Primer parcial de Lógica

22 de abril de 2023

Indicaciones generales

- Apagar los celulares
- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **40** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (12 puntos)

Considere un alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ y la definición usual de Σ^*.

a. Defina la función $suma : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ que devuelve la suma de los elementos de la tira de Σ^*. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} suma(101) &= 2 \\ suma(0001) &= 1 \\ suma(\varepsilon) &= 0 \end{aligned}$$

b. Defina la función $largo$ que cuenta los símbolos de una tira

c. Defina inductivamente a $\mathcal{L}_1 \subseteq \Sigma^*$ que contiene a las tiras que terminan en 0.

d. Demuestre por inducción que $(\bar{\forall} w \in \mathcal{L}_1)(suma(w) < largo(w))$

e. Defina la función $f : \mathcal{L}_1 \to \Sigma^*$ que cambia los 0 por 1 y los 1 por 0 cada símbolo de una tira. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} f(10) &= 01 \\ f(100) &= 011 \end{aligned}$$

f. Demuestre que $(\bar{\forall} w \in \mathcal{L}_1)(suma(f(w)) < largo(f(w)))$ no se cumple.

Propuesta de solución

a.

$$\begin{aligned} &suma : \Sigma^* \to \mathbb{N} \\ &suma(\varepsilon) = 0 \\ &suma(xw) = x + suma(w) \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} &largo : \Sigma^* \to \mathbb{N} \\ &largo(\varepsilon) = 0 \\ &largo(xw) = 1 + suma(w) \end{aligned}$$

c. $\mathcal{L}_1 \subseteq \Sigma^*$:

i $0 \in \mathcal{L}_1$
ii Si $x \in \{0, 1\}$ y $w \in \mathcal{L}_1$, entonces $xw \in \mathcal{L}_1$

d. Probaremos la afirmación utilizando el PIP para $\mathcal{L}_1$, con la propiedad:

$$P(w) := suma(w) < largo(w)$$

Paso Base

T) $P(0) : suma(0) < largo(0)$
Demo.

$suma(0) < largo(0)$
$\Leftrightarrow$ (def. *suma*)
$0 + suma(\varepsilon) < largo(0)$
$\Leftrightarrow$ (def. *suma*)
$0 + 0 < largo(0)$
$\Leftrightarrow$ (def. *largo*)
$0 + 0 < 1 + largo(\varepsilon)$
$\Leftrightarrow$ (def. *largo*)
$0 < 1$
(lo que se cumple por aritmética)

Paso Inductivo

HI) $P(w) : suma(w) < largo(w)$
TI) $P(xw) : suma(xw) < largo(xw)$
Demo.

(por HI)
$suma(w) < largo(w)$
$\Rightarrow$ ($x <= 1$)
$x + suma(w) < 1 + largo(w)$
$\Rightarrow$ (def. *suma* y def. *largo*)
$suma(xw) < largo(xw)$

e.

$$f : \mathcal{L}_1 \to \Sigma^*$$
$$f(0) \quad = 1$$
$$f(xw) = \begin{cases} 1f(w) & \text{si } x = 0 \\ 0f(w) & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

f. Sea $w = 0$, probaremos que $suma(f(0)) = largo(f(0))$:
$suma(f(0)) = largo(f(0))$
$\Leftrightarrow$ (def. f)
$suma(1) = largo(1)$
$\Leftrightarrow$ (def. *suma* y def. *largo*)
$1 + suma(\varepsilon) = 1 + largo(\varepsilon)$
$\Leftrightarrow$ (def. *suma* y def. *largo*)
$1 + 0 = 1 + 0$
(lo que se cumple trivialmente)

Ejercicio 2 (12 puntos)

a. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas para todo α, β y γ fórmulas de PROP. Justifique su respuesta.

   I. $(\alpha \to \beta) \to \alpha \models \alpha \land \neg\beta$
   II. Si $\models \alpha \land \beta$ y $\alpha, \beta \models \gamma$ entonces $\models \gamma$
   III. Si α es equivalente a $\beta \to \gamma$ entonces $\models \alpha \lor \neg\gamma$

