Primer parcial de Lógica

06 de mayo de 2021

Indicaciones generales

- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **40** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en el teórico y en el práctico del mismo. En esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.

Ejercicio 1 (10 puntos)

a. Dar una definición inductiva del conjunto `PROP'` subconjunto de `PROP` que tiene únicamente las fórmulas de `PROP` que se pueden construir usando los conectivos $\{\neg, \rightarrow\}$.

Ejemplos:

- $(\neg(p_0 \rightarrow (\neg p_1))) \in \texttt{PROP'}$
- $(p_0 \rightarrow \bot) \notin \texttt{PROP'}$

b. Defina siguiendo el ERP para `PROP'` una función $f : \texttt{PROP'} \times P \rightarrow \{0, 1\}$, donde P es el conjunto de todas las letras proposicionales, que indica si la letra proposicional ocurre en la fórmula.

Ejemplos:

- $f((\neg p_0), p_0) = 1$
- $f((\neg p_0), p_1) = 0$
- $f(((\neg(p_0 \rightarrow p_0)) \rightarrow p_2), p_2) = 1$
- $f(((\neg(p_0 \rightarrow p_0)) \rightarrow p_2), p_0) = 1$

c. Dada $\beta_1 \in \texttt{PROP'}$ que cumple $f(\beta_1, p_0) = 0$ demostrar usando el PIP que corresponde que:

$$(\bar{\forall}\alpha \in \texttt{PROP'}) f(\alpha[\beta_1/p_0], p_0) = 0$$

Bosquejo de solución

a. Definición inductiva de `PROP'`.

I $p_i \in \texttt{PROP'}$ con $i \in \mathbb{N}$

II Si $\alpha \in \texttt{PROP'}$, entonces $(\neg\alpha) \in \texttt{PROP'}$

III Si $\alpha \in \texttt{PROP'}$ y $\beta \in \texttt{PROP'}$, entonces $(\alpha \rightarrow \beta) \in \texttt{PROP'}$

b. Siguiendo el ERP para `PROP'`, definimos f.

$$
\begin{aligned}
&f : \texttt{PROP'} \times P \to \{0,1\} \\
&f(p_i, p_j) &&= \begin{cases} 1, & \text{si } i = j. \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases} \\
&f((\neg\alpha), p_j) &&= f(\alpha, p_j) \\
&f((\alpha \to \beta), p_j) &&= max\{f(\alpha, p_j), f(\beta, p_j)\}
\end{aligned}
$$

c. Sea $\sigma \in$ `PROP'` tal que $f(\sigma, p_0) = 0$ (llamémosle **(A)** a esta condición).

Tenemos que probar

$$(\bar{\forall}\omega \in \texttt{PROP'}) f(\omega[\sigma/p_0], p_0) = 0$$

Demostraremos esta propiedad usando el PIP para `PROP'`.

Identificación de la propiedad: $P(\omega) := f(\omega[\sigma/p_0], p_0) = 0$

Paso Base

T) $P(p_i) : f(p_i[\sigma/p_0], p_0) = 0$

Demo)

$f(p_i[\sigma/p_0], p_0)$
$=$ (Def. de sust.)

Se tienen dos casos:

Caso 1: $i = 0$

$f(p_0[\sigma/p_0], p_0)$
$=$ (Def. de sust.)
$f(\sigma, p_0)$
$=$ (Por **(A)**)
0

Caso 2: $i > 0$

$f(p_i[\sigma/p_0], p_0)$
$=$ (Def. de sust.)
$f(p_i, p_0)$
$=$ (Por def. de f, con $i \neq 0$)
0

Como se cumple la tesis para ambos casos y podemos diferenciar a los naturales como 0 o $n + 1$, se cumple la tesis.

Paso Inductivo

H1) $P(\alpha) : f(\alpha[\sigma/p_0], p_0) = 0$

T1) $P((\neg\alpha)) : f((\neg\alpha)[\sigma/p_0], p_0) = 0$

Demo)

$f((\neg\alpha)[\sigma/p_0], p_0)$
$=$ (Def. de sust. para $(\neg\alpha)$)
$f((\neg\alpha[\sigma/p_0]), p_0)$
$=$ (Def. de f)
$f(\alpha[\sigma/p_0], p_0)$
$=$ (Por (H1))
0

Por lo tanto se cumple la tesis.

