Primer parcial de Lógica

30 de abril 2018

Indicaciones generales

- Apagar los celulares
- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **40** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (10 puntos)

a. Defina inductivamente el conjunto $\mathtt{PROP}_{\vee,\to,\bot}$ subconjunto de $\mathtt{PROP}$ tal que su conjunto de conectivos es $\{\vee, \to, \bot\}$.

b. Defina siguiendo el ERP una función $f : \mathtt{PROP}_{\vee,\to,\bot} \to \mathtt{PROP}$ que a cada fórmula φ de $\mathtt{PROP}_{\vee,\to,\bot}$ le corresponde la fórmula que se obtiene sustituyendo cada letra proposicional p_i de φ por $(p_i \vee \neg p_i)$ y $\bot$ por $\neg\bot$.

   Ejemplo: $f((\bot \to (p_1 \vee p_0))) = ((\neg\bot) \to ((p_1 \vee \neg p_1) \vee (p_0 \vee \neg p_0)))$

c. Demuestre inductivamente que $(\bar{\forall}\varphi \in \mathtt{PROP}_{\vee,\to,\bot}) \models f(\varphi)$.

Bosquejo de solución

a.
   I $p_i \in \mathtt{PROP}_{\vee,\to,\bot}$

   II $\bot \in \mathtt{PROP}_{\vee,\to,\bot}$

   III Si $\alpha \in \mathtt{PROP}_{\vee,\to,\bot}$ y $\beta \in \mathtt{PROP}_{\vee,\to,\bot}$, entonces $(\alpha \vee \beta) \in \mathtt{PROP}_{\vee,\to,\bot}$

   IV Si $\alpha \in \mathtt{PROP}_{\vee,\to,\bot}$ y $\beta \in \mathtt{PROP}_{\vee,\to,\bot}$, entonces $(\alpha \to \beta) \in \mathtt{PROP}_{\vee,\to,\bot}$

b.

$$
\begin{array}{ll}
f : \mathtt{PROP}_{\vee,\to,\bot} \to \mathtt{PROP} & \\
f(p_i) & = (p_i \vee \neg p_i) \\
f(\bot) & = (\neg\bot) \\
f((\alpha \vee \beta)) & = (f(\alpha) \vee f(\beta)) \\
f((\alpha \to \beta)) & = (f(\alpha) \to f(\beta))
\end{array}
$$

c. $(\bar{\forall}\varphi \in \mathtt{PROP}_{\vee,\to,\bot}) \models f(\varphi)$

   Demostración usando el PIP para $\mathtt{PROP}_{\vee,\to,\bot}$.

   $P(\varphi) := \models f(\varphi)$

   Paso Base T) $P(p_i) = \models f(p_i)$

Demo.

$\models f(p_i)$
$\Leftrightarrow$ (definición de f)
$\models (p_i \vee \neg p_i)$
$\Leftrightarrow$ (definición de $\models$)
$(\bar{\forall} v : valuacion)(v((p_i \vee \neg p_i)) = 1)$
$\Leftrightarrow$ (definición de valuacion)
$(\bar{\forall} v : valuacion)(v(p_i) = 1 \ o \ v(\neg p_i) = 1)$
$\Leftrightarrow$ (definición de valuación)
$(\bar{\forall} v : valuacion)(v(p_i) = 1 \ o \ v(p_i) = 0)$
(Se cumple por la definición de valuación)

T) $P(p_i) = \models f(\bot)$

Demo.

$\models f(\bot)$
$\Leftrightarrow$ (definición de f)
$\models (\neg\bot)$
$\Leftrightarrow$ (definición de $\models$)
$(\bar{\forall} v : valuacion)(v((\neg\bot)) = 1)$
$\Leftrightarrow$ (definición de valuacion)
$(\bar{\forall} v : valuacion)(v(\bot) = 0)$
(Se cumple por la definición de valuación)

Paso Inductivo 1

HI1) $P(\alpha) = \ \models f(\alpha)$
$P(\beta) = \ \models f(\beta)$

TI1) $P((\alpha \vee \beta)) = \ \models f((\alpha \vee \beta))$

Demo.