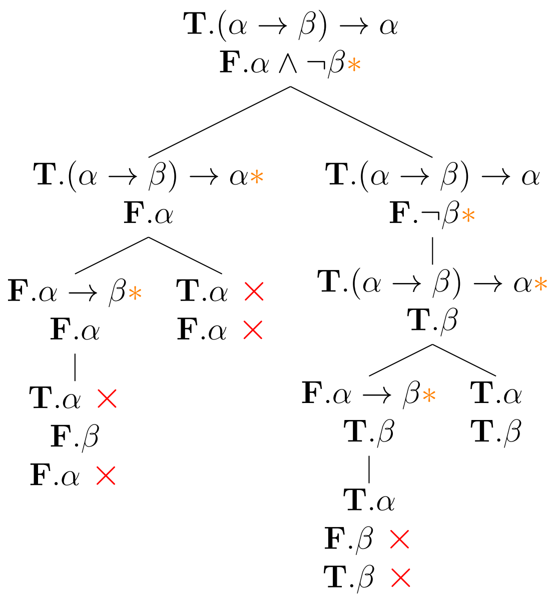
b. Dé α y β fórmulas de PROP tales que cumple simultáneamente las siguientes condiciones:

   - α y β son contingencias.
   - $\not\models \alpha \leftrightarrow \beta$
   - $\alpha \models \beta$

   Justifique la respuesta.

Propuesta de solución

a. I. **Falso.** El siguiente tableau muestra que si hay una valuación que hace verdadero a α y a β, entonces la consecuencia lógica no se cumple:



Entonces podemos tomar $\alpha = \beta = \neg\bot$ como contraejemplo. También serviría: $\alpha = p_1$, $\beta = p_2$.

II. **Verdadero.** Sea v una valuación cualquiera. Entonces, como $\models \alpha \land \beta$:

$$v(\alpha \land \beta) = 1$$
$$\Rightarrow \text{(def. val.)}$$
$$\text{mín}(v(\alpha), v(\beta)) = 1$$
$$\Rightarrow \text{(aritmética)}$$
$$v(\alpha) = 1 \text{ y } v(\beta) = 1$$
$$\Rightarrow (\alpha, \beta \models \gamma)$$
$$v(\gamma) = 1$$

Como tomé una valuación v arbitraria y probé $v(\gamma) = 1$, concluyo que: $\models \gamma$.

III. **Verdadero.**

$\alpha \vee \neg\gamma$
eq (α eq $\beta \to \gamma$)
$(\beta \to \gamma) \vee \neg\gamma$
eq (equivalencia del implica)
$(\neg\beta \vee \gamma) \vee \neg\gamma$
eq (asociativa del $\vee$)
$\neg\beta \vee (\gamma \vee \neg\gamma)$
eq (tercero excluido)
$\neg\beta \vee \neg\bot$
eq (absorción)
$\neg\bot$

Como la fórmula $\alpha \vee \neg\gamma$ es equivalente a una tautología conocida, concluimos que ella también lo es.

Solución alternativa: Sea v una valuación arbitraria. Entonces:

$v(\alpha \vee \neg\gamma)$
$=$ (def. val.)
$\text{máx}(v(\alpha), v(\neg\gamma))$
$=$ (def. val.)
$\text{máx}(v(\alpha), 1 - v(\gamma))$
$=$ ($v(\alpha) = v(\beta \to \gamma)$)
$\text{máx}(v(\beta \to \gamma), 1 - v(\gamma))$
$=$ (def. val.)
$\text{máx}(\text{máx}(1 - v(\beta), v(\gamma)), 1 - v(\gamma))$
$=$ (aritmética)
$\text{máx}(1 - v(\beta), v(\gamma), 1 - v(\gamma))$
$=$ (aritmética)
1

b. Sean $\alpha = p_0 \wedge p_1$ y $\beta = p_0$.

- Ambas son contingencias, ya que la valuación que hace verdaderas a todas las letras proposicionales hace verdaderas a ambas fórmulas, y la valuación que hace falsa a todas las letras proposicionales las hace falsas.
- Sea v_1 la valuación que hace falsas a las letras proposicionales con índice par y verdadero a las otras.

  Las fórmulas no son equivalentes ya que en esta valuación:

  $$v_1(p_0 \wedge p_1) = \text{mín}(v_1(p_0), v_1(p_1)) = \text{mín}(0, 1) = 0$$

  y

  $$v_1(p_1) = 1$$

- El siguiente tableau muestra que $p_0 \wedge p_1 \vDash p_1$:

$$\begin{array}{c} \mathbf{T}.p_0 \wedge p_1 * \\ \mathbf{F}.p_1 \\ | \\ \mathbf{T}.p_0 \\ \mathbf{T}.p_1 \times \\ \mathbf{F}.p_1 \times \end{array}$$

Ejercicio 3 (10 puntos)

Construya derivaciones que justifiquen los siguientes juicios.

a. $\alpha \to (\neg\beta \vee \gamma) \vdash \neg(\beta \to \gamma) \to \neg\alpha$

b. $\vdash (\alpha \leftrightarrow \neg\beta) \to (\neg(\alpha \wedge \beta) \wedge (\alpha \vee \beta))$

Nota: En ningún caso se aceptan justificaciones semánticas.