H2) $P(\alpha) : f(\alpha[\sigma/p_0], p_0) = 0$
$P(\beta) : f(\beta[\sigma/p_0], p_0) = 0.$

T2) $P((\alpha \to \beta)) : f((\alpha \to \beta)[\sigma/p_0], p_0) = 0.$

Demo)

$f((\alpha \to \beta)[\sigma/p_0], p_0)$
$=$ (Def. de sust. para $(\alpha \to \beta)$)
$f((\alpha[\sigma/p_0] \to \beta[\sigma/p_0]), p_0)$
$=$ (Por def. de f)
$max\{f(\alpha[\sigma/p_0], p_0), f((\beta[\sigma/p_0], p_0)\}$
$=$ (Por (H2))
$max\{0, 0\}$
$=$ (Def. de max)
0

Por lo tanto se cumple la tesis.

Como nos encontramos en las hipótesis del PIP para `PROP'`, concluimos que:
$(\bar{\forall}\omega \in \texttt{PROP'}) f(\omega[\sigma/p_0], p_0) = 0$ con $\sigma \in \texttt{PROP'}$ tal que $f(\sigma, p_0) = 0$.

Ejercicio 2 (10 puntos)

a. Indique cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas y cuáles no. Justifique sus respuestas.

I. $(\bar{\forall}\Gamma \subseteq \texttt{PROP})(\bar{\forall}\alpha \in \texttt{PROP})(\bar{\forall}\beta \in \texttt{PROP})(\Gamma \models (\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \Gamma \models \alpha \text{ y } \Gamma \models \beta)$
II. $(\bar{\forall}\Gamma \subseteq \texttt{PROP})(\bar{\forall}\alpha \in \texttt{PROP})(\bar{\forall}\beta \in \texttt{PROP})(\Gamma \models (\alpha \vee \beta) \Rightarrow \Gamma \models \alpha \text{ o } \Gamma \models \beta)$

b. Sean $\Gamma \subseteq \texttt{PROP}$ y $\varphi \in \texttt{PROP}$. Se dice que φ es **independiente** de Γ si $\Gamma \not\models \varphi$ y $\Gamma \not\models \neg\varphi$.

Consideramos:

- $\Delta = \{p_1 \to (p_2 \wedge \neg p_3), \neg(p_3 \leftrightarrow p_2)\}$

Indique cuáles de las siguientes proposiciones son independientes de Δ y cuáles no. Justifique sus respuestas.

I. $\neg p_3$
II. $\neg p_1 \vee (p_2 \wedge \neg p_3)$
III. $\neg(p_1 \to p_1)$

Bosquejo de solución

a. I. La afirmación es **correcta**.
Demostración: Sean $\Gamma \subseteq \texttt{PROP}$, $\alpha, \beta \in \texttt{PROP}$.
Suponemos $\Gamma \models \alpha \wedge \beta$.
Sea $v \in \texttt{Val}$.

$$
\begin{aligned}
& v(\Gamma) = 1 \\
& \Rightarrow \text{(def. de } \models) \\
& v(\alpha \wedge \beta) = 1 \\
& \Leftrightarrow \text{(def. de valuación)} \\
& \min\{v(\alpha), v(\beta)\} = 1 \\
& \Leftrightarrow \text{(propiedad del mínimo)} \\
& v(\alpha) = 1 \text{ y } v(\beta) = 1
\end{aligned}
$$

De lo anterior concluimos que:

- $(\bar{\forall}v \in \texttt{Val})(v(\Gamma) = 1 \Rightarrow v(\alpha) = 1)$
- $(\bar{\forall}v \in \texttt{Val})(v(\Gamma) = 1 \Rightarrow v(\beta) = 1)$

Aplicando la definición de consecuencia lógica se obtiene: $\Gamma \models \alpha$ y $\Gamma \models \beta$.

