

Primer parcial de Lógica

28 de abril de 2025

Indicaciones generales

- Apagar los celulares
- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **40** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (12 puntos)

Considere un alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ y la definición usual de Σ^* .

- Defina la función $\text{suma} : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$ que devuelve la suma de los elementos de una tira. Por ejemplo:
 - $\text{suma}(010110) = 3$
 - $\text{suma}(0000) = 0$
- Defina la función $\text{largo} : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$ que cuenta los símbolos de una tira. Por ejemplo:
 - $\text{largo}(0) = 1$
 - $\text{largo}(110001) = 6$
- Defina la función $\text{unos} : \mathbb{N} \rightarrow \Sigma^*$ que dado un natural n devuelve la tira de largo n que contiene solo unos. Por ejemplo:
 - $\text{unos}(4) = 1111$
 - $\text{unos}(1) = 1$
 - $\text{unos}(0) = \varepsilon$
- Defina inductivamente al lenguaje $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ de las tiras que contienen únicamente al par 01 una o más veces de forma consecutiva. Por ejemplo:
 - $01 \in \mathcal{L}$
 - $0101 \in \mathcal{L}$
 - $010101 \in \mathcal{L}$
 - $\varepsilon \notin \mathcal{L}$
- Demuestre por inducción que $(\forall w \in \mathcal{L})(\text{suma}(w) < \text{suma}(\text{unos}(\text{largo}(w))))$

Propuesta de solución

a.

$$\begin{aligned} suma : \Sigma^* &\rightarrow \mathbb{N} \\ suma(\varepsilon) &= 0 \\ suma(xw) &= x + suma(w) \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} largo : \Sigma^* &\rightarrow \mathbb{N} \\ largo(\varepsilon) &= 0 \\ largo(xw) &= 1 + largo(w) \end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned} unos : \mathbb{N} &\rightarrow \Sigma^* \\ unos(0) &= \epsilon \\ unos(n+1) &= 1unos(n) \end{aligned}$$

d. $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$:i $01 \in \mathcal{L}$ ii Si $w \in \mathcal{L}$, entonces $01w \in \mathcal{L}$ e. Probaremos la afirmación utilizando el PIP para $\mathcal{L}$, con la propiedad:

$$P(w) := suma(w) < suma(unos(largo(w)))$$

Paso Base

T) $P(01) : suma(01) < suma(unos(largo(01)))$

Demo.

Por un lado calculamos $suma(01)$:

$$\begin{aligned} &suma(01) \\ &= (\text{def. } suma) \\ &0 + suma(1) \\ &= (\text{def. } suma) \\ &0 + 1 + suma(\epsilon) \\ &= (\text{def. } suma) \\ &0 + 1 + 0 \\ &= (\text{aritmética}) \\ &1 \end{aligned}$$

Por otro, calculamos $suma(unos(largo(01)))$:

$$\begin{aligned}
& suma(unos(largo(01))) \\
&= (\text{def. } largo \text{ y aritmética}) \\
& suma(unos(2)) \\
&= (\text{def. } unos) \\
& suma(1unos(1)) \\
&= (\text{def. } unos) \\
& suma(11unos(0)) \\
&= (\text{def. } unos) \\
& suma(11\epsilon) \\
&= (\epsilon \text{ neutro}) \\
& suma(11) \\
&= (\text{def. } suma \text{ y aritmética}) \\
& 2
\end{aligned}$$

Por aritmética, se cumple entonces que $suma(01) < suma(unos(largo(01)))$, que es la tesis.

Paso Inductivo

HI) $P(w) : suma(w) < suma(unos(largo(w)))$

TI) $P(01w) : suma(01w) < suma(unos(largo(01w)))$

Demo.

$$\begin{aligned}
& suma(01w) < suma(unos(largo(01w))) \\
&\Leftrightarrow (\text{def. } suma \text{ y aritmética}) \\
& 1 + suma(w) < suma(unos(largo(01w))) \\
&\Leftrightarrow (\text{def. } largo \text{ y aritmética}) \\
& 1 + suma(w) < suma(unos(2 + largo(w))) \\
&\Leftrightarrow (\text{def. } unos) \\
& 1 + suma(w) < suma(11unos(largo(w))) \\
&\Leftrightarrow (\text{def. } suma) \\
& 1 + suma(w) < 2 + suma(unos(largo(w)))
\end{aligned}$$

La última desigualdad se cumple ya que por **HI**, $suma(w) < suma(unos(largo(w)))$.