(Por Hipótesis Inductiva)
$\models f(\beta)$
$\Rightarrow$ (definición de $\models$)
$(\bar{\forall} v : valuacion)(v(f(\beta)) = 1)$
$\Rightarrow$ (artimética)
$(\bar{\forall} v : valuacion)(max\{v(f(\alpha)), v(f(\beta))\} = 1)$
$\Rightarrow$ (definición de valuación)
$(\bar{\forall} v : valuacion)(v(f(\alpha) \vee f(\beta)) = 1)$
$\Rightarrow$ (definición de $\models$)
$\models (f(\alpha) \vee f(\beta))$
$\Rightarrow$ (definición de f)
$\models f((\alpha \vee \beta))$

Paso Inductivo 2

HI2) $P(\alpha) = \ \models f(\alpha)$
$P(\beta) = \ \models f(\beta)$

TI2) $P((\alpha \to \beta)) = \ \models f((\alpha \to \beta))$

Demo.

(Por Hipótesis Inductiva)

$\models f(\beta)$

$\Rightarrow$ (definición de $\models$)

$(\bar{\forall} v : valuacion)(v(f(\beta)) = 1)$

$\Rightarrow$ (artimética)

$(\bar{\forall} v : valuacion)(max\{1 - v(f(\alpha)), v(f(\beta))\} = 1)$

$\Rightarrow$ (definición de valuación)

$(\bar{\forall} v : valuacion)(v((f(\alpha) \to f(\beta))) = 1)$

$\Rightarrow$ (definición de $\models$)

$\models (f(\alpha) \to f(\beta))$

$\Rightarrow$ (definición de f)

$\models f((\alpha \to \beta))$

Ejercicio 2 (10 puntos)

Sean las siguientes fórmulas de PROP:

- $\varphi_1 = \neg p_0 \to (p_1 \vee \neg p_2)$
- $\varphi_2 = p_1 \to p_0$
- $\varphi_3 = p_2 \wedge \neg p_0$

Indique, justificando adecuadamente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a. $\varphi_1, \varphi_2 \models \varphi_3$
b. $\varphi_1, \varphi_2 \models \neg\varphi_3$
c. $\mathit{Subf}(\varphi_1) \models \varphi_3$, donde $\mathit{Subf}(\varphi_1)$ es el conjunto de subfórmulas de φ_1.
d. Existe $\alpha \in \mathtt{PROP}$, tal que $\not\models \alpha \to \varphi_3$ y $\varphi_1, \varphi_2 \models \alpha \to \varphi_3$.

Bosquejo de solución

a. **Falso.**

Considero cualquier valuación v tal que $v(p_0) = 1$. Luego,

$$\begin{array}{l} v(\varphi_1) \\ = (\text{def. } v \text{ y } \varphi_1) \\ \max\{1 - v(\neg p_0), v(p_1 \vee \neg p_2)\} \\ = (\text{def. } v \text{ y aritmética}) \\ \max\{1 - 1 + v(p_0), v(p_1 \vee \neg p_2)\} \\ = (\text{aritmética y } v(p_0) = 1) \\ \max\{1, v(p_1 \vee \neg p_2)\} \\ = (\text{def. } \max) \\ 1. \end{array}$$

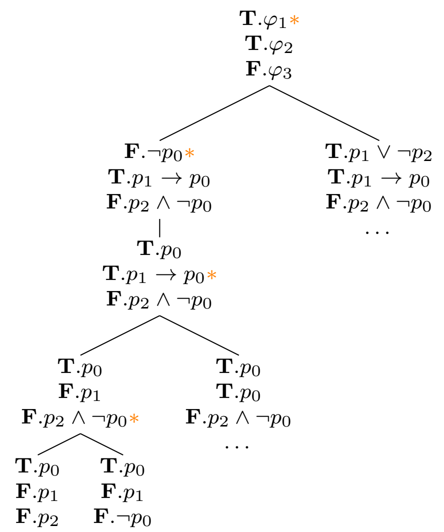
$$\begin{array}{l} v(\varphi_2) \\ = (\text{def. } v \text{ y } \varphi_2) \\ \max\{1 - v(p_1), v(p_0)\} \\ = (v(p_0) = 1) \\ \max\{1 - v(p_1), 1\} \\ = (\text{def. } \max) \\ 1. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} v(\varphi_3) \\ = (\text{def. } v \text{ y } \varphi_3) \\ \min\{v(p_2), v(\neg p_0)\} \\ = (\text{def. } v) \\ \min\{v(p_2), 1 - v(p_0)\} \\ = (v(p_0) = 1) \\ \min\{v(p_2), 1 - 1\} \\ = (\text{aritmética y def.} \min) \\ 0. \end{array}$$

Esa valuación v verifica las premisas pero falsifica la conclusión. Luego, $\varphi_1, \varphi_2 \not\models \varphi_3$.

