Primer parcial de Lógica

04 de mayo de 2024

Indicaciones generales

- Apagar los celulares
- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **40** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (10 puntos)

a. Dar una definición *inductiva libre* del conjunto $\mathtt{PROP}_{\wedge,\neg}$ de las fórmulas de $\mathtt{PROP}$ que solamente usan los conectivos $\wedge$ y $\neg$.

b. I. Defina la función $sub : \mathtt{PROP}_{\wedge,\neg} \to 2^{\mathtt{PROP}_{\wedge,\neg}}$ que devuelve el conjunto de subfórmulas de una proposición.

   II. Demuestre por inducción que $(\bar{\forall}\varphi \in \mathtt{PROP}_{\wedge,\neg})(\bar{\exists} n \in \mathbb{N})(|sub(\varphi)| \leq n)$.

c. I. Defina la función $f : \mathbb{N} \to \mathtt{PROP}_{\wedge,\neg}$ que dado un número natural n, devuelva p_0 negado n veces.

   Ejemplos:

   - $f(1) = (\neg p_0)$.
   - $f(3) = (\neg(\neg(\neg p_0)))$.

   II. Demuestre que para todo número natural n se cumple que $|sub(f(n))| = n + 1$.

Nota: Puede asumir que para toda fórmula α de $\mathtt{PROP}$ se cumple que $(\neg\alpha) \notin sub(\alpha)$.

Propuesta de solución

a. Definición de $\mathtt{PROP}_{\wedge,\neg}$:

   i Si $p_i \in \mathcal{P}$ entonces $p_i \in \mathtt{PROP}_{\wedge,\neg}$

   ii Si $\alpha \in \mathtt{PROP}_{\wedge,\neg}$ entonces $(\neg\alpha) \in \mathtt{PROP}_{\wedge,\neg}$

   iii Si $\alpha \in \mathtt{PROP}_{\wedge,\neg}$ y $\beta \in \mathtt{PROP}_{\wedge,\neg}$ entonces $(\alpha \wedge \beta) \in \mathtt{PROP}_{\wedge,\neg}$

b. I. $sub : \mathtt{PROP}_{\wedge,\neg} \to 2^{\mathtt{PROP}_{\wedge,\neg}}$

   i $sub(p_i) = \{p_i\}$

   ii $sub((\neg\alpha)) = \{(\neg\alpha)\} \cup sub(\alpha)$

   iii $sub((\alpha \wedge \beta)) = \{(\alpha \wedge \beta)\} \cup sub(\alpha) \cup sub(\beta)$

   II. Queremos probar: $(\bar{\forall}\varphi \in \mathtt{PROP}_{\wedge,\neg})(\bar{\exists} n \in \mathbb{N})(|sub(\varphi)| \leq n)$

   Se hará una prueba utilizando el PIP para $\mathtt{PROP}_{\wedge,\neg}$, con la propiedad:

$$P(\varphi) := (\bar{\exists} n \in \mathbb{N})(|sub(\varphi)| \leq n)$$

Paso Base

T) $P(p_i) : (\bar{\exists} n \in \mathbb{N})(|sub(p_i)| \leq n)$

Demo.

$$
\begin{aligned}
&|sub(p_i)| \\
&= \text{(def. } sub\text{)} \\
&|\{p_i\}| \\
&\leq \text{(def. cardinalidad)} \\
&1
\end{aligned}
$$

Tomando $n = 1$ como testigo se cumple la tesis.

Paso Inductivo 1

HI) $P(\varphi) : (\bar{\exists} n \in \mathbb{N})(|sub(\varphi)| \leq n)$

TI) $P((\neg\varphi)) : (\bar{\exists} m \in \mathbb{N})(|sub((\neg\varphi))| \leq m)$

Demo.

$$
\begin{aligned}
&|sub((\neg\varphi))| \\
&= \text{(def. } sub\text{)} \\
&|\{(\neg\varphi)\} \cup sub(\varphi)| \\
&\leq \text{(def. cardinalidad)} \\
&1 + |sub(\varphi)|
\end{aligned}
$$

Sea $n \in \mathbb{N}$ el elemento dado por la HI que cumple $|sub(\varphi)| \leq n$.
Entonces $1 + |sub(\varphi)| \leq 1 + n$.
Tomando $m = 1 + n$ como testigo se cumple la tesis.

