Primer parcial de Lógica

8 de Mayo 2015

Indicaciones generales

- Apagar los celulares
- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **40** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (10 puntos)

Considere el siguiente conjunto BIN de los números binarios:

i $0 \in BIN$.

ii $1 \in BIN$.

iii $0\omega \in BIN$ si $\omega \in BIN$.

iv $1\omega \in BIN$ si $\omega \in BIN$.

a. Defina inductivamente el conjunto $BINL \subset BIN \times \mathbb{N}$, tal que el natural es la cantidad de dígitos del número binario menos 1.

b. De un elemento de $BIN \times \mathbb{N}$ que pertenezca a $BINL$ y otro que no. (No es necesario demostrar la pertenencia (o no) del elemento al conjunto).

c. Defina por recursión primitiva la función $f : BINL \to \mathtt{PROP}$ tal que si en la posición i (comenzando en 0) del número hay un 0, entonces en el resultado aparece $\neg p_i$ y si hay un 1, entonces en resultado aparece p_i y todos estos átomos están relacionados con $\wedge$. Ej: $f(\langle 110, 2\rangle) = (p_2 \wedge (p_1 \wedge \neg p_0))$.

d. Defina por recursión primitiva la función $g : BINL \to \mathtt{PROP}$ tal que si en la posición i (comenzando en 0) del número hay un 0, entonces en el resultado aparece p_i y si hay un 1, entonces en resultado aparece $\neg p_i$ y todos estos átomos están relacionados con $\vee$. Ej: $g(\langle 110, 2\rangle) = (\neg p_2 \vee (\neg p_1 \vee p_0))$

e. Demuestre por inducción la siguiente propiedad: $\bar{\forall}\langle \omega, n\rangle \in BINL, \models f(\langle \omega, n\rangle) \vee g(\langle \omega, n\rangle)$.

Propuesta de solución

a.
   i $\langle 0, 0\rangle \in BINL$

   ii $\langle 1, 0\rangle \in BINL$

   iii Si $\langle \omega, n\rangle \in BINL$, entonces $\langle 0\omega, n+1\rangle \in BINL$

   iv Si $\langle \omega, n\rangle \in BINL$, entonces $\langle 1\omega, n+1\rangle \in BINL$

b.

$$\langle 0,0\rangle \in BINL$$
$$\langle 0,1\rangle \notin BINL$$

c.

$$\begin{aligned}
&f : BINL \to \texttt{PROP}\\
&f(\langle 0,0\rangle) &&= \neg p_0\\
&f(\langle 1,0\rangle) &&= p_0\\
&f(\langle 0\omega, n+1\rangle) &&= (\neg p_{n+1} \land f(\langle \omega, n\rangle))\\
&f(\langle 1\omega, n+1\rangle) &&= (p_{n+1} \land f(\langle \omega, n\rangle))
\end{aligned}$$

d.

$$\begin{aligned}
&g : BINL \to \texttt{PROP}\\
&g(\langle 0,0\rangle) &&= p_0\\
&g(\langle 1,0\rangle) &&= \neg p_0\\
&g(\langle 0\omega, n+1\rangle) &&= (p_{n+1} \lor g(\langle \omega, n\rangle))\\
&g(\langle 1\omega, n+1\rangle) &&= (\neg p_{n+1} \lor g(\langle \omega, n\rangle))
\end{aligned}$$

e. Demostración por PIP en $BINL$.
Sea $P(\langle \omega, n\rangle) := \models f(\langle \omega, n\rangle) \lor g(\langle \omega, n\rangle)$

Paso Base 1

T) $P(\langle 0,0\rangle) : \models f(\langle 0,0\rangle) \lor g(\langle 0,0\rangle)$

Demo)

Sea v una valuación arbitraria. Entonces:

$$\begin{aligned}
&v(f(\langle 0,0\rangle) \lor g(\langle 0,0\rangle))\\
&= \text{(def. } f \text{ y } g)\\
&v(\neg p_0 \lor p_0)\\
&= \text{(def. v)}\\
&max\{1 - v(p_0), v(p_0)\}\\
&= (v(p_0) \in \{0,1\})\\
&1
\end{aligned}$$

Como v es arbitraria, se cumple $\models f(\langle 0,0\rangle) \lor g(\langle 0,0\rangle)$.

Paso Base 2

T) $P(\langle 1,0\rangle) : \models f(\langle 1,0\rangle) \lor g(\langle 1,0\rangle)$

Demo)

Sea v una valuación arbitraria. Entonces:

$$\begin{aligned}
&v(f(\langle 1,0\rangle) \lor g(\langle 1,0\rangle))\\
&= \text{(def. } f \text{ y } g)\\
&v(p_0 \lor \neg p_0)\\
&= \text{(def. v)}\\
&max\{v(p_0), 1 - v(p_0)\}\\
&= (v(p_0) \in \{0,1\})\\
&1
\end{aligned}$$

Como v es arbitraria, se cumple $\models f(\langle 1,0\rangle) \lor g(\langle 1,0\rangle)$.