Otra posibilidad. Hago el tableau semántico.

Hay muchos caminos que no cierran. De hecho, es posible construir solamente un fragmento del mismo de forma de quedarme con una valuación.



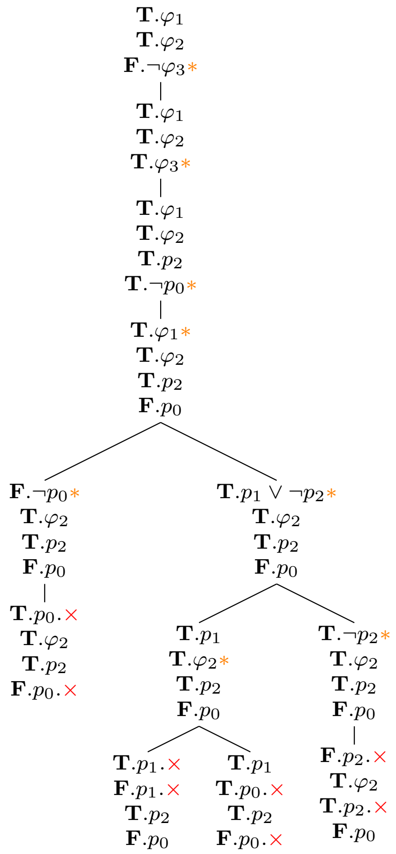
En este caso, obtengo una valuación tal que $v(p_0) = 1, v(p_1) = 0, v(p_2) = 0$.

b. **Verdadero.** Considero la siguiente justificación de $\varphi_1, \varphi_2 \vdash \neg\varphi_3$.

$$\dfrac{\dfrac{\varphi_1 \qquad \dfrac{[\varphi_3]^1}{\neg p_0}\,E\wedge_2}{p_1 \vee \neg p_2}\,E\to \qquad \dfrac{\dfrac{[\varphi_3]^1}{\neg p_0}\,E\wedge_2 \qquad \dfrac{\varphi_2 \quad [p_1]^2}{p_0}\,E\to}{\bot}\,E\neg \qquad \dfrac{[\neg p_2]^2 \qquad \dfrac{[\varphi_3]^1}{p_2}\,E\wedge_1}{\bot}\,E\neg}{\dfrac{\bot}{\neg\varphi_3}\,I\neg^1}\,E\vee^2$$

El teorema de consistencia nos permite concluír $\varphi_1, \varphi_2 \models \neg\varphi_3$.

Otra posibilidad. Hago el tableau semántico.



Como todas las hojas están cerradas, concluímos que $\varphi_1, \varphi_2 \models \neg\varphi_3$.

c. **Verdadero.** Observemos que $\{p_0, \neg p_0\} \subseteq \mathit{Subf}(\varphi_1)$. Por lo tanto, $\mathit{Subf}(\varphi_1)$ es insatisfactible. Como ninguna valuación puede satisfacer las premisas, tenemos que $\mathit{Subf}(\varphi_1) \models \varphi_3$.

d. **Verdadero.** Pretendo encontrar α tal que

$$\not\models \alpha \to \varphi_3 \qquad \text{y} \qquad \varphi_1, \varphi_2 \models \alpha \to \varphi_3.$$

Voy a tomar un α tal que en presencia de esas premisas pueda garantizar que vale φ_3. Sea $\alpha = \varphi_2 \to \varphi_3$.