Paso Inductivo 2

HI) $P(\varphi) : (\bar{\exists} n \in \mathbb{N})(|sub(\varphi)| \leq n)$
$P(\psi) : (\bar{\exists} m \in \mathbb{N})(|sub(\psi)| \leq m)$

TI) $P((\varphi \wedge \psi)) : (\bar{\exists} k \in \mathbb{N})(|sub((\varphi \wedge \psi))| \leq k)$

Demo.

$$
\begin{aligned}
&|sub((\varphi \wedge \psi))| \\
&= \text{(def. } sub\text{)} \\
&|\{(\varphi \wedge \psi)\} \cup sub(\varphi) \cup sub(\psi)| \\
&\leq \text{(def. cardinalidad)} \\
&1 + |sub(\varphi)| + |sub(\psi)|
\end{aligned}
$$

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{N}$ los elementos dados por la HI que cumplen $|sub(\varphi)| \leq n$ y $|sub(\psi)| \leq m$.
Entonces $1 + |sub(\varphi)| + |sub(\psi)| \leq 1 + n + m$.
Tomando $k = 1 + n + m$ como testigo se cumple la tesis.

Aplicando el PIP para $\texttt{PROP}_{\wedge,\neg}$, se concluye que $(\bar{\forall} \varphi \in \texttt{PROP}_{\wedge,\neg})(\bar{\exists} n \in \mathbb{N})(|sub(\varphi)| \leq n)$.

c. I. $f : \mathbb{N} \to \texttt{PROP}_{\wedge,\neg}$

i $f(0) = p_0$
ii $f(n+1) = (\neg f(n))$

II. Queremos probar: $(\bar{\forall} n \in \mathbb{N})(|sub(f(n))| = n + 1)$

Se hará una prueba utilizando el PIP para $\mathbb{N}$, con la propiedad:

$$P(n) := |sub(f(n))| = n + 1$$

Paso Base

T) $P(0) : |sub(f(0))| = 0 + 1$

Demo.

$$|sub(f(0))|$$
$$= \text{(def. } f\text{)}$$
$$|sub(p_0)|$$
$$= \text{(def. } sub\text{)}$$
$$|\{p_0\}|$$
$$= \text{(def. cardinalidad)}$$
$$1$$

Paso Inductivo

HI) $P(n) : |sub(f(n))| = n + 1$

TI) $P(n + 1) : |sub(f(n + 1))| = (n + 1) + 1$

Demo.

$$|sub(f(n + 1))|$$
$$= \text{(def. } f\text{)}$$
$$|sub((\neg f(n)))|$$
$$= \text{(def. } sub\text{)}$$
$$|\{(\neg f(n))\} \cup sub(f(n))|$$
$$= \text{(}(\neg f(n)) \notin sub(f(n)) \text{ y def. cardinalidad)}$$
$$|sub(f(n))| + 1$$
$$= \text{(HI)}$$
$$(n + 1) + 1$$

Aplicando el PIP para $\mathbb{N}$, se concluye que $(\bar{\forall} n \in \mathbb{N})(|sub(f(n))| = n + 1)$.

Ejercicio 2 (10 puntos)

Dadas dos fórmulas de $\texttt{PROP}$, φ y ψ, se dice que están relacionadas y se denota como $\varphi \bowtie \psi$:

$$\varphi \bowtie \psi \Leftrightarrow \|\varphi\| \cap \|\psi\| = \emptyset$$

Recordar: $\|\varphi\| = \{v \in V / v(\varphi) = 1\}$ siendo V el conjunto de todas las valuaciones.

a. Determine si $\alpha \bowtie \beta$ siendo:

$$\alpha = \neg(p \wedge \neg q) \to r$$

$$\beta = \neg r \vee \neg(q \leftrightarrow p)$$

b. Para cada una de las siguientes afirmaciones indique si son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.

