Primer parcial de Lógica

29 de abril 2019

Indicaciones generales

- Apagar los celulares
- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **40** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (12 puntos)

a. I. Dar una definición inductiva del conjunto $\mathcal{A}$ de todas las fórmulas de `PROP` que se pueden construir usando los conectivos $\{\neg, \wedge\}$ y que cumplan las siguientes condiciones:

  - Las letras proposicionales sólo aparecen negadas.
  - No aparecen otras negaciones que las que afectan a las letras proposicionales.

  Ejemplos: $\neg p_5, (\neg p_0 \wedge \neg p_3), ((\neg p_3 \wedge \neg p_8) \wedge (\neg p_3 \wedge \neg p_2)), (\neg p_1 \wedge (\neg p_1 \wedge \neg p_9)),$ $((\neg p_1 \wedge \neg p_1) \wedge \neg p_9)$

  II. Definir de acuerdo con el ERP, una función: $f : \mathcal{A} \to \texttt{PROP}$ de tal forma que $f(\alpha)$ sea el resultado de cambiar todos los conectivos $\wedge$ por $\vee$ y eliminar todas las negaciones de α.

  Ejemplos:

  - $f((\neg p_0 \wedge \neg p_3)) = (p_0 \vee p_3)$
  - $f(((\neg p_3 \wedge \neg p_8) \wedge (\neg p_3 \wedge \neg p_2))) = ((p_3 \vee p_8) \vee (p_3 \vee p_2))$

b. Probar que para toda $\alpha \in \mathcal{A}$ se cumple que:

  I. $f(\alpha) \vdash \neg\alpha$.
  II. $\neg\alpha \models f(\alpha)$
  III. Deduzca de las partes anteriores que: α `eq` $\neg f(\alpha)$

Bosquejo de solución

a. I. I $\neg p_i \in \mathcal{A}$ con $i \in \mathbb{N}$
  II Si $\alpha \in \mathcal{A}$ y $\beta \in \mathcal{A}$ entonces $(\alpha \wedge \beta) \in \mathcal{A}$

  II.

$$\begin{aligned} &f : \mathcal{A} \to \texttt{PROP} \\ &f(\neg p_i) \qquad = p_i \\ &f((\alpha \wedge \beta)) = (f(\alpha) \vee f(\beta)) \end{aligned}$$

b. I. Quiero probar $\bar{\forall}\alpha \in \mathcal{A},\ (f(\alpha) \vdash \neg\alpha)$

Demostración por PIP en $\mathcal{A}$.
Sea $P(\alpha) := f(\alpha) \vdash \neg\alpha$

Paso Base

T) $P(\neg p_i) := f(\neg p_i) \vdash \neg\neg p_i$

Demo.

$f(\neg p_i) \vdash \neg\neg p_i$
$\Leftrightarrow$ (def. de f)
$p_i \vdash \neg\neg p_i$
$\Leftrightarrow$ (corrección y completitud)
$p_i \models \neg\neg p_i$
$\Leftrightarrow$ (equivalentes)
$p_i \models p_i$

Paso Inductivo

HI) $P(\alpha) := f(\alpha) \vdash \neg\alpha$
$P(\beta) := f(\beta) \vdash \neg\beta$

TI) $P((\alpha \wedge \beta)) := f((\alpha \wedge \beta)) \vdash \neg(\alpha \wedge \beta)$

Demo.

$f((\alpha \wedge \beta)) \vdash \neg(\alpha \wedge \beta)$
$\Leftrightarrow$ (def. de f)
$f(\alpha) \vee f(\beta) \vdash \neg(\alpha \wedge \beta)$

Vamos a probar que $f(\alpha) \vee f(\beta) \vdash \neg(\alpha \wedge \beta)$.
Por **HI** tenemos que
$\bar{\exists} D \in DER,\ H(D) \subseteq \{f(\alpha)\}$ y $C(D) = \neg\alpha$ y
$\bar{\exists} D \in DER,\ H(D) \subseteq \{f(\beta)\}$ y $C(D) = \neg\beta$

