Primer parcial de Lógica

2 de Mayo 2016

Indicaciones generales

- Apagar los celulares
- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **40** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (8 puntos)

Considere el siguiente alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ y el conjunto A definido a continuación:

i $00 \in A$

ii $11 \in A$

iii Si $w \in A$, entonces $w00 \in A$

iv Si $w \in A$, entonces $w11 \in A$

a. Defina la funcion $eval\colon A \to \mathbb{N}$ que para cada tira de A devuelve el natural que resulta de interpretarla como un número binario. Ej: $eval(1100) = 12$

b. Demostrar que $(\bar{\forall} w \in A)(eval(w)$ es múltiplo de 3).

Propuesta de solución

a.

$$
\begin{aligned}
&eval : A \to \mathbb{N} \\
&eval(00) &= 0 \\
&eval(11) &= 3 \\
&eval(w00) &= 4eval(w) + 0 \\
&eval(w11) &= 4eval(w) + 3
\end{aligned}
$$

b. Demostración por PIP en A.
Sea $P(w) := eval(w)$ es múltiplo de 3

Paso Base 1

T) $P(00) : eval(00)$ es múltiplo de 3

Demo.

Por definición de $eval$, $eval(00) = 0$, que es múltiplo de 3.

Paso Base 2

T) $P(11) : eval(11)$ es múltiplo de 3

Demo.

Por definición de $eval$, $eval(11) = 3$, que es múltiplo de 3.

Paso Inductivo 1

HI) $P(w) : eval(w)$ es múltiplo de 3

TI) $P(w00) : eval(w00)$ es múltiplo de 3

Demo.

Por HI:
$eval(w)$ es múltiplo de 3
$\Rightarrow$ (aritmética)
$4 \times eval(w)$ es múltiplo de 3
$\Rightarrow$ (def. $eval$)
$eval(w00)$ es múltiplo de 3

Paso Inductivo 2

HI) $P(w) : eval(w)$ es múltiplo de 3

TI) $P(w11) : eval(w11)$ es múltiplo de 3

Demo.

Por HI:
$eval(w)$ es múltiplo de 3
$\Rightarrow$ (aritmética)
$4eval(w)$ es múltiplo de 3
$\Rightarrow$ (aritmética)
$4eval(w) + 3$ es múltiplo de 3
$\Rightarrow$ (def. $eval$)
$eval(w11)$ es múltiplo de 3

Aplicando el PIP del conjunto A concluimos que: $\bar{\forall} w \in A,\ eval(w)$ es múltiplo de 3.

Ejercicio 2 (12 puntos)

Definimos inductivamente el lenguaje $\mathcal{H} \subseteq \texttt{PROP}$ de acuerdo a las siguientes reglas:

i Si $p_i \in P$, entonces $p_i \in \mathcal{H}$

ii Si $\varphi \in \mathcal{H}$ y $\psi \in \mathcal{H}$, entonces $(\varphi \wedge \psi) \in \mathcal{H}$

iii Si $p_i \in P$ y $\psi \in \mathcal{H}$, entonces $(p_i \to \psi) \in \mathcal{H}$

Indique si las siguientes frases son verdaderas o falsas. Justifique adecuadamente.

a. Todas las proposiciones de $\mathcal{H}$ son tautologías
b. Ninguna proposición de $\mathcal{H}$ es tautología
c. $\bar{\forall} \varphi \in \mathcal{H},\ \texttt{PROP} \models \varphi$
d. $\bar{\exists} v_1$ valuación, $\bar{\forall} \varphi \in \mathcal{H},\ v_1(\varphi) = 1$
e. $\bar{\exists} v_2$ valuación, $\bar{\forall} \psi \in \{(\neg\varphi) : \varphi \in \mathcal{H}\},\ v_2(\psi) = 1$

Propuesta de solución

a. **Falso.** Basta con dar una proposición que esté en $\mathcal{H}$ y no sea tautología. Considero p_0.

$p_0 \in \mathcal{H}$. La regla I afirma que todas las letras proposicionales están en $\mathcal{H}$. En particular, la letra proposicional p_0 está en $\mathcal{H}$.

$\not\models p_0$. Consideremos la valuación v que asigna cero a cada letra proposicional. Esta valuación muestra que p_0 no es una tautología.

b. **Falso.** Basta con dar una proposición que esté en $\mathcal{H}$ y sea tautología. Considero $(p_0 \to p_0)$.