I. $(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})(\bar{\forall}\psi \in \texttt{PROP})$
(Si $\varphi \bowtie \psi$ y $(\bar{\exists} v : val) v(\varphi) = 1$, entonces $(\bar{\exists} v : val) v(\psi) = 0$)

II. $(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})(\bot \bowtie \varphi)$

III. $(\bar{\exists}\varphi \in \texttt{PROP})(\not\models \neg\varphi \text{ y } \neg\bot \bowtie \varphi)$

IV. $(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})$ $(\bar{\forall}\psi \in \texttt{PROP})$ Si φ $\texttt{eq}$ ψ y $\varphi \bowtie \psi$ entonces $\models \neg\varphi$

Propuesta de solución

a. De la definición de la relación $\bowtie$ se obtiene que:

$$\alpha \bowtie \beta \text{ si y solo si no existe valuación } v \text{ tal que } v(\alpha) = v(\beta) = 1$$

Usamos un tableau para buscar una valuación que asigne 1 a ambas fórmulas.

$$\mathbf{T}.\neg(p \land \neg q) \to r$$
$$\mathbf{T}.\neg r \lor \neg(q \leftrightarrow p) \ast$$

Rama izquierda: $\mathbf{T}.\neg(p \land \neg q) \to r$, $\mathbf{T}.\neg r \ast$ — Rama derecha: $\ldots$

$$\mathbf{T}.\neg(p \land \neg q) \to r \ast$$
$$\mathbf{F}.r$$

Rama izquierda: $\mathbf{F}.\neg(p \land \neg q) \ast$, $\mathbf{F}.r$ — Rama derecha: $\ldots$

$$\mathbf{T}.(p \land \neg q) \ast$$
$$\mathbf{F}.r$$

$$\mathbf{T}.p$$
$$\mathbf{T}.\neg q \ast$$
$$\mathbf{F}.r$$

$$\mathbf{T}.p$$
$$\mathbf{F}.q$$
$$\mathbf{F}.r$$

Del tableau anterior surge que cualquier valuación v tal que

$$v(p) = 1, \ v(q) = v(r) = 0$$

cumple que $v(\alpha) = v(\beta) = 1$.

Por lo tanto, no se cumple $\alpha \bowtie \beta$.

b. I. **VERDADERA**

Sean φ y ψ cualesquiera, veamos que se cumple:

H) $\varphi \bowtie \psi$ (*) y $(\bar{\exists} v : val) v(\varphi) = 1$ (**)

T) $(\bar{\exists} v : val) v(\psi) = 0$

Dem.

Sea v_1 la valuación de (**). Se cumple que $v_1(\varphi) = 1$.

Por (*): no existe valuación v tal que $v(\varphi) = v(\psi) = 1$.
Entonces, para que se cumpla (*), necesariamente $v_1(\psi) = 0$.

Por lo tanto, encontramos una valuación que asigna 0 a ψ. Esta es la misma valuación v_1 dada por hipótesis.

Se concluye que $(\bar{\exists} v : val) v(\psi) = 0$.

■

Como razonamos para φ y ψ cualesquiera, el resultado vale **para todo** φ y ψ en `PROP`.

II. **VERDADERA**

Por definición de valuación y de conjunto característico sabemos que: $\|\perp\| = \emptyset$ (*).
Consideramos $\varphi \in$ `PROP`:

$\|\perp\| \cap \|\varphi\|$
$=$ (por (*))
$\emptyset \cap \|\varphi\|$
$=$ (def, de $\cap$)
$\emptyset$

Aplicando la definición de la relación $\bowtie$ se concluye que: $\perp \bowtie \varphi$.
Como razonamos con φ cualquiera, este resultado vale para todo $\varphi \in$ `PROP`.

