Primer parcial de Lógica

2 de Mayo 2017

Indicaciones generales

- Apagar los celulares
- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **40** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (10 puntos)

Sea $\Sigma = \{a, b, c\}$ un alfabeto y la siguiente definición de Σ^*

I $\epsilon \in \Sigma^*$

II Si $w \in \Sigma^*$ y $x \in \Sigma$ entonces $xw \in \Sigma^*$

a. Defina la función `reverse` : $\Sigma^* \to \Sigma^*$ tal que invierte los símbolos de la tira original.

   Ejemplo: $\texttt{reverse}(abcabb) = bbacba$

b. Sea y un elemento arbitrario de Σ, demuestre que se cumple:

   $(\bar{\forall} w \in \Sigma^*)(\texttt{reverse}(wy) = y\ \texttt{reverse}(w))$

c. Dé una definición inductiva del conjunto CAP de las tiras capicúas (palíndromes) de Σ^*.

d. Demuestre que la definición de CAP es correcta: $(\bar{\forall} w \in \text{CAP})(\ \texttt{reverse}(w) = w)$

e. Demuestre que $(\bar{\forall} w \in \Sigma^*)(w\ \texttt{reverse}(w) \in \text{CAP})$

f. A partir de las propiedades anteriores concluya que $(\bar{\forall} w \in \text{CAP})(ww \in \text{CAP})$

Bosquejo de solución

a. $\texttt{reverse}(\epsilon) = \epsilon$

   $\texttt{reverse}(xw) = \texttt{reverse}(w)x$

b. $(\bar{\forall} w \in \Sigma^*)(\texttt{reverse}(wy) = y\ \texttt{reverse}(w))$

   Se demuestra usando PIP para Σ^*. $P(w) := \texttt{reverse}(wy) = y\ \texttt{reverse}(w)$

   Paso Base

   T) $P(\epsilon) = \texttt{reverse}(\epsilon y) = y\ \texttt{reverse}(\epsilon)$

Demo.

$\texttt{reverse}(\epsilon y)$
$=$ (neutro de la concatenación de tiras)
$\texttt{reverse}(y)$
$=$ (neutro de la concatenación de tiras)
$\texttt{reverse}(y\epsilon)$
$=$ (definición de `reverse`)
$\texttt{reverse}(\epsilon)y$
$=$ (definición de `reverse`)
ϵy
$=$ (neutro de la concatenación de tiras)
y
$=$ (neutro de la concatenación de tiras)
$y\epsilon$
$=$ (definición de `reverse`)
$y\texttt{reverse}(\epsilon)$

Paso Inductivo

HI) $P(w) = \texttt{reverse}(wy) = y\ \texttt{reverse}(w)$
TI) $P(xw) = \texttt{reverse}(xwy) = y\ \texttt{reverse}(xw)$
Demo.

$\texttt{reverse}(xwy)$
$=$ (definición de reverse)
$\texttt{reverse}(wy)x$
$=$ (Hipótesis Inductiva)
$y\texttt{reverse}(w)x$
$=$ (definición de `reverse`)
$y\texttt{reverse}(xw)$

Entonces por la aplicación del PIP sobre Σ^*, $(\bar{\forall} w \in \Sigma^*)(\texttt{reverse}(wy) = y\ \texttt{reverse}(w))$

c. I $\epsilon \in CAP$
II Si $x \in \Sigma$ entonces $x \in CAP$
III Si $x \in \Sigma$, $w \in CAP$ entonces $xwx \in CAP$

d. $(\bar{\forall} w \in CAP)(\ \texttt{reverse}(w) = w)$

Se demuestra usando PIP para CAP. $P(w) := \texttt{reverse}(w) = w$

Paso Base 1

T) $P(\epsilon) = \texttt{reverse}(\epsilon) = \epsilon$
Demo.

$\texttt{reverse}(\epsilon)$
$=$ (definición de `reverse`)
ϵ

Paso Base 2

T) $P(x) = \texttt{reverse}(x) = x$

Demo.

$\texttt{reverse}(x)$
$=$ (neutro de la concatenación de tiras)
$\texttt{reverse}(x\epsilon)$
$=$ (definición de $\texttt{reverse}$)
$\texttt{reverse}(\epsilon)x$
$=$ (definición de $\texttt{reverse}$)
ϵx
$=$ (neutro de la concatenación de tiras)
x

Paso Inductivo

HI) $P(w) = \texttt{reverse}(w) = w$

TI) $P(xwx) = \texttt{reverse}(xwx) = xwx$

Demo.