$(p_0 \to p_0) \in \mathcal{H}$. La regla I afirma que todas las letras proposicionales están en $\mathcal{H}$. En particular, la letra proposicional p_0 está en $\mathcal{H}$. Luego, considerando $p_i = p_0$ y $\varphi = p_0$, la regla III afirma que $(p_0 \to p_0)$ está en $\mathcal{H}$.

$\models (p_0 \to p_0)$. Consideremos una valuación v arbitraria. Si v asigna cero a p_0, tendremos que

$$v(p_0 \to p_0) = \text{máx}\,\{1 - v(p_0), v(p_0)\} = \text{máx}\,\{1 - 0, 0\} = 1.$$

Y si v asigna uno a p_0, tendremos que

$$v(p_0 \to p_0) = \text{máx}\,\{1 - v(p_0), v(p_0)\} = \text{máx}\,\{1 - 1, 1\} = 1.$$

Vemos que bajo cualquier valuación el valor que toma $(p_0 \to p_0)$ es uno, y por lo tanto esta fórmula es una tautología.

c. **Verdadero.** Sea $\varphi \in \mathcal{H}$, y supongamos que tenemos una valuación v que hace uno a todas las fórmulas de `PROP`. Como $\mathcal{H} \subseteq$ `PROP` por la definición, tenemos que v hace uno a todas las fórmulas de $\mathcal{H}$ y en particular a φ. Por lo tanto $v(\varphi) = 1$.

Como esto vale para cualquier fórmula $\varphi \in \mathcal{H}$ y valuación v arbitrarias, concluimos que $\forall \varphi \in \mathcal{H}$, `PROP` $\models \varphi$.

d. **Verdadero.** Probaremos por inducción que todas las fórmulas de $\mathcal{H}$ toman el valor uno bajo la valuación v_1 que asigna uno a cada letra proposicional. La propiedad a probar es $\mathcal{P}(\varphi) := v_1(\varphi) = 1$.

Paso base

T) $\mathcal{P}(p_i) : v_1(p_i) = 1$

Demo.

Inmediato, por la definición de v_1.

Paso inductivo 1

HI) $\mathcal{P}(\varphi) : v_1(\varphi) = 1$

$\mathcal{P}(\psi) : v_1(\psi) = 1$

TI) $\mathcal{P}(\varphi \wedge \psi) := v_1(\varphi \wedge \psi) = 1$

Demo.

$$\begin{aligned} & v_1((\varphi \wedge \psi)) \\ & = \text{(def. de valuación)} \\ & \text{mín}\,\{v_1(\varphi), v_1(\psi)\} \\ & = \text{(HI)} \\ & \text{mín}\,\{1, 1\} \\ & = \\ & 1 \end{aligned}$$

Paso inductivo 2

HI) $\mathcal{P}(\psi) : v_1(\psi) = 1$

TI) $\mathcal{P}(p_i \to \psi) : v_1(p_i \to \psi) = 1$

Demo.

$v_1((p_i \to \psi))$
$=$ (def. de valuación)
$\max\{1 - v_1(p_i), v_1(\psi)\}$
$=$ (HI y def. de v_1)
$\max\{0, 1\}$
$=$
1

e. **Falso.** Consideremos la tautología proporcionada en la parte b. Cualquier valuación v_2 cumple que $v_2(\varphi) = 1$, y por lo tanto $v_2((\neg\varphi)) = 0$.

Como $\varphi \in \mathcal{H}$, entonces $\neg\varphi \in \{(\neg\varphi) : \varphi \in \mathcal{H}\}$, por lo que encontramos una fórmula en el conjunto que es falsa en todas las valuaciones.

Ejercicio 3 (10 puntos)

Construir derivaciones que justifiquen los siguientes juicios:

a. $\neg(\beta \vee \alpha) \vdash (\alpha \vee \beta) \to (\alpha \wedge \beta)$
b. $\vdash (\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\varphi \vee (\neg\varphi \wedge \psi))$

En ningún caso se aceptan justificaciones semánticas.