Ejercicio 2 (12 puntos)

Recuerde que para cualquier fórmula φ , su conjunto característico se define como:
 $\|\varphi\| = \{v \in V / v(\varphi) = 1\}$, siendo V el conjunto de todas las valuaciones.

- a. Dadas α y β dos fórmulas arbitrarias de **PROP**, dé una fórmula $\varphi \in \mathbf{PROP}$ tal que $\|\varphi\| = \|\alpha\|^c \cup \|\beta\|$. Justifique su respuesta.
- b. Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas para todo α y β fórmulas de **PROP**, justificando adecuadamente en cada caso:
 - I. $v(\alpha \wedge \beta) = 1 \Rightarrow v \in \|\alpha\|^c \cup \|\beta\|$
 - II. $v(\alpha \vee \beta) = 0 \Rightarrow v \in \|\alpha\|^c \cup \|\beta\|$
 - III. $v(\alpha \wedge \beta) = 0 \Rightarrow v \in \|\alpha\|^c \cup \|\beta\|$

Propuesta de solución

- a. Dadas α y β dos fórmulas arbitrarias de PROP, dé una fórmula $\varphi \in \text{PROP}$ tal que $\|\varphi\| = \|\alpha\|^c \cup \|\beta\|$. Justifique su respuesta.

Sea $\varphi = \neg\alpha \vee \beta$

Se demuestra que $\|\neg\alpha \vee \beta\| = \|\alpha\|^c \cup \|\beta\|$ Sea v una valuación cualquiera

$$\begin{aligned}
 &v \in \|\neg\alpha \vee \beta\| \\
 &\Leftrightarrow (\text{def. conjunto característico}) \\
 &v(\neg\alpha \vee \beta) = 1 \\
 &\Leftrightarrow (\text{def. valuaciones}) \\
 &\max\{v(\neg\alpha), v(\beta)\} = 1 \\
 &\Leftrightarrow (\text{álgebra y def. valuaciones}) \\
 &v(\neg\alpha) = 1 \text{ o } v(\beta) = 1 \\
 &\Leftrightarrow (\text{def. valuaciones}) \\
 &v(\alpha) = 0 \text{ o } v(\beta) = 1 \\
 &\Leftrightarrow (\text{def. conjunto característico}) \\
 &v \notin \|\alpha\| \text{ o } v \in \|\beta\| \\
 &\Leftrightarrow (\text{teo. conjuntos}) \\
 &v \in \|\alpha\|^c \text{ o } v \in \|\beta\| \\
 &\Leftrightarrow (\text{teo. conjuntos}) \\
 &v \in \|\alpha\|^c \cup \|\beta\|
 \end{aligned}$$

- b. Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas para todo α y β fórmulas de PROP, justificando adecuadamente en cada caso:

I. $v(\alpha \wedge \beta) = 1 \Rightarrow v \in \|\alpha\|^c \cup \|\beta\|$ – **VERDADERA**

HIP. $v(\alpha \wedge \beta) = 1$

TESIS $v \in \|\alpha\|^c \cup \|\beta\|$

Demo.

$$\begin{aligned}
 &v(\alpha \wedge \beta) = 1 \\
 &\Rightarrow (\text{def. valuaciones}) \\
 &\min\{v(\alpha), v(\beta)\} = 1 \\
 &\Rightarrow (\text{álgebra, def. valuaciones}) \\
 &v(\alpha) = 1 \text{ y } v(\beta) = 1 \\
 &\Rightarrow (\text{def. conj. caraterístico}) \\
 &v \in \|\beta\| \\
 &\Rightarrow (\text{teo. conjuntos}) \\
 &v \in \|\alpha\|^c \cup \|\beta\|
 \end{aligned}$$

II. $v(\alpha \vee \beta) = 0 \Rightarrow v \in \|\alpha\|^c \cup \|\beta\|$ – **VERDADERA**

HIP. $v(\alpha \vee \beta) = 0$

TESIS $v \in \|\alpha\|^c \cup \|\beta\|$

Demo.

$$\begin{aligned}
v(\alpha \vee \beta) &= 0 \\
&\Rightarrow (\text{def. valuaciones}) \\
\max \{v(\alpha), v(\beta)\} &= 0 \\
&\Rightarrow (\text{álgebra, def. valuaciones}) \\
v(\alpha) = 0 \text{ y } v(\beta) &= 0 \\
&\Rightarrow (\text{def. conj. característico}) \\
v &\notin \|\alpha\| \\
&\Rightarrow (\text{teo. conjuntos}) \\
v &\in \|\alpha\|^c \\
&\Rightarrow (\text{teo. conjuntos}) \\
v &\in \|\alpha\|^c \cup \|\beta\|
\end{aligned}$$