II. La afirmación **no es correcta**. Damos el siguiente contra ejemplo:

- $\Gamma = \emptyset$
- $\alpha = p_o$
- $\beta = \neg p_o$

Claramente $\Gamma \models p_0 \vee \neg p_o$ dado que $(p_0 \vee \neg p_0)$ es una tautología.
Por otro lado: $\Gamma \not\models p_0$ ya que considerando una valuación v con $v(p_0) = 0$ vemos que $v(\Gamma) = 1$ (por vacuidad) y no se cumple la consecuencia lógica. Análogamente, se observa que $\Gamma \not\models \neg p_0$ considerando una valuación que asigne 1 a p_0.

b. I. $\neg p_3$ es independiente de Δ.

Si consideramos una valuación v que asigne $v(p_1) = 0,\ v(p_3) = 1,\ v(p_2) = 0$ tenemos :

- $v(\neg(p_3 \leftrightarrow p_2)) = 1 - v(p_3 \leftrightarrow p_2) = 1 - 0 = 1$
- $v(p_1 \to (p_2 \wedge \neg p_3)) = \text{máx}\{1 - v(p_1), v(p_2 \wedge \neg p_3)\} = \text{máx}\{1, v(p_2 \wedge \neg p_3)\} = 1$
- $v(\neg p_3) = 1 - v(p_3) = 0$

Considerando la valuación anterior, y la definición de consecuencia lógica, podemos afirmar que $\Delta \not\models \neg p_3$.

Consideremos ahora una valuación v que asigne $v(p_1) = 0,\ v(p_3) = 0,\ v(p_2) = 1$ Tenemos:

- $v(\neg(p_3 \leftrightarrow p_2)) = 1 - v(p_3 \leftrightarrow p_2) = 1 - 0 = 1$
- $v(p_1 \to (p_2 \wedge \neg p_3)) = \text{máx}\{1 - v(p_1), v(p_2 \wedge \neg p_3)\} = \text{máx}\{1, v(p_2 \wedge \neg p_3)\} = 1$
- $v(\neg\neg p_3) = 1 - v(\neg p_3) = 1 - (1 - v(p3)) = 0$

Considerando la valuación anterior y la definición de consecuencia lógica, podemos afirmar que $\Delta \not\models \neg\neg p_3$.

II. Observamos que la fórmula $\neg p_1 \vee (p_2 \wedge \neg p_3)$ es equivalente a una de las fórmulas de Δ, concretamente a la fórmula $p_1 \to (p_2 \wedge \neg p_3)$. Esta equivalencia la fundamentamos usando la siguiente equivalencia vista en el curso:

$$(\alpha \to \beta)\ \texttt{eq}\ (\neg\alpha \vee \beta)$$

.

Esto nos permite probar que $\Delta \models \neg p_1 \vee (p_2 \wedge \neg p_3)$ y por lo tanto no se cumple la independencia.

En efecto, sea v una valuación:

$v(\Delta) = 1$
$\Rightarrow$ ($p_1 \to (p_2 \wedge \neg p_3) \in \Delta$)
$v(p_1 \to (p_2 \wedge \neg p_3)) = 1$
$\Rightarrow$ (def. de $\texttt{eq}$)
$v(\neg p_1 \vee (p_2 \wedge \neg p_3)) = 1$
$\square$

III. Se observa que la fórmula $\neg(p_1 \to p_1)$ es una contradicción. En efecto, para cualquier valuación v, se cumple:
$v(\neg(p_1 \to p_1)) = 1 - \text{máx}\{1 - v(p_1), v(p_1)\} = 1 - 1 = 0$
Por lo tanto la fórmula negada: $\neg\neg(p_1 \to p_1)$ es una tautología y es consecuencia de cualquier conjunto.
Se concluye que la fórmula $\neg(p_1 \to p_1)$ no es independiente de Δ.

Ejercicio 3 (10 puntos)

Construya derivaciones que justifiquen los siguientes juicios.

a. $\neg(\neg(\alpha \to \beta) \vee \neg(\neg\beta \vee \alpha)) \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$
b. $\vdash (\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow \neg(\alpha \to (\beta \to \bot))$

Nota: En ningún caso se aceptan justificaciones semánticas.