III. **FALSA**

Llamamos Val al conjunto de **todas** las valuaciones.
Como $\neg\perp$ es una tautología se cumple: $\|\neg\perp\| = \text{Val}$ (*).
Consideramos φ tal que: $\neg\perp \bowtie \varphi$:

$\neg\perp \bowtie \varphi$
$\Leftrightarrow$ (def. de $\bowtie$)
$\|\neg\perp\| \cap \|\varphi\| = \emptyset$
$\Leftrightarrow$ (por (*))
$\text{Val} \cap \|\varphi\| = \emptyset$
$\Leftrightarrow$ (def, de $\cap$)
$\|\varphi\| = \emptyset$
$\Leftrightarrow$ (def. $\| - \|$ y contradicción)
φ es contradicción
$\Leftrightarrow$ (negación de contradicción es tautología)
$\models \neg\varphi$

De lo anterior se deduce, que cualquier fórmula φ que esté en relación con $\neg\perp$ es una *contradicción* y por lo tanto su negación es una *tautología.*
Por lo tanto, no puede existir φ tal que: $\neg\perp \bowtie \varphi$ y $\not\models \neg\varphi$.

Otra solución: Partimos de $\not\models \neg\varphi$ y llegamos a una contradicción con $\neg\perp \bowtie \varphi$.
Supongamos que existe φ que cumple con $\not\models \neg\varphi$ y $\neg\perp \bowtie \varphi$ y observemos que esto no puede ocurrir.

$\not\models \neg\varphi$
$\Leftrightarrow$ (def. de $\models$)
$(\bar{\exists} v : val) v(\neg\varphi) = 0$
$\Leftrightarrow$ (def. de valuación)
$(\bar{\exists} v : val) v(\varphi) = 1 (*)$

Sea v_1 la valuación de $(*)$ que cumple $v_1(\varphi) = 1$.
Como $\|\neg\perp\| = \text{Val}$, necesariamente $v_1 \in \|\neg\perp\| \cap \|\varphi\|$.
Entonces $\|\neg\perp\| \cap \|\varphi\| \neq \emptyset$ y por lo tanto no se cumple $\neg\perp \bowtie \varphi$ en contra de lo supuesto.

IV. **VERDADERA**

Suponemos φ y ψ tales que φ `eq` ψ:

$\varphi \ \texttt{eq}\ \psi$

$\Leftrightarrow$ (definición `eq`)

$\vDash \varphi \leftrightarrow \psi$

$\Leftrightarrow$ (def. $\vDash$)

$(\bar{\forall} v \in \text{Val})\ v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$

$\Leftrightarrow$ (def. valuación)

$(\bar{\forall} v \in \text{Val})\ v(\varphi) = v(\psi)$

La última expresión nos dice que φ y ψ tienen los mismos valores en toda valuación. Esto significa que para toda valuación v, se cumple:

$$v(\varphi) = 1 \text{ si y solo si } v(\psi) = 1$$

lo que nos permite concluir que sus conjuntos característicos son iguales: $\|\varphi\| = \|\psi\|$
Por lo tanto: $\|\varphi\| \cap \|\psi\| = \|\varphi\| = \|\psi\|$ (**).
Suponemos ahora que $\varphi \bowtie \psi$:

$\varphi \bowtie \psi$

$\Leftrightarrow$ (def. de $\bowtie$)

$\|\varphi\| \cap \|\psi\| = \emptyset$

$\Leftrightarrow$ (por (**))

$\|\varphi\| = \emptyset$

$\Leftrightarrow$ (def. contradicción y $\| - \|$)

φ es contradicción

$\Leftrightarrow$ (negación de contradicción es tautología)

$\vDash \neg\varphi$

Queda entonces probado que para todo φ y ψ en `PROP` si φ `eq` ψ y $\varphi \bowtie \psi$, entonces $\vDash \neg\varphi$.

Ejercicio 3 (10 puntos)

Construya derivaciones que justifiquen los siguientes juicios:

a. $\vdash ((\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge (\alpha \vee \beta)) \to (\neg\alpha \leftrightarrow \beta)$
b. $(\alpha \to \beta) \to \alpha, \neg\beta \vdash (\alpha \wedge \neg\beta) \vee \alpha$

Nota: En ningún caso se aceptan justificaciones semánticas.

