Primer parcial de Lógica

4 de mayo 2022

Indicaciones generales

- Apagar los celulares
- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **40** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (10 puntos)

Considere un nuevo conectivo binario $\lhd$. Sea $\mathcal{K} = \{\lhd, \neg\}$.

a. Dar una definición *inductiva libre* del conjunto $\mathtt{PROP}_{\mathcal{K}}$ de las fórmulas de $\mathtt{PROP}$ que solamente usan los conectivos de $\mathcal{K}$.

Ejemplos:

- p_1, $(\neg p_3)$, $(p_1 \lhd p_2)$, $(p_1 \lhd (\neg p_2))$ y $((\neg(p_1 \lhd p_2)) \lhd p_4)$ pertenecen a $\mathtt{PROP}_{\mathcal{K}}$.
- $\bot$, $(p_1 \vee p_2)$ y $((p_1 \lhd (\neg p_2)) \to p_2)$ no pertenecen a $\mathtt{PROP}_{\mathcal{K}}$.

b. I. Definir una función $G : \mathtt{PROP}_{\mathcal{K}} \to \{0,1\}$ tal que:

$G(\alpha) = 1$ sii en α aparece al menos un símbolo de negación en cualquier parte de la fórmula.

Ejemplos:
$G(p_i) = G((p_i \lhd p_2)) = 0$,
$G((\neg p_i)) = G(((\neg p_i) \lhd p_2)) = G(((\neg p_i) \lhd (\neg p_2))) = G(((\neg(\neg p_5)) \lhd (\neg p_2))) = 1$.

II. Definir una función $F : \mathtt{PROP}_{\mathcal{K}} \to \{0,1\}$ tal que:

$F(\alpha) = 1$ sii en α aparecen al menos **dos** símbolos de negación en cualquier parte de la fórmula.

Ejemplos:
$F(p_3) = F((p_2 \lhd p_2)) = F((\neg p_1)) = F(((\neg p_1) \lhd p_2)) = 0$
$F((\neg(\neg p_3))) = F(((\neg p_2) \lhd (\neg p_2))) = F(((\neg(\neg p_1)) \lhd (\neg p_2))) = F((p_1 \lhd (\neg(\neg p_2)))) = 1$

c. Se considera la semántica del conectivo $\lhd$ dada por la siguiente regla:

Para toda valuación v: $v((\alpha \lhd \beta)) = v(\alpha)$

Demostrar que para toda fórmula $\alpha \in \mathtt{PROP}_{\mathcal{K}}$ existe una letra proposicional p_i tal que α $\mathtt{eq}$ p_i o α $\mathtt{eq}$ $\neg p_i$.

d. ¿El conjunto de conectivos $\{\lhd, \neg\}$ es *funcionalmene completo*?. Fundamente su respuesta.

Bosquejo de solución

a. Definición de $\texttt{PROP}_{\mathcal{K}}$:

I Si $p_i \in \mathcal{P}$ entonces $p_i \in \texttt{PROP}_{\mathcal{K}}$
II Si $\alpha \in \texttt{PROP}_{\mathcal{K}}$ entonces $(\neg\alpha) \in \texttt{PROP}_{\mathcal{K}}$
III Si $\alpha \in \texttt{PROP}_{\mathcal{K}}$ y $\beta \in \texttt{PROP}_{\mathcal{K}}$ entonces $(\alpha \lhd \beta) \in \texttt{PROP}_{\mathcal{K}}$

b. I. $G : \texttt{PROP}_{\mathcal{K}} \to \{0,1\}$

I $G(p_i) = 0$
II $G((\neg\alpha)) = 1$
III $G((\alpha \lhd \beta)) = \max\{G(\alpha), G(\beta)\}$

II. $F : \texttt{PROP}_{\mathcal{K}} \to \{0,1\}$

I $F(p_i) = 0$
II $F((\neg\alpha)) = G(\alpha)$
III $F((\alpha \lhd \beta)) = 1$ sii $F(\alpha) = 1oF(\beta) = 1oG(\alpha) = G(\beta) = 1$