Bosquejo de solución

a. $\neg(\neg(\alpha \to \beta) \vee \neg(\neg\beta \vee \alpha)) \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(\neg(\alpha\to\beta)\vee\neg(\neg\beta\vee\alpha)) \quad \dfrac{[\neg(\alpha\to\beta)]^2}{\neg(\alpha\to\beta)\vee\neg(\neg\beta\vee\alpha)}\,I\vee}{\bot}\,E\neg}{\alpha\to\beta}\,RAA^{(2)} \quad [\alpha]^1}{\beta}\,E\to \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(\neg(\alpha\to\beta)\vee\neg(\neg\beta\vee\alpha)) \quad \dfrac{[\neg(\neg\beta\vee\alpha)]^4}{\neg(\alpha\to\beta)\vee\neg(\neg\beta\vee\alpha)}\,I\vee}{\bot}\,E\neg}{\neg\beta\vee\alpha}\,RAA^{(4)} \quad \dfrac{\dfrac{[\neg\beta]^3 \quad [\beta]^1}{\bot}\,E\neg}{\alpha}\,E\bot \quad [\alpha]^3}{\alpha}\,E\vee^{(3)}}{\alpha\leftrightarrow\beta}\,I\leftrightarrow^{(1)}$$

Solución alternativa:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(\neg(\alpha\to\beta)\vee\neg(\neg\beta\vee\alpha)) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\beta]^5 \quad \dfrac{[\alpha\to\beta]^6 \quad [\alpha]^1}{\beta}\,E\to}{\bot}\,E\neg}{\neg(\alpha\to\beta)}\,I\neg^{(6)}}{\neg(\alpha\to\beta)\vee\neg(\neg\beta\vee\alpha)}\,I\vee}{\bot}\,E\neg}{\beta}\,RAA^{(5)} \qquad \dfrac{\dfrac{\neg(\neg(\alpha\to\beta)\vee\neg(\neg\beta\vee\alpha)) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\beta\vee\alpha]^3 \quad \dfrac{[\neg\beta]^4 \quad [\beta]^1}{\bot}\,E\neg \quad \dfrac{[\neg\alpha]^2 \quad [\alpha]^4}{\bot}\,E\neg}{\bot}\,E\vee^{(4)}}{\neg(\neg\beta\vee\alpha)}\,I\neg^{(3)}}{\neg(\alpha\to\beta)\vee\neg(\neg\beta\vee\alpha)}\,I\vee}{\bot}\,E\neg}{\alpha}\,RAA^{(2)}}{\alpha\leftrightarrow\beta}\,I\leftrightarrow^{(1)}$$

b. $\vdash (\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow \neg(\alpha \to (\beta \to \bot))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\alpha\to(\beta\to\bot)]^2 \quad \dfrac{[\alpha\wedge\beta]^1}{\alpha}\,E\wedge}{\beta\to\bot}\,E\to \quad \dfrac{[\alpha\wedge\beta]^1}{\beta}\,E\wedge}{\bot}\,E\to}{\neg(\alpha\to(\beta\to\bot))}\,I\neg^{(2)} \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg(\alpha\to(\beta\to\bot))]^1 \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\alpha\wedge\beta)]^3 \quad \dfrac{[\alpha]^4 \quad [\beta]^5}{\alpha\wedge\beta}\,I\wedge}{\bot}\,E\neg}{\beta\to\bot}\,I\to^{(5)}}{\alpha\to(\beta\to\bot)}\,I\to^{(4)}}{\bot}\,E\neg}{\alpha\wedge\beta}\,RAA^{(3)}}{\alpha\wedge\beta\leftrightarrow\neg(\alpha\to(\beta\to\bot))}\,I\leftrightarrow^{(1)}$$