Luego, podemos construir la siguiente derivación:

$$\dfrac{\dfrac{f(\alpha) \vee f(\beta) \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[f(\alpha)]^{(1)} \\ \vdots \\ \neg\alpha\end{array} \quad \dfrac{[\alpha \wedge \beta]^{(2)}}{\alpha}\,E\wedge}{\bot}\,E\neg \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[f(\beta)]^{(1)} \\ \vdots \\ \neg\beta\end{array} \quad \dfrac{[\alpha \wedge \beta]^{(2)}}{\beta}\,E\wedge}{\bot}\,E\neg}{\bot}\,E\vee(1)}{\neg(\alpha \wedge \beta)}\,I\neg(2)$$

Por tanto, $f(\alpha) \vee f(\beta) \vdash \neg(\alpha \wedge \beta)$.

Entonces, por PIP en $\mathcal{A}$,

$$\bar{\forall}\alpha \in \mathcal{A},\ (f(\alpha) \vdash \neg\alpha)$$

II. Quiero probar $\bar{\forall}\alpha \in \mathcal{A},\ (\neg\alpha \models f(\alpha))$

Demostración por PIP en $\mathcal{A}$.
Sea $P(\alpha) := \neg\alpha \models f(\alpha)$

Paso Base

T) $P(\neg p_i) := \neg\neg p_i \models f(\neg p_i)$

Demo.

$\neg\neg p_i \models f(\neg p_i)$
$\Leftrightarrow$ (def. de f)
$\neg\neg p_i \models p_i$
$\Leftrightarrow$ (equivalentes)
$p_i \models p_i$

Paso Inductivo

HI) $P(\alpha) := \neg\alpha \models f(\alpha)\ P(\beta) := \neg\beta \models f(\beta)$

TI) $P((\alpha \wedge \beta)) := \neg(\alpha \wedge \beta) \models f(\alpha \wedge \beta)$

Demo.

$\neg(\alpha \wedge \beta) \models f(\alpha \wedge \beta)$
$\Leftrightarrow$ (def. de f)
$\neg(\alpha \wedge \beta) \models f(\alpha) \vee f(\beta)$
$\Leftrightarrow$ (de Morgan)
$\neg\alpha \vee \neg\beta \models f(\alpha) \vee f(\beta)$
$\Leftrightarrow$ (corrección y completitud)
$\neg\alpha \vee \neg\beta \vdash f(\alpha) \vee f(\beta)$
Vamos a probar $\neg\alpha \vee \neg\beta \vdash f(\alpha) \vee f(\beta)$
Por **HI** tenemos que,
$\bar{\exists}D \in DER,\ H(D) \subseteq \{\neg\alpha\}$ y $C(D) = f(\alpha)$ y
$\bar{\exists}D \in DER,\ H(D) \subseteq \{\neg\beta\}$ y $C(D) = f(\beta)$

Luego, podemos construir la siguiente derivación,

$$\dfrac{\neg\alpha \vee \neg\beta \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\neg\alpha]^{(1)} \\ \vdots \\ f(\alpha)\end{matrix}}{f(\alpha) \vee f(\beta)}\, I\vee \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\neg\beta]^{(1)} \\ \vdots \\ f(\beta)\end{matrix}}{f(\alpha) \vee f(\beta)}\, I\vee}{f(\alpha) \vee f(\beta)}\, E\vee\,(1)$$

Por tanto, $\neg\alpha \vee \neg\beta \vdash f(\alpha) \vee f(\beta)$.

Entonces, por PIP $\bar{\forall}\alpha \in \mathcal{A},\ (\neg\alpha \models f(\alpha))$

III. Quiero probar α `eq` $\neg f(\alpha)$

α `eq` $\neg f(\alpha)$
$\Leftrightarrow$ (def. eq)
$\models \alpha \leftrightarrow \neg f(\alpha)$
$\Leftrightarrow$ (def. de tautología)
$\bar{\forall} v : val, \ : v(\alpha \leftrightarrow \neg f(\alpha)) = 1$
$\Leftrightarrow$ (def. de valuación)
$\bar{\forall} v : val, \ : v(\alpha) = 1 - v(f(\alpha))$
$\Leftrightarrow$ (aritmética)
$\bar{\forall} v : val, \ : 1 - v(\alpha) = v(f(\alpha))$
$\Leftrightarrow$ (def. de valuación)
$\bar{\forall} v : val, \ : v(\neg\alpha \leftrightarrow f(\alpha)) = 1$
$\Leftrightarrow$ (def. de tautología)
$\models \neg\alpha \leftrightarrow f(\alpha)$
$\Leftrightarrow$ (def. de eq)
$\neg\alpha$ `eq` $f(\alpha)$