También se puede definir F de forma más elegante como:
$F : \texttt{PROP}_{\mathcal{K}} \to \{0,1\}$

I $F(p_i) = 0$
II $F((\neg\alpha)) = G(\alpha)$
III $F((\alpha \lhd \beta)) = \max\{F(\alpha), F(\beta), G(\alpha) \times G(\beta)\}$

c. Queremos probar: $(\bar{\forall}\alpha \in \texttt{PROP}_{\mathcal{K}})P(\alpha)$ donde:

$$P(\alpha) := ((\bar{\exists} p_i \in \mathcal{P})(\alpha \ \texttt{eq}\ p_i \text{ o } \alpha \ \texttt{eq}\ \neg p_i)$$

Se hará una prueba por inducción en el conjunto $\texttt{PROP}_{\mathcal{K}}$:

Paso Base

T) $P(p_k) : ((\bar{\exists} p_i \in \mathcal{P})(p_k \ \texttt{eq}\ p_i \text{ o } p_k \ \texttt{eq}\ \neg p_i)$

Demostración: Tomado $i = k$ se cumple $p_k \ \texttt{eq}\ p_k$ dado que toda fórmula es equivalente a sí misma.

Paso Inductivo 1

(H) $P(\alpha) : ((\bar{\exists} p_i \in \mathcal{P})(\alpha \ \texttt{eq}\ p_i \text{ o } \alpha \ \texttt{eq}\ \neg p_i)$

(T) $P(\neg\alpha) := ((\bar{\exists} p_i \in \mathcal{P})(\neg\alpha \ \texttt{eq}\ p_i \text{ o } \neg\alpha \ \texttt{eq}\ \neg p_i)$

Demostración

Por (H) existe p_i para el cual se cumple alguno de estos casos:

(1) $\alpha \ \texttt{eq}\ p_i$

(2) $\alpha \ \texttt{eq}\ \neg p_i$

Para el caso (1) tenemos:

$\neg\alpha$
$\texttt{eq}$ (teo. sustitución con (1))
$\neg p_i$

Para el caso (2) tenemos:

$\neg\alpha$
$\texttt{eq}$ (teo. sustitución con (2))
$\neg\neg p_i$
$\texttt{eq}$ (doble negación)
p_i

Por lo tanto, tomando p_i como testigo se cumple la tesis.

Paso inductivo 2

(H1) $P(\alpha) := ((\bar{\exists} p_i \in \mathcal{P})(\alpha \texttt{ eq } p_i \text{ o } \alpha \texttt{ eq } \neg p_i)$

(H2) $P(\beta) := ((\bar{\exists} p_i \in \mathcal{P})(\beta \texttt{ eq } p_i \text{ o } \beta \texttt{ eq } \neg p_i)$

(T) $P((\alpha \lhd \beta)) := ((\bar{\exists} p_i \in \mathcal{P})((\alpha \lhd \beta) \texttt{ eq } p_i \text{ o } (\alpha \lhd \beta) \texttt{ eq } \neg p_i)$

Demostración Por la definición de la semántica para el conectivo $\lhd$ sabemos que: $(\alpha \lhd \beta) \texttt{ eq } \alpha$ (*).

Consideramos p_i dado por el existencial de la hipótesis (H_1). Se cumple alguno de estos casos:

(1) $\alpha \texttt{ eq } p_i$

(2) $\alpha \texttt{ eq } \neg p_i$

Para el caso (1) tenemos:

$\alpha \lhd \beta$
$\texttt{eq}$ (por (*))
α
$\texttt{eq}$ (por (1))
p_i

Para el caso (2) tenemos:

$\alpha \lhd \beta$
$\texttt{eq}$ (por (*))
α
$\texttt{eq}$ (por (2))
$\neg p_i$

Por lo tanto, tomando p_i como testigo se cumple la tesis.

Aplicando el PIP del conjunto $\texttt{PROP}_{\mathcal{K}}$ concluimos que: $(\bar{\forall}\alpha \in \texttt{PROP}_{\mathcal{K}})P(\alpha)$.

d. El conjunto $\mathcal{K}$ **NO** es funcionalmente completo.