Como alternativa para el subárbol derecho con conclusión $\alpha \wedge \beta$ e hipótesis $\neg(\alpha \to (\beta \to \bot))$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\alpha\to(\beta\to\bot))]^1 \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\alpha]^3 \quad [\alpha]^4}{\bot}\,E\neg}{\beta\to\bot}\,E\bot}{\alpha\to(\beta\to\bot)}\,I\to^{(4)}}{\bot}\,E\neg}{\alpha}\,RAA^{(3)} \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg(\alpha\to(\beta\to\bot))]^{(1)} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\beta]^5 \quad [\beta]^6}{\bot}\,E\neg}{\beta\to\bot}\,I\to^{(6)}}{\alpha\to(\beta\to\bot)}\,I\to}{\bot}\,E\neg}{\beta}\,RAA^{(5)}}{\alpha\wedge\beta}\,I\wedge$$

Ejercicio 4 (10 puntos)

Considere el siguiente conjunto $\Gamma = \{p_0\} \cup \{\neg(p_i \wedge p_{i+1}) : i \in \mathbb{N}\}$

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando cada respuesta:

a. Γ es consistente
b. Γ es completo
c. Γ es teoría
d. Γ es consistente maximal
e. Existe Δ_1 tal que $\Gamma \subseteq \Delta_1$ y Δ_1 es completo
f. Existe Δ_2 tal que $\Gamma \subseteq \Delta_2$ y Δ_2 es teoría
g. Existe Δ_3 tal que $\Gamma \subseteq \Delta_3$ y Δ_3 es consistente maximal

Bosquejo de solución

a. VERDADERO.

Sea v_a la valuación que hace verdadero a p_0 y falso al resto de las letras proposicionales.

Por un lado, $v_a(p_0) = 1$

y por otro, para cualquier $i \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} & v_a(\neg(p_i \wedge p_{i+1})) = \\ & 1 - min(v_a(p_i), v_a(p_{i+1})) = \\ & 1 - min(v_a(p_i), 0) = 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $v_a(\Gamma) = 1$ y el conjunto es consistente.

b. FALSO.

Sea v_b la siguiente valuación:

$$\begin{aligned} v_b(p_{2i}) &= 1 \\ v_b(p_{2i+1}) &= 0 \end{aligned}$$

Esta valuación cumple $v(p_0) = 1$ y además:

$$\begin{aligned} & v_b(\neg(p_i \wedge p_{i+1})) = \\ & 1 - min(v_b(p_i), v(p_{i+1})) = \\ & 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

Entonces v_b también satisface Γ, por lo que hay 2 valuaciones distintas que satisfacen Γ. Por lo tanto Γ no puede es completo.

c. FALSO.

$\Gamma \vdash \neg p_1$, pero $\neg p_1 \notin \Gamma$:

$$\dfrac{\dfrac{\neg(p_0 \wedge p_1) \qquad \dfrac{p_0 \quad [p_1]^1}{p_0 \wedge p_1}\, I\wedge}{\perp}\, E\neg}{\neg p_1}\, I\neg^{(1)}$$

d. FALSO.

Todo conjunto consistente maximal es teoría. Como Γ no es teoría, no puede ser consistente maximal.

e. VERDADERO.

$\Delta_1 = \Gamma \cup \{\neg p_i, \forall i \geq 1\}$

La valuación v_a que hace verdadero a p_0 y falso al resto de las letras proposicionales satisface Γ (por parte a) y cumple $v_a(\neg p_i) = 1, \forall i \geq 1$, por lo que satisface Δ_1. Recíprocamente, si una valuación hace verdadero a Δ_1 debe hacer verdadero a p_0 (porque tiene que hacer verdadero a Γ) y tiene que hacer falso a $p_i, \forall i \geq 1$.

Entonces v_a es la única valuación que satisface Δ_1, por lo que el conjunto es completo. Además incluye a Γ.

f. VERDADERO.

   $\Delta_2 = \textsc{Cons}(\Gamma)$

   Δ_2 es teoría por ser un $\textsc{Cons}$ e incluye a Γ.

g. VERDADERO.

   $\Delta_3 = \textsc{Cons}(\Delta_1)$

   Δ_1 es teoría (por ser un $\textsc{Cons}$) y es completo (porque Δ_1 es completo). Por lo tanto es consistente maximal. Además incluye a Γ porque Δ_1 incluye a Γ.