$\texttt{reverse}(xwx)$
$=$ (definición de $\texttt{reverse}$)
$\texttt{reverse}(wx)x$
$=$ (parte b)
$x\texttt{reverse}(w)x$
$=$ (Hipótesis Inductiva)
xwx

Entonces por la aplicación del PIP sobre CAP, $(\bar{\forall} w \in CAP)(\ \texttt{reverse}(w) = w)$

e. $(\bar{\forall} w \in \Sigma^*)(w\ \texttt{reverse}(w)) \in CAP$

Se demuestra usando PIP para Σ^*. $P(w) := w\ \texttt{reverse}(w) \in CAP$

Paso Base

T) $P(\epsilon) = \epsilon\ \texttt{reverse}(\epsilon) \in CAP$

Demo.

$\epsilon\texttt{reverse}(\epsilon)$
$=$ (definición de $\texttt{reverse}$)
$\epsilon\epsilon$
$=$ (neutro de la concatenación de tiras)
ϵ

$\epsilon \in CAP$ por la primera regla de definición de CAP.

Paso Inductivo

HI) $P(w) = w\ \texttt{reverse}(w) \in CAP$

TI) $P(xw) = xw\ \texttt{reverse}(xw) \in CAP$

Demo.

$xw\texttt{reverse}(xw)$
$=$ (definición de $\texttt{reverse}$)
$xw\texttt{reverse}(w)x$

$xw\texttt{reverse}(w)x \in CAP$
$\Leftarrow$ (regla 3 de la definición de CAP)
$w\texttt{reverse}(w) \in CAP$
$\Leftarrow$ (Hipótesis Inductiva)

Entonces por la aplicación del PIP sobre Σ^*, $(\bar{\forall} w \in \Sigma^*)(w\ \texttt{reverse}(w)) \in CAP$

f. $(\bar{\forall} w \in CAP)(ww \in CAP)$

$w \in CAP$
$\Rightarrow$ (parte d)
$w = \texttt{reverse}(w)$
$\Rightarrow$ (concatenación)
$ww = w\texttt{reverse}(w)$
$\Rightarrow$ (parte e)
$ww \in CAP$

Ejercicio 2 (10 puntos)

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.

a. $(\bar{\exists}\varphi, \psi \in \texttt{PROP})$ $(\bar{\exists} v_1$ **valuación**$)$ $(v_1(\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)) = 1$ y $v_1(\varphi) = 1$ y $v_1(\psi) = 0)$.
b. $(\bar{\exists}\varphi \in \texttt{PROP})(\varphi \neq \bot$ y $\varphi \vDash \bot)$.
c. $(\bar{\forall}\varphi, \psi \in \texttt{PROP})$ $(\bar{\exists}\,\Gamma \subseteq \texttt{PROP})$ $(\Gamma \cup \{\psi\} \vDash (\varphi \to \psi) \vee (p_1 \to p_2))$.
d. Para todo $\varphi, \psi, \sigma \in \texttt{PROP}$, si $\varphi \wedge \psi \vDash \sigma$ entonces $\varphi \vDash \sigma$ y $\psi \vDash \sigma$.
e. $p_0 \to (\neg p_1 \vee \bot), p_0 \vDash \bot$.

Bosquejo de solución

a. $(\bar{\exists}\varphi, \psi \in \texttt{PROP})$ $(\bar{\exists} v_1$ **valuación**$)$ $(v_1(\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)) = 1$ y $v_1(\varphi) = 1$ y $v_1(\psi) = 0)$.

FALSO.

Sean $\varphi, \psi \in \texttt{PROP}$, v_1 **valuación**.

$v_1(\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)) = 1$
$\Leftrightarrow$ (De Morgan (eq. y sust.))
$v_1(\varphi \wedge \psi) = 1$
$\Leftrightarrow$ (def. valuación)
$v_1(\varphi) = 1$ y $v_1(\psi) = 1$
Lo que contradice: $v_1(\psi) = 0$.

b. $(\bar{\exists}\varphi \in \texttt{PROP})(\varphi \neq \bot$ y $\varphi \vDash \bot)$.

VERDADERO.

Tomo $\varphi = p_0 \wedge \neg p_0$.