Propuesta de solución

a.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge (\alpha \vee \beta)]^1}{\alpha \vee \beta}\,E\wedge \quad \dfrac{\dfrac{[\neg\alpha]^2 \quad [\alpha]^3}{\bot}\,E\neg}{\beta}\,E\bot \quad [\beta]^3}{\beta}\,E\vee^3 \qquad \dfrac{\dfrac{[(\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge (\alpha \vee \beta)]^1}{\neg\alpha \vee \neg\beta}\,E\wedge \quad [\neg\alpha]^4 \quad \dfrac{\dfrac{[\neg\beta]^4 \quad [\beta]^2}{\bot}\,E\neg}{\neg\alpha}\,E\bot}{\neg\alpha}\,E\vee^4}{\neg\alpha \leftrightarrow \beta}\,I\leftrightarrow^2}{((\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge (\alpha \vee \beta)) \to (\neg\alpha \leftrightarrow \beta)}\,I\to^1$$

b.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\alpha]^1 \qquad \dfrac{(\alpha\to\beta)\to\alpha \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\alpha]^1 \quad [\alpha]^2}{\bot}\,E\neg}{\beta}\,E\bot}{\alpha\to\beta}\,I\to^2}{\alpha}\,E\to}{\bot}\,E\neg}{\alpha}\,RAA^1}{(\alpha\wedge\neg\beta)\vee\alpha}\,I\vee$$

Ejercicio 4 (10 puntos)

Considere dos conjuntos consistenes maximales Γ y Δ tales que $\Gamma \neq \Delta$. Pruebe las siguientes afirmaciones:

a. $\textsc{Cons}(\Gamma \cup \Delta) = \texttt{PROP}$
b. $\Gamma \cap \Delta$ es Teoría.
c. $\Gamma - \Delta$ no es vacío.
d. $(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})(\bar{\forall}\psi \in \texttt{PROP})\ (\varphi \notin \Gamma$ y $\psi \in \Delta \Rightarrow (\varphi \to \psi) \in \Gamma \cap \Delta)$

Propuesta de solución

a.

H) Δ y Γ son Consistentes Maximales y $\Delta \neq \Gamma$
T) $\textsc{Cons}(\Gamma \cup \Delta) = \texttt{PROP}$

Dem.

Dado que $\Delta \neq \Gamma$, hay al menos, una fórmula φ que está en uno y no está en el otro.

Supongamos $\varphi \in \Delta$ y $\varphi \notin \Gamma$.

Como $\varphi \notin \Gamma$ y Γ Consistente Maximal, entonces $\neg\varphi \in \Gamma$.

Esto hace que $\{\varphi, \neg\varphi\} \subseteq \Gamma \cup \Delta$, lo que se cumple que $\Gamma \cup \Delta \vdash \bot$ y por lo tanto, $\textsc{Cons}(\Gamma \cup \Delta) = \texttt{PROP}$

$\blacksquare$

Otra solución:

Dem.

Para cada consistente maximal, hay una única valuación que hace verdaderas a todas sus fórmulas.

Dado que los dos conjuntos son consistentes maximales y diferentes, las valuaciones que los hacen verdaderos también son diferentes. Esto significa que hay alguna fórmula en la que el valor de verdad de las dos valuaciones es diferente. Esto hace que la valuación que hace verdaderas a todas las fórmulas de un conjunto no puede hacer verdaderas a todas las del otro conjunto.

Por este motivo, no hay ninguna valuación que haga verdaderas a todas las fórmulas de la unión, por lo que $\Gamma \cup \Delta \vdash \bot$, y por lo tanto, $\textsc{Cons}(\Gamma \cup \Delta) = \texttt{PROP}$

■

b.

H) Δ y Γ son Consistentes Maximales y $\Delta \neq \Gamma$
T) $\Gamma \cap \Delta$ es Teoría.
Dem.