Probaremos entonces el objetivo equivalente: $\neg\alpha$ `eq` $f(\alpha)$
Por **bi**: $f(\alpha) \vdash \neg\alpha$.
Por **bii**: $\neg\alpha \models f(\alpha)$. Entonces por completitud: $\neg\alpha \vdash f(\alpha)$.
Aplicando la regla de introducción de $\leftrightarrow$, podemos componer las dos derivaciones que prueban $f(\alpha) \vdash \neg\alpha$ y $\neg\alpha \vdash f(\alpha)$ obteniendo una derivación para $\vdash \neg\alpha \leftrightarrow f(\alpha)$.
Por correctitud, obtenemos $\models \neg\alpha \leftrightarrow f(\alpha)$. Por lo tanto, $\neg\alpha$ `eq` $f(\alpha)$ como queríamos probar.

Ejercicio 2 (10 puntos)

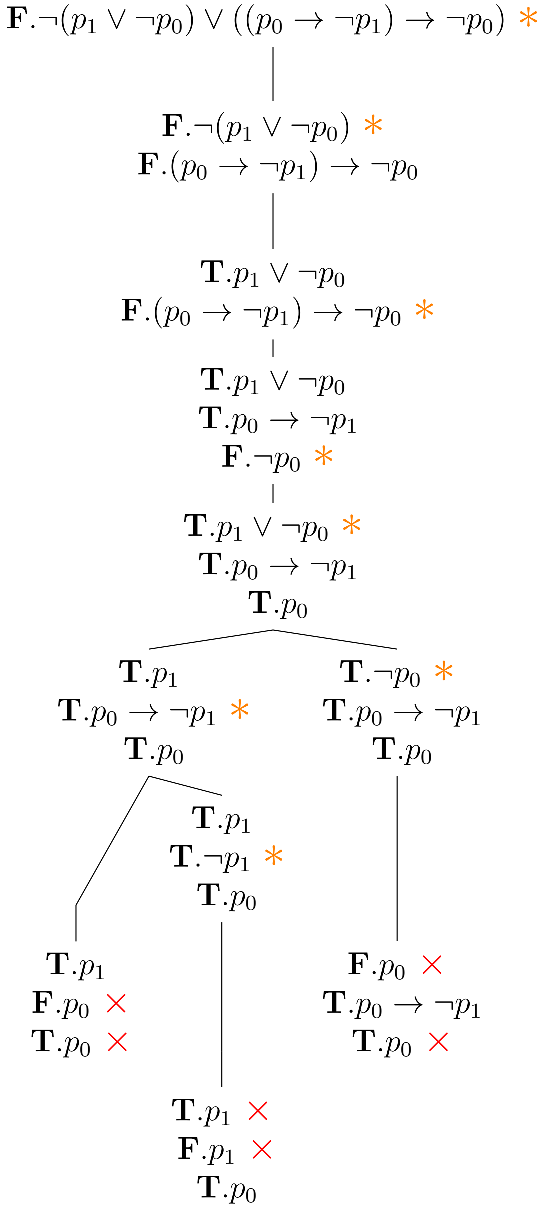
a. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.

   I. $\models \neg(p_1 \vee \neg p_0) \vee ((p_0 \to \neg p_1) \to \neg p_0)$
   II. $(p_0 \wedge p_1) \to p_2, p_2 \to p_3 \models p_0 \to p_3$
   III. $(\neg p_0 \vee p_1), \neg p_0 \to p_2 \models \neg p_1 \to p_2$
   IV. $p_0 \leftrightarrow (p_1 \wedge (p_2 \wedge p_3)), p_1 \vee p_0 \models \neg(p_2 \wedge p_3)$

b. Para cada una de las afirmaciones falsas de la parte anterior, encuentre una letra proposicional o la negación de una letra proposicional, que agregada como hipótesis haga que la afirmación sea verdadera. Justifique su respuesta.