Propuesta de solución

a.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\beta \to \gamma)]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \to (\neg\beta \vee \gamma) \quad [\alpha]^2}{\neg\beta \vee \gamma}\,E\to \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg\beta]^4 \quad [\beta]^3}{\bot}\,E\neg}{\gamma}\,E\bot \qquad [\gamma]^4}{\gamma}\,E\vee^4}{\beta \to \gamma}\,I\to^3}{\bot}\,E\neg}{\neg\alpha}\,I\neg^2}{\neg(\beta \to \gamma) \to \neg\alpha}\,I\to^1$$

b.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\alpha \leftrightarrow \neg\beta]^1 \quad \dfrac{[\alpha \wedge \beta]^2}{\alpha}\,E\wedge}{\neg\beta}\,E\leftrightarrow \qquad \dfrac{[\alpha \wedge \beta]^2}{\beta}\,E\wedge}{\bot}\,E\neg}{\neg(\alpha \wedge \beta)}\,I\neg^2 \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg(\alpha \vee \beta)]^3 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\alpha \vee \beta)]^3 \qquad \dfrac{\dfrac{[\alpha \leftrightarrow \neg\beta]^1 \quad [\neg\beta]^4}{\alpha}\,E\leftrightarrow}{\alpha \vee \beta}\,I\vee}{\bot}\,E\neg}{\beta}\,RAA^4}{\alpha \vee \beta}\,I\vee}{\bot}\,E\neg}{\alpha \vee \beta}\,RAA^3}{\neg(\alpha \wedge \beta) \wedge (\alpha \vee \beta)}\,I\wedge}{(\alpha \leftrightarrow \neg\beta) \to (\neg(\alpha \wedge \beta) \wedge (\alpha \vee \beta))}\,I\to^1$$

Ejercicio 4 (6 puntos)

a. Demuestre que para todo $\Gamma \subseteq \texttt{PROP}$ consistente y para toda tautología α se cumple que $\Gamma \cup \{\alpha\}$ es consistente.

b. Demuestre que para todo $\Delta \subseteq \texttt{PROP}$ consistente maximal se cumple:

   I. Existe una contingencia α tal que $\Delta \cup \{\alpha\}$ es inconsistente.

   II. Para toda $\alpha \in \texttt{PROP}$: si $\Delta \vdash \alpha$ entonces $\alpha \in \Delta$.

Propuesta de solución

a. Como Γ es consistente, existe una valuación v tal que $v(\Gamma) = 1$ (por carecterización semántica de consistencia).

   Sea α una tautología. Entonces $v(\alpha) = 1$ y por lo tanto $v(\Gamma \cup \{\alpha\}) = 1$. Nuevamente por caracterización semántica de consistencia, $\Gamma \cup \{\alpha\}$ es consistente.

b. I. Consideramos la fórmula p_0 y analizamos dos casos:
   - Si $p_0 \notin \Delta$: Tomamos $\alpha = p_0$, que cumple que es una contingencia y $\Delta \cup \{p_0\}$ es inconsistente (por definición de consistente maximal).
   - Si $p_0 \in \Delta$: Tomamos $\alpha = \neg p_0$ que es una contingencia. Además, como Δ es consistente, $\neg p_0 \notin \Delta$ y entonces $\Delta \cup \{\neg p_0\}$ es inconsistente (por definición de consistente maximal).

   II. Si Δ es consistente maximal entonces Δ es teoría (práctico 5, ejercicio 9).

   Sea $\alpha \in \texttt{PROP}$:

$$
\begin{array}{ll}
\Delta \vdash \alpha & \\
\Leftrightarrow & \text{(def. de } \textsc{Cons}\text{)} \\
\alpha \in \textsc{Cons}(\Delta) & \\
\Leftrightarrow & (\Delta \text{ es teoría}) \\
\alpha \in \Delta &
\end{array}
$$

   Como se consideró un α arbitrario, queda probado que $(\bar{\forall}\alpha \in \texttt{PROP})(\Delta \vdash \alpha \Rightarrow \alpha \in \Delta)$