Propuesta de solución

a. $\neg(\beta \vee \alpha) \vdash (\alpha \vee \beta) \to (\alpha \wedge \beta)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\alpha \vee \beta]_{(1)} \qquad \dfrac{\neg(\beta \vee \alpha) \quad \dfrac{[\alpha]_{(2)}}{\beta \vee \alpha}\,I\vee}{\bot}\,E\neg \qquad \dfrac{\neg(\beta \vee \alpha) \quad \dfrac{[\beta]_{(2)}}{\beta \vee \alpha}\,I\vee}{\bot}\,E\neg}{\bot}\,E\vee_{(2)}}{\alpha \wedge \beta}\,E\bot}{(\alpha \vee \beta) \to (\alpha \wedge \beta)}\,I \to_{(1)}$$

b. $\vdash (\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\varphi \vee (\neg\varphi \wedge \psi))$

$$\dfrac{\dfrac{[\varphi \vee \psi]^1 \qquad \dfrac{[\varphi]^2}{\varphi \vee (\neg\varphi \wedge \psi)}\,I\vee \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg(\varphi \vee (\neg\varphi \wedge \psi))]^3 \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\varphi \vee (\neg\varphi \wedge \psi))]^3 \quad \dfrac{\dfrac{[\neg\varphi]^4 \quad [\psi]^2}{\neg\varphi \wedge \psi}\,I\wedge}{\varphi \vee (\neg\varphi \wedge \psi)}\,I\vee}{\bot}\,E\neg}{\varphi}\,RAA_{(4)}}{\varphi \vee (\neg\varphi \wedge \psi)}\,I\vee}{\bot}\,E\neg}{\varphi \vee (\neg\varphi \wedge \psi)}\,RAA_{(3)}}{\varphi \vee (\neg\varphi \wedge \psi)}\,E\vee_{(2)} \qquad \dfrac{[\varphi \vee (\neg\varphi \wedge \psi)]^1 \quad \dfrac{[\varphi]^5}{\varphi \vee \psi}\,I\vee \quad \dfrac{\dfrac{[\neg\varphi \wedge \psi]^5}{\psi}\,E\wedge}{\varphi \vee \psi}\,I\vee}{\varphi \vee \psi}\,E\vee_{(5)}}{(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\varphi \vee (\neg\varphi \wedge \psi))}\,I \leftrightarrow_{(1)}$$

Ejercicio 4 (10 puntos)

Considere los siguientes conjuntos:

- $\Gamma = \{p_i/\text{i es impar}\}$
- $\Delta = \{p_j \wedge p_m \to \neg p_n \,/\, \{p_j, p_m\} \subset \Gamma \text{ y } n = j + m\}$.

Nota: Tenga en cuenta los siguientes ejemplos.

- $p_3 \wedge p_3 \to \neg p_6 \in \Delta$
- $p_3 \wedge p_5 \to \neg p_{10} \notin \Delta$
- $p_{11} \wedge p_7 \to \neg p_{18} \in \Delta$

a. Probar que $\Delta \nvdash \bot$
b. Probar que $\Gamma \nvdash \bot$
c. Probar $\Delta \cup \Gamma \nvdash \neg p_0$
d. De un conjunto consistente maximal que contenga todos los elementos de Γ y Δ. Justifique.

Propuesta de solución

a. Sea v_0 la valuación que hace falsas a todas las letras proposicionales. Probaremos que $v_0(\Delta) = 1$.

   Sea $\varphi \in \Delta$. Por definición de Δ sabemos que φ es de la forma $p_j \wedge p_m \to \neg p_{j+m}$. Entonces:

   $$v_0(p_j \wedge p_m \to \neg p_{j+m})$$
   $$= \text{(def. valuación)}$$
   $$\max\{1 - v_0(p_j \wedge p_m), v_0(p_{j+m})\}$$
   $$= \text{(def. valuación)}$$
   $$\max\{1 - \min\{v_0(p_j), v_0(p_m)\}, v_0(p_{j+m})\}$$
   $$= \text{(def. } v_0\text{)}$$
   $$\max\{1 - \min\{0, 0\}, 0\}$$
   $$= \text{(aritmética)}$$
   $$1$$

   Por lo tanto hay una valuación que satisface a Δ, por lo que $\Delta \nvdash \bot$.