$p_0 \wedge \neg p_0 \vDash \bot$
$\Leftrightarrow$ (def. $\vDash$)
$(\bar{\forall} v : val)(v(p_0 \wedge \neg p_0) = 1 \Rightarrow v(\bot) = 1)$

Sea $v : val$.
$(v(p_0 \wedge \neg p_0) = 0)$ por def de valuación
$\Rightarrow$ (antecedente falso)
$(v(p_0 \wedge \neg p_0) = 1 \Rightarrow v(\bot) = 1)$

Observación: También se podría probar utilizando corrección, tomando $\varphi = p_0 \wedge \neg p_0$ y construyendo la derivación $p_0 \wedge \neg p_0 \vdash \bot$.

c. $(\bar{\forall}\varphi, \psi \in \texttt{PROP})\ (\bar{\exists}\,\Gamma \subseteq \texttt{PROP})\ (\Gamma \cup \{\psi\} \models (\varphi \to \psi) \vee (p_1 \to p_2))$.

VERDADERO

Sean φ y $\psi \in \texttt{PROP}$ y $\Gamma = p_1 \to p_2$.

$$
\begin{array}{l}
p_1 \to p_2 \models p_1 \to p_2 \\
\Rightarrow {\scriptstyle (\Gamma \models \alpha \Rightarrow \Gamma \models \alpha \vee \beta)} \\
p_1 \to p_2 \models (\varphi \to \psi) \vee (p_1 \to p_2) \\
\Rightarrow {\scriptstyle (\Gamma \models \alpha \Rightarrow \Gamma \cup \Delta \models \alpha)} \\
p_1 \to p_2 \cup \{\psi\} \models (\varphi \to \psi) \vee (p_1 \to p_2)
\end{array}
$$

d. Para todo $\varphi, \psi, \sigma \in \texttt{PROP}$, si $\varphi \wedge \psi \models \sigma$ entonces $\varphi \models \sigma$ y $\psi \models \sigma$.

FALSO.

Sean $\varphi = p_0$, $\psi = p_1$, $\sigma = p_0 \wedge p_1$.
Hay que probar $p_0 \wedge p_1 \models p_0 \wedge p_1$ y $p_0 \not\models p_0 \wedge p_1$

$$
\begin{array}{l}
{\scriptstyle (\text{por definición de} \models)} \\
p_0 \wedge p_1 \models p_0 \wedge p_1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
p_0 \not\models p_0 \wedge p_1 \\
\Leftrightarrow {\scriptstyle (\text{def.} \not\models)} \\
(\bar{\exists} v : val)(v(p_0) = 1 \text{ y } v(p_0 \wedge p_1) = 0) \\
\text{Sea } v_1(p_0) = 1 \text{ y } v_1(p_1) = 0. \\
v(p_0) = 1 \text{ y } v(p_0 \wedge p_1) = 0
\end{array}
$$

e. $p_0 \to (\neg p_1 \vee \bot), p_0 \models \bot$.

FALSO.

$$
\begin{array}{l}
p_0 \to (\neg p_1 \vee \bot), p_0 \models \bot \\
\Leftrightarrow {\scriptstyle (\text{def} \models)} \\
(\bar{\forall} v : val)(v(p_0 \to (\neg p_1 \vee \bot)) = 1 \text{ y } v(p_0) = 1 \Rightarrow v(\bot) = 1)
\end{array}
$$

Sea $v_1 : val$ tal que $v_1(p_0) = 0$.

$$
\begin{array}{l}
{\scriptstyle (\text{Por def. valuación})} \\
v_1(p_0 \to (\neg p_1 \vee \bot)) = 1 \text{ y } v_1(\bot) = 0. \\
\Rightarrow {\scriptstyle (\text{def. valuación})} \\
p_0 \to (\neg p_1 \vee \bot), p_0 \not\models \bot
\end{array}
$$

Ejercicio 3 (10 puntos)

a. Construya una derivación que justifique el siguiente juicio:

$\gamma \to \alpha,\ \neg\alpha \to (\neg\beta \vee \alpha) \vdash \neg\alpha \to (\neg\beta \wedge \neg\gamma)$

b. Usando la parte anterior demuestre que:

$p_2 \to \neg p_1,\ p_3 \to p_1,\ \neg p_1 \to (\neg p_2 \vee p_1) \vdash \neg p_1 \to (\neg p_2 \wedge \neg p_3)$

c. Complete D_1 de forma tal que justifique:

$p_3 \to p_1,\ \neg p_1 \to (\neg p_2 \vee p_1) \vdash (p_2 \vee p_3) \to p_1$

siendo D_1:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg p_1 \to \neg p_2 \wedge \neg p_3 \quad \neg p_1}{\neg p_2 \wedge \neg p_3} E_{\to}}{\neg p_2} E_{\wedge} \qquad p_2}{\bot} E_{\neg}}{p_1} RAA}{(p_2 \vee p_3) \to p_1} I_{\to}$$

Sugerencia: utilizar la parte anterior.