Consideremos φ tal que $\Gamma \cap \Delta \vdash \varphi$ y una derivación $d \in \texttt{DER}$ que justifica ese juicio.

Por definición de $\vdash$, se cumple que $\Gamma \vdash \varphi$ y $\Delta \vdash \varphi$ dado que la misma derivación d sirve como justificación de estos dos jucios.

Dado que Γ es consistente maximal, entonces es teoría y por lo tanto cumple la siguiente condición:

$$\Gamma \vdash \gamma \Rightarrow \gamma \in \Gamma$$

Lo mismo sucede con Δ.

Por lo tanto, como φ se deriva tanto de Γ como de Δ que son teorías, entonces tiene que pertenecer a los dos conjuntos. Y como pertenece a ambos pertenece a la intersección, por lo que se cumple la tesis.

■

c.

H) Δ y Γ son Consistentes Maximales y $\Delta \neq \Gamma$
T) $\Gamma - \Delta$ no es vacío.
Dem.

Supongamos que $\Gamma - \Delta = \emptyset$.

Esto ocurre si y solo si $\Gamma \subseteq \Delta$.

Como $\Gamma \neq \Delta$, tiene que cumplirse que $\Gamma \subset \Delta$, o sea, hay un fórmula $\psi \in \Delta$ tal que $\psi \notin \Gamma$.

Pero esta última afirmación contradice la hipótesis de que Γ es consistente maximal, dado que Δ tiene más fórmulas y también es consistente maximal y diferente de Γ.

Por lo tanto, la suposición que se hizo es absurda y entonces, se cumple que $\Gamma - \Delta$ no es vacío.

■

d.

H) Δ y Γ son Consistentes Maximales y $\Delta \neq \Gamma$
T) $(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})(\bar{\forall}\psi \in \texttt{PROP})\ \varphi \notin \Gamma$ y $\psi \in \Delta \Rightarrow \varphi \to \psi \in \Gamma \cap \Delta$
Dem.

Sean φ y ψ dos fórmulas arbitrarias de $\texttt{PROP}$.

Dado que Γ y Δ son consistentes maximales, son ambos teorías.

Si $\varphi \notin \Gamma$, entonces $\neg\varphi \in \Gamma$ por consistencia maximal. En este caso, se puede entonces considerar probar el siguiente juicio

$$\neg\varphi \vdash \varphi \to \psi$$

mediante la siguiente derivación:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\neg\varphi \quad [\varphi]^1}{\bot}\ E\neg}{\psi}\ E\bot}{\varphi \to \psi}\ I \to_1$$

Esta misma derivación también prueba $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ y por lo tanto $\varphi \to \psi \in \Gamma$ porque Γ es teoría.

Siguiendo la misma estrategia con Δ, se puede probar que $\psi \vdash \varphi \to \psi$ con la siguiente derivación:

$$\cfrac{\psi}{\varphi \to \psi}\ I \to_1$$

Esta misma derivación prueba que $\Delta \vdash \varphi \to \psi$ y por tanto, $\varphi \to \psi \in \Delta$ porque Δ es teoría.

Dado que $\varphi \to \psi \in \Delta$ y $\varphi \to \psi \in \Gamma$ entonces $\varphi \to \psi \in \Gamma \cap \Delta$

■

Otra solución, por aplicación de Lema 1.6.9:

Dem.

El lema 1.6.9 para el caso del $\to$ es el siguiente:

Si Γ es Consistente Maximal, entonces
$(\alpha \to \beta \in \Gamma \Leftrightarrow (\text{Si } \alpha \in \Gamma \text{ entonces } \beta \in \Gamma\ ))$.

Dado que $\varphi \notin \Gamma$, el lado derecho de la equivalencia es verdadero y por lo tanto, $\varphi \to \psi \in \Gamma$.

Dado que $\psi \in \Delta$, nuevamente el lado derecho de la equivalencia es verdadero y por lo tanto, $\varphi \to \psi \in \Delta$.

Por las afirmaciones anteriores, se cumple que: $\varphi \to \psi \in \Gamma \cap \Delta$

■