Bosquejo de solución

a. I. **Verdadero**:



II. **Falso**: La valuación que asigna $v(p_0) = 1$, $v(p_1) = 0$, $v(p_2) = 0$, $v(p_3) = 0$, satisface las hipótesis pero no la tesis:

$v((p_0 \wedge p_1) \to p2)$
$= \text{(def. val.)}$
$max(1 - v(p_0 \wedge p_1), v(p2))$
$= \text{(def. val.)}$
$max(1 - min(v(p_0), v(p_1)), 0)$
$= \text{(def. } v\text{)}$
$1 - min(1, 0)$
$= \text{(def. } min \text{ y arit.)}$
1

$v(p_2 \to p_3)$
$= \text{(def. val.)}$
$max(1 - v(p_2), v(p_3))$
$= \text{(def. } v\text{)}$
$max(1 - 0, 0)$
$= \text{(def. } max\text{)}$
1

$v(p_0 \to p_3)$
$= \text{(def. val.)}$
$max(1 - v(p_0), v(p_3))$
$= \text{(def. } v\text{)}$
$max(1 - 1, 0)$
$= \text{(arit. y def. } max\text{)}$
0

III. **Verdadero**:

$(\neg p_0 \vee p_1), \neg p_0 \to p_2 \models \neg p_1 \to p_2$
$\Leftrightarrow$ (corrección y completitud)
$(\neg p_0 \vee p_1), \neg p_0 \to p_2 \vdash \neg p_1 \to p_2$

Probamos esto con la siguiente derivación:

$$\dfrac{\dfrac{\neg p_0 \vee p_1 \qquad \dfrac{\neg p_0 \to p_2 \quad [\neg p_0]^{(2)}}{p_2}\, E\to \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg p_1]^{(1)} \quad [p_1]^{(2)}}{\bot}\, E\neg}{p_2}\, E\bot}{p_2}\, E\vee\,(2)}{\neg p_1 \to p_2}\, I\to\,(1)$$

IV. **Falso**: La valuación que asigna $v(p_0) = 1$, $v(p_1) = 1$, $v(p_2) = 1$, $v(p_3) = 1$, satisface las hipótesis pero no la tesis:

$v(p_0 \leftrightarrow (p_1 \wedge (p_2 \wedge p_3))) = 1$
$\Leftrightarrow$ (def. val.)
$v(p_0) = v(p_1 \wedge (p_2 \wedge p_3))$
$\Leftrightarrow$ (def. val.)
$1 = min(v(p_1), v(p_2), v(p_3))$
$\Leftrightarrow$ (def. v)
$1 = min(1, 1, 1)$
$\Leftrightarrow$ (def. mín)
$1 = 1$
(Se cumple por aritmética)

$v(p_1 \vee p_0)$
$=$ (def. val.)
$max(v(p_1), v(p_0))$
$=$ (def. v)
$max(1, 1)$
$=$ (def. máx)
1

$v(\neg(p_1 \wedge p_3))$
$=$ (def. val.)
$1 - min(v(p_1), v(p_3))$
$=$ (def. v)
$1 - min(1, 1)$
$=$ (def. mín y arit.)
0

b. II. Agregamos la letra proposicional p_3 al conjunto de hipótesis y probamos:

$$(p_0 \wedge p_1) \to p_2, p_2 \to p_3, p_3 \models p_0 \to p_3$$

Por el teorema de corrección, basta con dar la siguiente derivación:

$$\frac{p_3}{p_0 \to p_3}\ I\to$$

IV. Agregamos la fórmula $\neg p_2$, negación de una letra proposicional, al conjunto de hipótesis y probamos:

$$p_0 \leftrightarrow (p_1 \wedge (p_2 \wedge p_3)), p_1 \vee p_0, \neg p_2 \models \neg(p_2 \wedge p_3)$$

Por el teorema de corrección, basta con dar la siguiente derivación:

$$\dfrac{\dfrac{\neg p_2 \qquad \dfrac{[p_2 \wedge p_3]^{(1)}}{p_2}\ E\wedge}{\bot}\ E\neg}{\neg(p_2 \wedge p_3)}\ I\neg(1)$$

Ejercicio 3 (8 puntos)

Construya derivaciones que justifiquen los siguientes juicios.

a. $\neg p \vee \neg q, r \vee \neg s \vdash p \wedge s \to r \wedge \neg q$

b. $p \vee q, p \to r, \neg s \to \neg q \vdash r \vee s$

Nota: En ningún caso se aceptan justificaciones semánticas.