Nota: En ningún caso se aceptan justificaciones semánticas.

Bosquejo de solución

a.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\alpha \to (\neg\beta \vee \alpha) \quad [\neg\alpha]^1}{\neg\beta \vee \alpha} E_{\to} \qquad \dfrac{[\neg\beta]^2 \quad \dfrac{\dfrac{[\neg\alpha]^1 \quad \dfrac{\gamma \to \alpha \quad [\gamma]^3}{\alpha} E_{\to}}{\bot} E_{\neg}}{\neg\gamma} I_{\neg}(3)}{\neg\beta \wedge \neg\gamma} I_{\wedge} \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg\alpha]^1 \quad [\alpha]^2}{\bot} E_{\neg}}{\neg\beta \wedge \neg\gamma} E_{\bot}}{\neg\beta \wedge \neg\gamma} E_{\vee}(2)}{\neg\alpha \to (\neg\beta \wedge \neg\gamma)} I_{\to}(1)$$

b. Considerando $\gamma = p_3,\ \beta = p_2,\ \alpha = p_1$, por la parte a sabemos que:

$p_3 \to p_1, \neg p_1 \to (\neg p_2 \vee p_1) \vdash \neg p_1 \to (\neg p_2 \wedge \neg p_3)$

$\Rightarrow$ (Def $\vdash$)

$\exists D_a \in DER,\ (H(D_a) \subseteq \{p_3 \to p_1, \neg p_1 \to (\neg p_2 \vee p_1)\}$ y $C(D_a) = \neg p_1 \to (\neg p_2 \wedge \neg p_3))$

$\Rightarrow$ (inclusión de conjuntos y def. de DER)

$\exists D_a \in DER,\ (H(D_a) \subseteq \{p_2 \to \neg p_1, p_3 \to p_1, \neg p_1 \to (\neg p_2 \vee p_1)\}$ y $C(D_a) = \neg p_1 \to (\neg p_2 \wedge \neg p_3))$

$\Rightarrow$ (Def $\vdash$)

$p_2 \to \neg p_1, p_3 \to p_1, \neg p_1 \to (\neg p_2 \vee p_1) \vdash \neg p_1 \to (\neg p_2 \wedge \neg p_3)$

c.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} p_3 \to p_1, \neg p_1 \to (\neg p_2 \vee p_1) \\ \bigtriangledown_{D_a} \\ \boldsymbol{\neg p_1 \to (p_2 \wedge \neg p_3)} \end{array} \quad \boldsymbol{[\neg p_1]^2}}{\boldsymbol{\neg p_2 \wedge \neg p_3}} E_{\to}}{\boldsymbol{\neg p_2}} E_{\wedge} \qquad \dfrac{\dfrac{[p_2 \vee p_3]^1 \quad \dfrac{[\neg p_2]^3 \quad [p_2]^4}{\bot} E_{\neg} \quad \dfrac{[\neg p_1]^2 \quad \dfrac{p_3 \to p_1 \quad [p_3]^4}{p_1} E_{\to}}{\bot} E_{\neg}}{\bot} E_{\vee}(4)}{p_2} RAA(3)}{\bot} E_{\neg}}{\boldsymbol{p_1}} RAA(2)}{\boldsymbol{p_2 \vee p_3 \to p_1}} I_{\to}(1)$$

Ejercicio 4 (10 puntos)

Considere una valuación v_1, tal que para algún i y j, $v_1(p_i) \neq v_1(p_j)$ y los siguientes conjuntos:

- $\Gamma = \{\varphi \in \texttt{PROP} \mid v_1(\varphi) = 1\}$.

- $\Delta^+ = \{\varphi \in \Gamma \mid \varphi$ es atómica $\}$
- $\Delta^- = \{\neg\varphi \mid \varphi$ es atómica y $\varphi \notin \Gamma\}$

Indique cuáles de las siguientes afirmaciones se cumple y cuáles no. Justifique su respuesta.

a. Γ es consistente maximal.
b. Δ^+ es consistente maximal.
c. Δ^- es completo.
d. $\Delta^+ \cup \Delta^-$ es completo.

