc{Cons}(\Gamma) \subset Th(\mathcal{K}_2)$, siendo Γ el definido en la parte a. Justifique.

c. Defina un conjunto de estructuras $\mathcal{K}_3$ tal que tal que $SENT \subseteq Th(\mathcal{K} \cap \mathcal{K}_3)$ y $\mathcal{K}_3 \neq \emptyset$. Justifique.

Propuesta de Solución

a. Definimos $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ siendo
$\varphi_1 = (\forall x_1)(\forall x_2)(\neg x_1 =' x_2 \to \neg f(x_1) =' f(x_2))$ y
$\varphi_2 = (\forall x_1)(P(x_1, f(x_1))$

Probaremos que una estructura $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, R, F\rangle$ arbitraria modela φ_1 si y sólo si F es inyectiva:

$$
\begin{array}{l}
M \models (\forall x_1)(\forall x_2)(\neg x_1 =' x_2 \to \neg f(x_1) =' f(x_2)) \\
\Leftrightarrow \text{(2.4.5)} \\
(\bar\forall a, b \in \mathcal{A})\ \mathcal{M} \models (\neg \overline{a} =' \overline{b} \to \neg f(\overline{a}) =' f(\overline{b})) \\
\Leftrightarrow \text{(2.4.5)} \\
(\bar\forall a, b \in \mathcal{A}) \text{ si } \mathcal{M} \models \neg \overline{a} =' \overline{b}, \text{ entonces } \mathcal{M} \models \neg f(\overline{a}) =' f(\overline{b}) \\
\Leftrightarrow \text{(2.4.5)} \\
(\bar\forall a, b \in \mathcal{A}) \text{ si } \mathcal{M} \not\models \overline{a} =' \overline{b}, \text{ entonces } \mathcal{M} \not\models f(\overline{a}) =' f(\overline{b}) \\
\Leftrightarrow \text{(def. } \mathcal{M}) \\
(\bar\forall a, b \in \mathcal{A}) \text{ si } a \neq b, \text{ entonces } F(a) \neq F(b) \\
\Leftrightarrow \text{(def. de función inyectiva)} \\
F \text{ es inyectiva}
\end{array}
$$

Por otra parte, $\mathcal{M}$ modela φ_2 si y sólo si $F \subseteq R$:

$$
\begin{array}{l}
M \models (\forall x_1)(P(x_1, f(x_1)) \\
\Leftrightarrow \text{(2.4.5)} \\
(\bar\forall a \in \mathcal{A}) M \models P(\overline{a}, f(\overline{a})) \\
\Leftrightarrow \text{(def. } \mathcal{M}) \\
(\bar\forall a \in \mathcal{A})(a, f(a)) \in R \\
\Leftrightarrow \text{(def. } \subseteq) \\
F \subseteq R
\end{array}
$$

Por lo tanto, por definición de $\mathcal{K}$, una estructura $\mathcal{M}$ modela φ_1 y φ_2 si y sólo si pertenece a $\mathcal{K}$. Finalmente demostraremos que $Th(\mathcal{K}) = \textsc{Cons}(\Gamma)$ mostrando que cualquier φ arbitrario cumple que $\varphi \in \textsc{Cons}(\Gamma) \Leftrightarrow \varphi \in Th(\mathcal{K})$:

$$
\begin{array}{l}
\varphi \in \textsc{Cons}(\Gamma) \\
\Leftrightarrow \text{(def. } \textsc{Cons}) \\
\Gamma \vdash \varphi \\
\Leftrightarrow \text{(corrección y completitud)} \\
\Gamma \models \varphi \\
\Leftrightarrow \text{(def. } \models) \\
(\bar\forall \mathcal{M}) \text{ si } \mathcal{M} \models \Gamma, \text{ entonces } \mathcal{M} \models \varphi \\
\Leftrightarrow \text{(def. } \Gamma) \\
(\bar\forall \mathcal{M}) \text{ si } \mathcal{M} \models \varphi_1 \text{ y } \mathcal{M} \models \varphi_2, \text{ entonces } \mathcal{M} \models \varphi \\
\Leftrightarrow \text{(por lo probado antes)} \\
(\bar\forall \mathcal{M}) \text{ si } \mathcal{M} \in \mathcal{K}, \text{ entonces } \mathcal{M} \models \varphi \\
\Leftrightarrow \text{(def. } Th) \\
\varphi \in Th(\mathcal{K})
\end{array}
$$

b. Sea $\mathcal{K}_2 = \{\mathcal{M}_2\}$, con $\mathcal{M}_2 = \langle \{0, 1\}, \{(0, 0), (1, 1)\}, id\rangle$