Por definición, $\mathcal{K}$ es funcionalmente completo si y sólo si $(\bar{\forall}\alpha \in \texttt{PROP})(\bar{\exists}\beta \in \texttt{PROP}_{\mathcal{K}})\alpha \texttt{ eq } \beta$.

Sea $\alpha = \bot$ y una fórmula cualquiera $\beta \in \texttt{PROP}_{\mathcal{K}}$.

Por parte c, existe una letra proposicional p_i tal que o bien $\beta \texttt{ eq } p_i$ o bien $\beta \texttt{ eq } \neg p_i$. Como $\bot$ no es equivalente a ningún p_i ni a ningún $\neg p_i$, $\bot$ no es equivalente a β.

Como esto vale para cualquier $\beta \in \texttt{PROP}_{\mathcal{K}}$, $\mathcal{K}$ no puede ser funcionalmente completo.

Ejercicio 2 (10 puntos)

a. Demuestre las siguientes afirmaciones. Justifique sin utilizar corrección y completitud.

I. $\models ((\alpha \to \beta) \wedge \neg\alpha) \vee \alpha$
II. $\models \alpha \wedge \neg\beta \to \alpha$

b. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.

I. $(\bar{\exists}\Gamma \subseteq \texttt{PROP})(\bar{\forall}\alpha \in \texttt{PROP})\,\Gamma \models \alpha$
II. $(\bar{\exists}\alpha \in \texttt{PROP})(\bar{\forall}\Gamma \subseteq \texttt{PROP})\,\Gamma \models \alpha$
III. $(\bar{\exists}\Gamma \subseteq \texttt{PROP})(\bar{\forall}\alpha \in \texttt{PROP})\,\Gamma \not\models \alpha$
IV. $(\bar{\forall}\Gamma \subseteq \texttt{PROP})(\bar{\forall}\alpha \in \texttt{PROP})\,\Gamma \models \neg\alpha$

Bosquejo de solución

a. I.

$$\begin{array}{c}
\mathbf{F}.((\alpha \to \beta) \wedge \neg\alpha) \vee \alpha \ * \\
| \\
\mathbf{F}.(\alpha \to \beta) \wedge \neg\alpha \ * \\
\mathbf{F}.\alpha \\
\begin{array}{cc}
\mathbf{F}.(\alpha \to \beta) \ * & \mathbf{F}.\neg\alpha \ * \\
\mathbf{F}.\alpha & \mathbf{F}.\alpha \\
| & | \\
\mathbf{T}.\alpha \ \times & \mathbf{T}.\alpha \ \times \\
\mathbf{F}.\beta & \mathbf{F}.\alpha \ \times \\
\mathbf{F}.\alpha \ \times &
\end{array}
\end{array}$$

Como todas las hojas del tableau son contradictorias, no existe ninguna valuación que haga falsa la fórmula, por lo que es tautología.

II.

$$\begin{array}{c}
\mathbf{F}.\alpha \wedge \neg\beta \to \alpha \ * \\
| \\
\mathbf{T}.\alpha \wedge \neg\beta \ * \\
\mathbf{F}.\alpha \\
| \\
\mathbf{T}.\alpha \ \times \\
\mathbf{T}.\neg\beta \\
\mathbf{F}.\alpha \ \times
\end{array}$$

Como todas las hojas del tableau son contradictorias, no existe ninguna valuación que haga falsa la fórmula, por lo que es tautología.

b. I. **VERDADERO**

Sea $\Gamma = \{\bot\}$, y α una fórmula de $\texttt{PROP}$ cualquiera. La siguiente derivación muestra que $\Gamma \vdash \alpha$:

$$\frac{\bot}{\alpha}\ E\bot$$

Entonces por completitud, $\Gamma \models \alpha$, lo que prueba la afirmación.

II. **VERDADERO**

Sea $\alpha = \neg\bot$ y $\Gamma \subseteq \texttt{PROP}$ cualquiera. Como $v(\neg\bot) = 1$ en cualquier valuación, se cumple $\Gamma \models \alpha$.