Bosquejo de solución

a. $\neg p \vee \neg q, r \vee \neg s \vdash p \wedge s \to r \wedge \neg q$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{r \vee \neg s \quad [r]^{(2)} \quad \dfrac{\dfrac{[\neg s]^{(2)} \quad \dfrac{[p \wedge s]^{(1)}}{s}\,E\wedge}{\bot}\,E\neg}{r}\,E\bot}{r}\,E\vee(2) \qquad \dfrac{\neg p \vee \neg q \quad \dfrac{\dfrac{[\neg p]^{(3)} \quad \dfrac{[p \wedge s]^{(1)}}{p}\,E\wedge}{\bot}\,E\neg}{\neg q}\,E\bot \quad [\neg q]^{(3)}}{\neg q}\,E\vee(3)}{r \wedge \neg q}\,I\wedge}{p \wedge s \to r \wedge \neg q}\,I\to(1)
$$

b. $p \vee q, p \to r, \neg s \to \neg q \vdash r \vee s$

$$
\dfrac{p \vee q \qquad \dfrac{\dfrac{p \to r \quad [p]^{(1)}}{r}\,E\to}{r \vee s}\,I\vee_1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg s \to \neg q \quad [\neg s]^{(2)}}{\neg q}\,E\to \quad [q]^{(1)}}{\bot}\,E\neg}{s}\,RAA(2)}{r \vee s}\,I\vee_2}{r \vee s}\,E\vee(1)
$$

Ejercicio 4 (10 puntos)

Se recuerda que un conjunto $\Delta \subseteq \texttt{PROP}$ es completo si: Δ es consistente y para todo $\varphi \in \texttt{PROP}$ se cumple: $\Delta \vdash \varphi$ o $\Delta \vdash \neg\varphi$.

a. Sea v una valuación cualquiera. Sea v' la valuación que se define como:
   - $v'(p_i) = v(p_i)$ si $i \neq k$.
   - $v'(p_k) = 1 - v(p_k)$

   Demostrar que para toda $\varphi \in \texttt{PROP}$: si p_k no ocurre en φ entonces $v(\varphi) = v'(\varphi)$.

b. Demostrar que para todo $\Delta \subseteq \texttt{PROP}$: si $v(\Delta) = 1$ y $v'(\Delta) = 1$ entonces Δ no es completo.

c. Sea Γ un subconjunto finito de `PROP`. Demuestre que no es completo.

Bosquejo de solución

a. Se deduce del lema 1.2.3:

> Si $v_1(p_i) = v_2(p_i)$ para toda p_i que ocurre en φ, entonces $v_1(\varphi) = v_2(\varphi)$.

También se puede demostrar por inducción en `PROP`.

b. Según la caracterización semántica de la completitud (Práctico 5, Ejercicio 17):

> Γ es completo si y sólo si existe una única valuación tal que $v(\Gamma) = 1$

En nuestro caso tenemos dos valuaciones distintas tales que: $v(\Delta) = 1$ y $v'(\Delta) = 1$. Por lo tanto Δ no es completo.

Otra forma: probando que $\Delta \not\models p_k$ y $\Delta \not\models \neg p_k$ usando v y v' según corresponda como la valuación que falsea la relación $\models$.

c. Si Γ es inconsistente no es completo (por definición de completo).

Si Γ es consistente, existe una valuación v tal que $v(\Gamma) = 1$ (caracterización semántica de consistencia).

Como Γ es finito también lo es el conjunto de letras proposicionales que ocurren en las fórmulas de Γ. Entonces existe una letra proposicional p_k que no ocurre en ninguna fórmula de Γ.

Considero v' definida a partir de v como en la parte a). Aplicando lo demostrado en esta parte tendremos que $v'(\Gamma) = 1$.

Usando el resultado de la parte b) concluimos que Γ no es completo.