Observemos las siguientes equivalencias:

$(\varphi_2 \to \varphi_3) \to \varphi_3$
eq (equivalencia de conectivos y teo. sustitución)
$(\neg\varphi_2 \vee \varphi_3) \to \varphi_3$
eq (equivalencia de conectivos y teo. sustitución)
$\neg(\neg\varphi_2 \vee \varphi_3) \vee \varphi_3$
eq (distributiva)
$(\neg\neg\varphi_2 \wedge \neg\varphi_3) \vee \varphi_3$
eq (doble negación y teo. sustitución)
$(\varphi_2 \wedge \neg\varphi_3) \vee \varphi_3$
eq (commutativa)
$\varphi_3 \vee (\varphi_2 \wedge \neg\varphi_3)$
eq (distributiva)
$(\varphi_3 \vee \varphi_2) \wedge (\varphi_3 \vee \neg\varphi_3)$
eq (tautologia $(\alpha \vee \neg\alpha)$ y teo.sustitución)
$(\varphi_3 \vee \varphi_2) \wedge \neg\bot$
eq (neutro $\wedge$)
$\varphi_2 \vee \varphi_3$.

O sea, pretendo mostrar que

$$\not\models \varphi_2 \vee \varphi_3 \qquad \text{y} \qquad \varphi_1, \varphi_2 \models \varphi_2 \vee \varphi_3.$$

La consecuencia semántica $\varphi_1, \varphi_2 \models \varphi_2 \vee \varphi_3$ es inmediata. Veremos la no-tautología usando un tableau semántico.

$$\begin{array}{c}
\mathbf{F}.\varphi_2 \vee \varphi_3 * \\
| \\
\mathbf{F}.\varphi_2 * \\
\mathbf{F}.\varphi_3 \\
| \\
\mathbf{T}.p_1 \\
\mathbf{F}.p_0 \\
\mathbf{F}.p_2 \wedge \neg p_0 *
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
\mathbf{T}.p_1 & \ldots \\
\mathbf{F}.p_0 & \\
\mathbf{F}.p_2 &
\end{array}$$

La rama que construida no ha sido cerrada. Cualquier valuación que cumpla $v(p_2) = 0$, $v(p_0) = 0$, $v(p_1) = 1$ muestra que $\varphi_2 \vee \varphi_3$ no es tautología.

Ejercicio 3 (10 puntos)

Construya derivaciones que justifiquen los siguientes juicios, donde p, q, r, s, t son letras proposicionales distintas.

a. $p \leftrightarrow \neg p \vdash \bot$

b. $p \vee q, p \to r, q \to s \vdash t \to \neg(\neg r \wedge \neg s)$

Nota: En ningún caso se aceptan justificaciones semánticas.

Bosquejo de solución

a. $p \leftrightarrow \neg p \vdash \bot$

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \leftrightarrow \neg p \quad [p]^2}{\neg p}\,E\leftrightarrow \qquad [p]^2}{\bot}\,E\neg}{\neg p}\,I\neg(2)
\qquad
\dfrac{\dfrac{[\neg p]^1 \qquad \dfrac{p \leftrightarrow \neg p \quad [\neg p]^1}{p}\,E\leftrightarrow}{\bot}\,E\neg}{p}\,RAA(1)}{}
}{\bot}\,E\neg
$$

b. $p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow s \vdash t \rightarrow \neg(\neg r \wedge \neg s)$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \vee q \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg r \wedge \neg s]^2}{\neg r}\,E\wedge \qquad \dfrac{p \rightarrow r \quad [p]^1}{r}\,E\rightarrow}{\bot}\,E\neg \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg r \wedge \neg s]^2}{\neg s}\,E\wedge \qquad \dfrac{q \rightarrow s \quad [q]^1}{s}\,E\rightarrow}{\bot}\,E\neg}{\bot}\,E\vee(1)}{\neg(\neg r \wedge \neg s)}\,I\neg(2)}{t \rightarrow \neg(\neg r \wedge \neg s)}\,I\rightarrow
$$

Ejercicio 4 (10 puntos)

Sean Δ_1 y Δ_2 subconjuntos de $\texttt{PROP}$ tales que $\Delta_1 \cup \Delta_2$ es inconsistente.

a) Demuestre que si $\Delta_1 = \emptyset$, entonces existe $\varphi \in \texttt{PROP}$ tal que $\Delta_1 \vdash \varphi$ y $\Delta_2 \vdash \neg\varphi$.

b) Demuestre que si $\Delta_1 = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$ para algún $k \geq 1$ y $\varphi \equiv (\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_k)$, entonces $\Delta_1 \models \varphi$ y $\Delta_2 \models \neg\varphi$.

c) Demuestre para Δ_1 infinito que: existe $\varphi \in \texttt{PROP}$ tal que $\Delta_1 \vdash \varphi$ y $\Delta_2 \vdash \neg\varphi$.