III. **FALSO**

Sea un Γ arbitrario y $\alpha = \neg\bot$. Por la parte b, se cumple $\Gamma \vDash \alpha$, lo que contradice la afirmación.

IV. **FALSO**

Sabemos por definición de valuación que $\nvDash \bot$ y por equivalentes: $\nvDash \neg\neg\bot$. Entonces, tomando $\Gamma = \emptyset$ y $\alpha = \neg\bot$ se cumple que $\Gamma \nvDash \neg\alpha$, por lo que la afirmación es falsa.

Ejercicio 3 (10 puntos)

a. Pruebe que si $\varphi \vdash \beta$ entonces $\neg\psi \vdash \varphi \lor \psi \to \beta$

b. Construya una derivación que pruebe el siguiente juicio: $\vdash \neg(\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\varphi \lor \psi) \land \neg(\varphi \land \psi)$

Nota: En este ejercicio no se aceptan consideraciones semánticas.

Bosquejo de solución

a. Por hip. sabemos que hay una derivación D_1 como la siguiente:

$$\begin{array}{c}\varphi\\ \bigtriangledown D_1\\ \beta\end{array}$$

Considerando esa derivación, podemos construir la siguiente:

$$\dfrac{\dfrac{[\varphi\lor\psi]^1 \qquad \begin{array}{c}[\varphi]^2\\ \bigtriangledown D_1\\ \beta\end{array} \qquad \dfrac{\dfrac{\neg\psi \quad [\psi]^2}{\bot}\,E_\neg}{\beta}\,E_\bot}{\beta}\,E_\lor^{(2)}}{\varphi\lor\psi\to\beta}\,I_\to^{(1)}$$

La regla (2) nos autoriza a cancelar todas las hipótesis φ de D_1.

b.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\varphi\leftrightarrow\psi)]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\varphi\lor\psi)]^2 \quad \dfrac{[\varphi]^3}{\varphi\lor\psi}\,I_\lor}{\bot}\,E_\neg}{\psi}\,E_\bot \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg(\varphi\lor\psi)]^2 \quad \dfrac{[\psi]^3}{\varphi\lor\psi}\,I_\lor}{\bot}\,E_\neg}{\varphi}\,E_\bot}{\varphi\leftrightarrow\psi}\,I_\leftrightarrow^{(3)}}{\bot}\,E_\neg}{\varphi\lor\psi}\,RAA^{(2)} \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg(\varphi\leftrightarrow\psi)]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{[\varphi\land\psi]^4}{\psi}\,E_\land \quad \dfrac{[\varphi\land\psi]^4}{\varphi}\,E_\land}{\varphi\leftrightarrow\psi}\,I_\leftrightarrow^{(3)}}{\bot}\,E_\neg}{\neg(\varphi\land\psi)}\,I_\neg^{(4)}}{\dfrac{(\varphi\lor\psi)\land\neg(\varphi\land\psi)}{\neg(\varphi\leftrightarrow\psi)\to(\varphi\lor\psi)\land\neg(\varphi\land\psi)}\,I_\to^{(1)}}\,I_\land$$

Ejercicio 4 (10 puntos)

Considere los siguientes conjuntos:

$C_\perp$: El conjunto de todas las contradicciones.

C_T: El conjunto de todos los teoremas.

Γ: Un conjunto consistente maximal.

Γ^C: El complemento de Γ

Δ: $\Gamma^C - C_\perp$ Es el complemento de Γ de donde se eliminaron todas las contradicciones.

a. Pruebe que Γ^C es inconsistente.
b. Pruebe que $\Gamma - C_T$ es consistente.
c. Pruebe que Δ sólo contiene contingencias.
d. Pruebe Δ no es una teoría.
e. Suponga que $p_1 \notin \Gamma$
   I. Pruebe que $(p_1 \wedge p_2) \in \Delta$ y $(p_1 \wedge \neg p_2) \in \Delta$
   II. Concluya que Δ es inconsistente.

Bosquejo de solución

a.