b. Consideremos la valuación v_1 que hace verdaderas a todas las letras proposicionales. Esa valuación hace verdaderas a todas las fórmulas de Γ porque todas son letras proposicionales. Por esto, Γ es consistente y por lo tanto no deriva $\bot$.

c. Consideremos la siguiente valuación:

   $$\begin{aligned} v(p_0) &= 1 \\ v(p_{2i+1}) &= 1 \\ v(p_{2i+2}) &= 0 \end{aligned}$$

   Probaremos que esta valuación satisface $\Gamma \cup \Delta$. Sea $\varphi \in \Gamma \cup \Delta$

   $$\text{Si } \varphi \in \Gamma$$
   $$\Rightarrow \text{(def. } \Gamma\text{)}$$
   $$\varphi = p_{2i+1}$$
   $$\Rightarrow \text{(def. } v\text{)}$$
   $$v(\varphi) = 1$$

   $$\text{Si } \varphi \in \Delta$$
   $$\Rightarrow \text{(def. } \Delta\text{)}$$
   $$\varphi = p_{2i+1} \wedge p_{2j+1} \to \neg p_{(2i+1)+(2j+1)}$$
   $$\Rightarrow \text{(aritmética)}$$
   $$\varphi = p_{2i+1} \wedge p_{2j+1} \to \neg p_{2(i+j)+2}$$
   $$\Rightarrow \text{(def. valuación)}$$
   $$v(\varphi) = \max\left\{1 - \min\{v(p_{2i+1}), v(p_{2j+1})\}, 1 - v(p_{2(i+j)+2})\right\}$$
   $$\Rightarrow \text{(def. } v\text{)}$$
   $$v(\varphi) = \max\{1 - \min\{1, 1\}, 1\}$$
   $$\Rightarrow \text{(aritmética)}$$
   $$v(\varphi) = 1$$

   Además, por definición de v, $v(\neg p_0) = 1 - v(p_0) = 0$. Por lo tanto $\Gamma \cup \Delta \nvDash \neg p_0$ y por corrección, $\Gamma \cup \Delta \nvdash \neg p_0$

d. Sea el conunto $\Omega = Cons(\Gamma \cup \Delta \cup \{p_0\})$. Es directo ver que este conjunto contiene a $\Gamma \cup \Delta$. Probaremos que es consistente maximal mostrando que es teoría y completo.

En primer lugar, el conjunto es teoría por ser un Cons.

La valuación v dada en la parte anterior satisface $\Gamma \cup \Delta$ por lo demostrado en esa parte y por definición cumple además $v(p_0) = 1$. Por lo tanto, $v(\Gamma \cup \Delta \cup \{p_0\}) = 1$ y por corrección v también satisface Ω. Por lo tanto, el conjunto es consistente. Para ver que es completo, mostraremos que esta es la única valuación que lo satisface.

Es directo ver que Ω contiene a p_0 y a todas las letras proposicionales impares por contener a Γ. Las letras proposicionales pares mayores que cero las podemos escribir como $2n + 2 = (2n+1)+1$ que son dos sumandos impares. Por lo tanto $p_{2n+1} \in \Gamma$, $p_1 \in \Gamma$ y $p_{2n+1} \wedge p_1 \to \neg p_{2n+2} \in \Delta$. Podemos derivar $\neg p_{2n+2}$ de $\Gamma \cup \Delta \cup p_0$:

$$\dfrac{p_{2n+1} \wedge p_1 \to \neg p_{2n+2} \qquad \dfrac{p_{2n+1} \quad p_1}{p_{2n+1} \wedge p_1}\, I\wedge}{\neg p_{2n+2}}\, E\to$$

Esta derivación muestra que $\neg p_{2n+2} \in \Omega$.

De lo anterior se concluye que Ω contiene todas las letras proposicionales o sus negaciones, por lo que v debe ser la una única valuación que lo satisface. Por lo tanto el Ω es completo y, como tambien es teoría, consistente maximal.

Solución alternativa: Sea v la valuación de la parte anterior. Ya se probó que $v(\Gamma \cup \Delta) = 1$. Sabemos que el conjunto $\Omega = \{\varphi \in \mathtt{PROP} | v(\varphi) = 1\}$ es consistente maximal por teorema del curso. Además, contiene todos los elementos de Γ y Δ, porque contiene a todas las fórmulas verdaderas en v.