III. $v(\alpha \wedge \beta) = 0 \Rightarrow v \in \|\alpha\|^c \cup \|\beta\|$ – **FALSA**

Sea v_1 una valuación cualquiera, $\alpha = \neg \perp$ y $\beta = \perp$

$$\begin{aligned}
v_1(\neg \perp \wedge \perp) & \\
&= (\text{def. valuaciones}) \\
\min \{v_1(\neg \perp), v_1(\perp)\} & \\
&= (\text{def. valuaciones}) \\
\min \{v_1(\neg \perp), 0\} & \\
&= (\text{álgebra, def. valuaciones}) \\
0 &
\end{aligned}$$

Por lo tanto $v_1(\neg \perp \wedge \perp) = 0$ (I)

$$\begin{aligned}
\|\neg \perp\| & \\
&= (\text{def. conj. característico}) \\
\{v \in V : v(\neg \perp) = 1\} & \\
&= (\text{def. valuaciones}) \\
\{v \in V : 1 - v(\perp) = 1\} & \\
&= (\text{def. valuaciones}) \\
\{v \in V : 1 - 0 = 1\} & \\
&= \\
V &
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\|\neg \perp\|^c = \emptyset$ (A)

$$\begin{aligned}
\|\perp\| & \\
&= (\text{def. conj. característico}) \\
\{v \in V : v(\perp) = 1\} & \\
&= (\text{def. valuaciones}) \\
\emptyset &
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\|\perp\| = \emptyset$ (B)

De (A),(B) se puede afirmar $\|\neg \perp\|^c \cup \|\perp\| = \emptyset$ (II)

De (I) y (II) se probó que $v_1(\neg \perp \wedge \perp) = 0$ y $v_1 \notin \|\neg \perp\| \cup \|\perp\|$.

La afirmación dada no se cumple para todo α y β fórmulas de PROP, por lo tanto es FALSA.

Ejercicio 3 (10 puntos)

Construya derivaciones que justifiquen los siguientes juicios:

- a. $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\alpha \wedge \gamma), (\alpha \vee \beta) \rightarrow (\alpha \vee \gamma) \vdash \beta \rightarrow \gamma$
 b. $\vdash (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \beta)$

Nota: En ningún caso se aceptan justificaciones semánticas.

Propuesta de solución

a.

$$\frac{\frac{(\alpha \vee \beta) \rightarrow (\alpha \vee \gamma) \quad \frac{[\beta]^1}{\alpha \vee \beta} IV}{\alpha \vee \gamma} E \rightarrow \quad \frac{(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\alpha \wedge \gamma) \quad \frac{[\alpha]^2 \quad [\beta]^1}{\alpha \wedge \beta} I \wedge}{\frac{\alpha \wedge \gamma}{\gamma} E \wedge} E \rightarrow}{\frac{\gamma}{\beta \rightarrow \gamma} I \rightarrow (1)} \frac{[\gamma]^2}{E \vee (2)}$$

b.

$$\frac{\frac{[\neg\beta \rightarrow \neg\alpha]^1 \quad [\neg\beta]^3}{\neg\alpha} E \rightarrow \quad \frac{[\neg(\neg\alpha \vee \beta)]^2}{\neg\alpha \vee \beta} IV}{\frac{\perp}{\beta} RAA(3)} E \neg$$

$$\frac{[\neg(\neg\alpha \vee \beta)]^2}{\neg\alpha \vee \beta} RAA(2) \quad \frac{\frac{\perp}{\neg\alpha \vee \beta} IV}{E \neg} \quad \frac{[\neg\beta]^4 \quad [\beta]^5}{\neg\alpha} E \neg \quad \frac{[\neg\alpha \vee \beta]^1 \quad [\neg\alpha]^5}{\neg\beta \rightarrow \neg\alpha} I \rightarrow (4) \quad \frac{\perp}{\neg\alpha} I \neg \quad E \vee (5)}{(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \leftrightarrow \neg\alpha \vee \beta} I \leftrightarrow (1)$$

Ejercicio 4 (6 puntos)

Considere el siguiente conjunto:

$$\Gamma = \{(p_0 \vee p_1) \wedge p_i : i \in \mathbb{N}, i \geq 2\}$$

- a. Determine si Γ es consistente. Justifique.
 b. Dé una fórmula $\varphi \in \text{PROP}$ tal que $\Gamma \cup \{\varphi\}$ sea completo. Justifique.