Γ es consistente maximal
$\Rightarrow$ (def. consistente)
$\Gamma \nvdash \perp$
$\Rightarrow$ (si $\perp$ estuviera en Γ, lo derivaría trivialmente)
$\perp \notin \Gamma$
$\Rightarrow$ (teo. conjuntos)
$\perp \in \Gamma^C$
$\Rightarrow$ (usando la derivación trivial: $\perp$)
$\Gamma^C \vdash \perp$

b.

Γ es consistente maximal
$\Rightarrow$ (caracterización semántica de consistencia)
Existe una valuación v tal que $v(\Gamma) = 1$
$\Rightarrow$ ($\Gamma - C_T \subseteq \Gamma$)
Existe una valuación v tal que $v(\Gamma - C_T) = 1$
$\Rightarrow$ (caracterización semántica de consistencia)
$\Gamma - C_T$ es consistente

c. Sea α_T una tautología cualquiera. Entonces:

$\models \alpha_T$
$\Rightarrow$ (en particular)
$\Gamma \models \alpha_T$
$\Rightarrow$ (Γ es consistente maximal)
$\alpha_T \in \Gamma$
$\Rightarrow$ (teo. conjuntos)
$\alpha_T \notin \Gamma^C$
$\Rightarrow$ ($\Delta \subseteq \Gamma^C$)
$\alpha_T \notin \Delta$

Sea $\alpha_\perp$ una contradicción cualquiera. Entonces:

$\alpha_\perp \in C_\perp$
$\Rightarrow$ (def. Δ)
$\alpha_\perp \notin \Delta$

Por lo tanto, en Δ sólo puede haber contingencias.

d. Por un lado sabemos que los conjuntos consistentes maximales son teorías. Además, las teorías deben contener a todos los teoremas. Entonces:

Γ es consistente maximal
$\Rightarrow$ (Γ es teoría)
$\neg\perp \in \Gamma$
$\Rightarrow$ (teo. conjuntos)
$\neg\perp \notin \Gamma^C$
$\Rightarrow$ ($\Delta \subseteq \Gamma^C$)
$\neg\perp \notin \Delta$
$\Rightarrow$ (las teorías contienen a todos los teoremas)
Δ no es teoría

e. I. Por hipótesis $p_1 \notin \Gamma$, entonces (por definición de consistente maximal) $\neg p_1 \in \Gamma$.
Si suponemos que $(p_1 \wedge p_2) \in \Gamma$. La siguiente derivación muestra que en este caso Γ sería inconsistente, lo que es absurdo:

$$\dfrac{\neg p_1 \qquad \dfrac{p_1 \wedge p_2}{p_1}\, E\wedge}{\perp}\, E\neg$$

entonces:

$(p_1 \wedge p_2) \notin \Gamma$
$\Rightarrow$ (teo. conjuntos)
$(p_1 \wedge p_2) \in \Gamma^C$
$\Rightarrow$ ($(p_1 \wedge p_2) \notin C_\perp$)
$(p_1 \wedge p_2) \in \Delta$

Análogamente, la siguiente derivación muestra que $(p_1 \wedge \neg p_2) \notin \Gamma$, ya que de otro modo Γ sería inconsistente:

$$\dfrac{\neg p_1 \qquad \dfrac{p_1 \wedge \neg p_2}{p_1}\, E\wedge}{\perp}\, E\neg$$

y entonces:

$(p_1 \land \neg p_2) \notin \Gamma$
$\Rightarrow$ (teo. conjuntos)
$(p_1 \land \neg p_2) \in \Gamma^C$
$\Rightarrow$ $((p_1 \land p_2) \notin C_\perp)$
$(p_1 \land \neg p_2) \in \Delta$

II. Como $(p_1 \land p_2) \in \Delta$ y $(p_1 \land \neg p_2) \in \Delta$, la siguiente derivación muestra que Δ es inconsistente:

$$\dfrac{\dfrac{p_1 \land \neg p_2}{\neg p_2}\, E\land \qquad \dfrac{p_1 \land p_2}{p_2}\, E\land}{\perp}\, E\neg$$