Recuerde que un conjunto Γ es completo si y sólo si es consistente y para toda φ se cumple que: $\Gamma \vdash \varphi$ o $\Gamma \vdash \neg\varphi$.

Bosquejo de solución

a. **Verdadero**.

Por un lado, el conjunto es consistente, ya que la valuación v_1 lo satisface. Vamos a probar Γ es maximal

$\varphi \notin \Gamma$
$\Rightarrow$ (definición de Γ)
$v_1(\varphi) = 0$
$\Rightarrow$ (def valuación)
$v_1(\neg\varphi) = 1$
$\Rightarrow$ (def Γ)
$\neg\varphi \in \Gamma$
$\Rightarrow$ $(E_\neg)$
$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \bot$

Entonces, para cualquier $\varphi \notin \Gamma$, $\Gamma \cup \{\varphi\}$ es inconsistente, entonces Gamma es consistente maximal.

b. **Falso**.

Δ^+ es consistente por estar incluido en Γ. Pero $\neg\bot \notin \Delta^+$, ya que $\neg\bot$ no es atómica. Como $\Delta^+ \cup \{\neg\bot\}$ es consistente (la propia v_1 lo satisface), Δ^+ no puede ser maximal.

c. **Falso**.

Observamos que v_1 satisface Δ^-:

$\neg\varphi \in \Delta^-$

$\Longrightarrow$ (def. Δ^-)

$\varphi \notin \Gamma$

$\Longrightarrow$ (def. Γ)

$v_1(\varphi) = 0$

$\Longrightarrow$ (def. valuación)

$v_1(\neg\varphi) = 1$

Como existen i y j tal que $v_1(p_i) \neq v_1(p_j)$, alguno de ellos debe valer 1. Supongamos que $v_1(p_i) = 1$. Entonces:

$v_1(\neg p_i) = 0$

$\Longrightarrow$ (v_1 satisface Δ^-)

$\Delta^- \not\models \neg p_i$

$\Longrightarrow$ (corrección)

$\Delta^- \nvdash \neg p_i$.

Por otra parte $p_i \notin \Delta^-$ (no es la negación de una atómica), por lo que la valuación v_2 definida como:

$$\begin{array}{ll} v_2(\varphi) = 0, & \text{si } \varphi = p_i \\ v_2(\varphi) = v_1(\varphi), & \text{en otro caso} \end{array}$$

satisface Δ^-, pero hace falsa a p_i. Por lo tanto, $\Delta^- \not\models p_i$ y $\Delta^- \nvdash p_i$.

De los resultados anteriores se desprende que Δ^- no es completo.

d. **Verdadero**.

Por definición de Γ:

$v_1(\Gamma) = 1$

$\Longrightarrow$ ($\Delta^+ \subseteq \Gamma$)

$v_1(\Delta^+) = 1$

Como $v_1(\Delta^-) = 1$ (visto en la parte anterior), entonces $v_1(\Delta^+ \cup \Delta^-) = 1$.

Vamos a probar que v_1 es la única valuación que satisface este conjunto.

Sea v una valuación distinta de v_1. Entonces, debe existir un p_k tal que $v(p_k) \neq v_1(p_k)$.

- Si $v_1(p_k) = 1$, entonces $v(p_k) = 0$ y
  $p_k \in \Gamma$
  $\Longrightarrow$ (def Δ^+)
  $p_k \in \Delta^+$
  Por lo que v no satisface $\Delta^+ \cup \Delta^-$.
- Si $v_1(p_k) = 0$, entonces $v_1(\neg p_k) = 1$ y $v(\neg p_k) = 0$ y
  $p_k \notin \Gamma$
  $\Longrightarrow$ (def Δ^-)
  $\neg p_k \in \Delta^-$
  Por lo que v no satisface $\Delta^+ \cup \Delta^-$.

Por lo tanto, v_1 es la única valuación que satisface $\Delta^+ \cup \Delta^-$.

Sea $\varphi \in \texttt{PROP}$. Si $v_1(\varphi) = 1$ entonces $\Delta^+ \cup \Delta^- \models \varphi$. Si $v_1(\varphi) = 0$, entonces $v_1(\neg\varphi) = 1$ y $\Delta^+ \cup \Delta^- \models \neg\varphi$.

Por completitud, para todo $\varphi \in \texttt{PROP}$, $\Delta^+ \cup \Delta^- \vdash \varphi$ o $\Delta^+ \cup \Delta^- \vdash \neg\varphi$, por lo que el conjunto es completo.