Se recuerda que la caracterización semántica de completo dice que un conjunto $\Delta \subseteq \text{PROP}$ es completo si y sólo si existe una única valuación v tal que $v(\Delta) = 1$.

Propuesta de solución

- a. Por caracterización semántica de consistencia, Γ es consistente si y sólo si existe una valuación tal que $v(\Gamma) = 1$.

Construimos la siguiente valuación: $(\forall i \in \mathbb{N}) v_0(p_i) = 1$.

Luego, para cada $i \in \mathbb{N}, i \geq 2$, tenemos:

$$\begin{aligned}
 & v_0((p_0 \vee p_1) \wedge p_i) \\
 &= (\text{def. valuación}) \\
 & \min(v_0(p_0 \vee p_1), v_0(p_i)) \\
 &= (\text{def. valuación}) \\
 & \min(\max(v_0(p_0), v_0(p_1)), v_0(p_i)) \\
 &= (\text{def. } v) \\
 & \min(\max(1, 1), 1) \\
 &= (\text{algebra}) \\
 & 1
 \end{aligned}$$

Luego, $(\forall \varphi \in \Gamma) v_0(\varphi) = 1$, de donde concluimos que $(\exists v \text{ valuación}) v(\Gamma) = 1$, como queríamos.

- b. Para que una valuación v cumpla $v(\Gamma) = 1$, de acuerdo a la definición de las fórmulas de Γ debemos tener $(\forall i \in \mathbb{N}, i \geq 2) v(p_i) = 1$. Sin embargo alcanza con definir $v(p_0) = 1$ o $v(p_1) = 1$, lo que da lugar a tres posibles valuaciones que cumplen $v(\Gamma) = 1$. Alcanza con agregar una fórmula que “fije” los valores de verdad de p_0 y p_1 .

Consideramos $\varphi = p_0 \wedge p_1$. Probaremos que $\Gamma \cup \{\varphi\}$ es completo utilizando la caracterización semántica.

Primeramente observemos que la valuación dada en la parte a. cumple que $v_0(\Gamma \cup \{\varphi\}) = 1$, porque:

$$\begin{aligned}
 & v_0(p_0 \wedge p_1) \\
 &= (\text{def. valuación}) \\
 & \min(v_0(p_0), v_0(p_1)) \\
 &= (\text{def. } v_0) \\
 & \min(1, 1) \\
 &= (\text{algebra}) \\
 & 1
 \end{aligned}$$

Ahora, probemos que v_0 es única. Supongamos que existe $v_1 \neq v_0$ tal que $v_1(\Gamma \cup \{\varphi\}) = 1$. Como $v_1 \neq v_0$, $(\exists i \in \mathbb{N}) v_1(p_i) = 0$. Tomemos el menor i que cumpla esa condición.

- Si $i = 0$ o $i = 1$, entonces $v_1(p_0) = 0$ o $v_1(p_1) = 0$, de donde $\min(v_1(p_0), v_1(p_1)) = 0$.

Entonces:

$$\begin{aligned}
 & v_1(p_0 \wedge p_1) \\
 &= (\text{def. valuación}) \\
 & \min(v_1(p_0), v_1(p_1)) \\
 &= (\text{def. } v_1) \\
 & 0
 \end{aligned}$$

- Si $i \geq 2$, para tal i tenemos:

$$\begin{aligned}
& v_1((p_0 \vee p_1) \wedge p_i) \\
&= (\text{def. valuación}) \\
& \min(v_1(p_0 \vee p_1), v_1(p_i)) \\
&= (\text{como } v_1(p_i) = 1) \\
& \min(v_1(p_0 \vee p_1), 0) \\
&= (\text{algebra}) \\
& 0
\end{aligned}$$

En ambos casos, encontramos una fórmula $\psi \in \Gamma \cup \{\varphi\}$ con $v_1(\psi) = 0$, contradiciendo que $v_1(\Gamma \cup \{\varphi\}) = 1$. El absurdo viene de suponer que $v_0 \neq v_1$. Concluimos que existe una única valuación que cumple $v(\Gamma \cup \{\varphi\}) = 1$. Luego $\Gamma \cup \{\varphi\}$ es completo.