Bosquejo de solución

a. Si $\Delta_1 = \emptyset$, entonces $\Delta_1 \cup \Delta_2 = \Delta_2$ y por tanto Δ_2 es inconsistente. Elijo cualquier tautología φ. Luego se cumple:

- $\Delta_1 \vdash \varphi$ ya que una tautología se deduce de cualquier conjunto, en particular del conjunto vacío.
- $\Delta_2 \vdash \neg\varphi$ ya que cualquier fórmula se deriva de un conjunto inconsistente.

b. Supongamos $\Delta_1 = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$ con $k \geq 1$ y definimos $\varphi \equiv (\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_k)$.
Vamos a probar $\Delta_1 \models \varphi$ y $\Delta_2 \models \neg\varphi$.

$\Delta_1 \models \varphi$
$\Leftrightarrow$ (Def $\models$)
$\bar{\forall} v : val,\ v(\Delta_1) = 1 \Rightarrow v(\varphi) = 1$

Sea v_1 una valuación tal que $v_1(\Delta_1) = 1$, hay que probar $v_1(\varphi) = 1$.
Tenemos por definición de valuación aplicada a un conjunto que $v_1(\sigma_i) = 1$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$. Luego, por definición de valuación para la conjunción, tenemos $v_1((\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_k)) = 1$ y por tanto por definición de φ, $v_1(\varphi) = 1$.

$\Delta_2 \models \neg\varphi$
$\Leftrightarrow$ (Def $\models$)
$\bar{\forall} v : val,\ v(\Delta_2) = 1 \Rightarrow v(\neg\varphi) = 1$

Sea v_1 una valuación tal que $v_1(\Delta_2) = 1$, hay que probar $v_1(\neg\varphi) = 1$.
Como $\Delta_1 \cup \Delta_2$ es inconsistente no puede cumplirse que $v_1(\Delta_1) = 1$[1] . Por lo tanto, $v_1(\sigma_i) = 0$ para algún $\sigma_i \in \Delta_1$ y aplicando definición de valuación para la conjunción, tendremos que $v_1(\varphi) = 0$ y por lo tanto por definición de valuación $v_1(\neg\varphi) = 1$.

c. Supongamos Δ_1 infinito.

Como $\Delta_1 \cup \Delta_2$ es inconsistente, por definición de conjunto inconsistente $\Delta_1 \cup \Delta_2 \vdash \bot$.

Como las premisas de cualquier derivación son finitas[2], podemos asegurar que existe Δ_1', Δ_2' finitos, tal que $\Delta_1' \subseteq \Delta_1, \Delta_2' \subseteq \Delta_2$ y $\Delta_1' \cup \Delta_2'$ inconsistente. En particular, si $\Delta_1' \cup \Delta_2'$ inconsistente, $\Delta_1' \cup \Delta_2$ inconsistente.

Separemos en casos según Δ_1':

- Δ_1' es vacío. Aplicamos la parte a) y obtenemos φ tal que $\Delta_1' \vdash \varphi$ y $\Delta_2 \vdash \neg\varphi$. Como $\Delta_1' \subseteq \Delta_1$, concluimos que $\Delta_1 \vdash \varphi$.

- Δ_1' es no vacío. Entonces $\Delta_1 = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$ para algún $k \geq 1$ y aplicando la parte b), obtenemos un φ tal que $\Delta_1' \models \varphi$ y $\Delta_2 \models \neg\varphi$. Luego, por completitud: $\Delta_1' \vdash \varphi$ y $\Delta_2 \vdash \neg\varphi$. Como $\Delta_1' \subseteq \Delta_1$, concluimos que $\Delta_1 \vdash \varphi$

[1]Si $v_1(\Delta_1) = 1$ entonces $v_1(\Delta_1 \cup \Delta_2) = 1$ y el conjunto sería consistente
[2]También puede aplicarse el Teorema de Compacidad.