Vemos que en $\mathcal{M}_2$ la función id es inyectiva y está incluida en la relación $\{(0, 0), (1, 1)\}$, por lo tanto $\mathcal{M}_2 \models \Gamma$, y:

$$\begin{array}{l}\mathcal{M}_2 \models \Gamma \\ \Rightarrow \text{(def. } Mod\text{)} \\ \mathcal{M}_2 \in Mod(\Gamma) \\ \Rightarrow \text{(def. } \mathcal{K}_2\text{)} \\ \mathcal{K}_2 \subseteq Mod(\Gamma) \\ \Rightarrow \text{(propiedad del práctico 9, ejercicio 4b)} \\ Th(Mod(\Gamma)) \subseteq Th(\mathcal{K}_2) \\ \Rightarrow (Th(Mod(\Gamma)) = \text{Cons}(\Gamma)) \\ \text{Cons}(\Gamma) \subseteq Th(\mathcal{K}_2)\end{array}$$

Para probar que la inclusión es estricta, daremos una fórmula φ que esté en $Th(\mathcal{K}_2)$ pero no en $\text{Cons}(\Gamma)$. Esta fórmula puede ser $\varphi = (\forall x)(\forall y)(P(x, y) \to x =' y)$

Por un lado, $\varphi \in Th(\mathcal{K}_2)$:

$$\begin{array}{l}\varphi \in Th(\mathcal{K}_2) \\ \Leftrightarrow \text{(def. } \mathcal{K}_2\text{)} \\ \mathcal{M}_2 \models \varphi \\ \Leftrightarrow \text{(def. } \varphi\text{)} \\ \mathcal{M}_2 \models (\forall x)(\forall y)(P(x, y) \to x =' y) \\ \Leftrightarrow (2.4.5) \\ (\bar\forall a \in |\mathcal{M}_2|)(\bar\forall b \in |\mathcal{M}_2|)\ \mathcal{M}_2 \models P(\overline{a}, \overline{b}) \to \overline{a} =' \overline{b} \\ \Leftrightarrow (2.4.5) \\ (\bar\forall a \in |\mathcal{M}_2|)(\bar\forall b \in |\mathcal{M}_2|)((a, b) \in \{(0, 0), (1, 1)\} \Rightarrow a = b) \\ \text{(lo que se cumple)}\end{array}$$

Pero $\varphi \notin \text{Cons}(\Gamma)$. Sea $\mathcal{M}'_2 = \langle \{0, 1\}, \{(0, 0), (1, 1), (0, 1)\}, id \rangle$.

En $\mathcal{M}'_2$ la función id es inyectiva y está incluida en la relación $\{(0, 0), (1, 1), (0, 1)\}$, por lo tanto $\mathcal{M}'_2 \models \Gamma$, pero $\mathcal{M}'_2 \not\models \varphi$:

$$\begin{array}{l}\mathcal{M}'_2 \models \varphi \\ \Leftrightarrow \text{(def. } \varphi\text{)} \\ \mathcal{M}'_2 \models (\forall x)(\forall y)(P(x, y) \to x =' y) \\ \Leftrightarrow (2.4.5) \\ (\bar\forall a \in |\mathcal{M}'_2|)(\bar\forall b \in |\mathcal{M}'_2|)((a, b) \in \{(0, 0), (1, 1), (0, 1)\} \Rightarrow a = b) \\ \text{(lo que no se cumple para } a = 0 \text{ y } b = 1\text{)}\end{array}$$

c. Sea $\mathcal{M}_3 = \langle \{0, 1\}, \emptyset, id \rangle$ y $\mathcal{K}_3 = \{\mathcal{M}_3\}$.

Claramente la función id en $\mathcal{M}_3$ no está incluida en el conjunto vacío, por lo que $\mathcal{M}_3 \notin \mathcal{K}$. Entonces:

$$\begin{array}{l}K \cap K_3 = \emptyset \\ \Rightarrow \\ Th(K \cap K_3) = Th(\emptyset) \\ \Rightarrow (Th(\emptyset) = \texttt{SENT}) \\ Th(K \cap K_3) = \texttt{SENT}\end{array}$$