Paso Inductivo 1

HI) $P(\langle \omega, n\rangle) : \models f(\langle \omega, n\rangle) \vee g(\langle \omega, n\rangle)$

TI) $P(\langle 0\omega, n+1\rangle) : \models f(\langle 0\omega, n+1\rangle) \vee g(\langle 0\omega, n+1\rangle)$

Demo)

Sea v una valuación arbitraria. Entonces:

$$
\begin{aligned}
& v(f(\langle 0\omega, n+1\rangle) \vee g(\langle 0\omega, n+1\rangle)) \\
& = \text{(def. } f\text{)} \\
& v((\neg p_{n+1} \wedge f(\langle \omega, n\rangle)) \vee g(\langle 0\omega, n+1\rangle)) \\
& = \text{(def. } g\text{)} \\
& v((\neg p_{n+1} \wedge f(\langle \omega, n\rangle)) \vee (p_{n+1} \vee g(\langle \omega, n\rangle))) \\
& = \text{(distributiva)} \\
& v((\neg p_{n+1} \vee (p_{n+1} \vee g(\langle \omega, n\rangle))) \wedge (f(\langle \omega, n\rangle) \vee (p_{n+1} \vee g(\langle \omega, n\rangle)))) \\
& = \text{(asociativa y conmutativa del } \vee\text{)} \\
& v((\neg p_{n+1} \vee p_{n+1} \vee g(\langle \omega, n\rangle)) \wedge ((f(\langle \omega, n\rangle) \vee g(\langle \omega, n\rangle)) \vee p_{n+1})) \\
& = \text{(def. v)} \\
& min\{v(\neg p_{n+1} \vee p_{n+1} \vee g(\langle \omega, n\rangle)), v((f(\langle \omega, n\rangle) \vee g(\langle \omega, n\rangle)) \vee p_{n+1})\} \\
& = \text{(def. v)} \\
& min\{max\{1 - v(p_{n+1}), v(p_{n+1}), v(g(\langle \omega, n\rangle))\}, v(f(\langle \omega, n\rangle) \vee g(\langle \omega, n\rangle)) \vee p_{n+1})\} \\
& = (v(p_{n+1}) \in \{0,1\}) \\
& min\{1, v(f(\langle \omega, n\rangle) \vee g(\langle \omega, n\rangle)) \vee p_{n+1})\} \\
& = \text{(def. v)} \\
& min\{1, max\{v(f(\langle \omega, n\rangle) \vee g(\langle \omega, n\rangle)), v(p_{n+1})\}\} \\
& = \text{(HI)} \\
& min\{1, max\{1, v(p_{n+1})\}\} \\
& = \text{(def. max)} \\
& min\{1, 1\} \\
& = \text{(def. min)} \\
& 1
\end{aligned}
$$

Como v es arbitraria, se cumple $\models f(\langle 0\omega, n+1\rangle) \vee g(\langle 0\omega, n+1\rangle)$

Paso Inductivo 2

HI) $P(\langle \omega, n\rangle) : \models f(\langle \omega, n\rangle) \vee g(\langle \omega, n\rangle)$

TI) $P(\langle 1\omega, n+1\rangle) : \models f(\langle 1\omega, n+1\rangle) \vee g(\langle 1\omega, n+1\rangle)$

Demo)

Sea v una valuación arbitraria. Entonces:

$v(f(\langle 1\omega, n+1\rangle) \vee g(\langle 1\omega, n+1\rangle))$
$=$ (def. f)
$v((p_{n+1} \wedge f(\langle \omega, n\rangle)) \vee g(\langle 0\omega, n+1\rangle))$
$=$ (def. g)
$v((\neg p_{n+1} \wedge f(\langle \omega, n\rangle)) \vee (\neg p_{n+1} \vee g(\langle \omega, n\rangle)))$
$=$ (distributiva)
$v((p_{n+1} \vee (\neg p_{n+1} \vee g(\langle \omega, n\rangle))) \wedge (f(\langle \omega, n\rangle) \vee (\neg p_{n+1} \vee g(\langle \omega, n\rangle))))$
$=$ (asociativa y conmutativa del $\vee$)
$v((p_{n+1} \vee \neg p_{n+1} \vee g(\langle \omega, n\rangle)) \wedge ((f(\langle \omega, n\rangle) \vee g(\langle \omega, n\rangle)) \vee \neg p_{n+1}))$
$=$ (def. v)
$min\{v(p_{n+1} \vee \neg p_{n+1} \vee g(\langle \omega, n\rangle)), v((f(\langle \omega, n\rangle) \vee g(\langle \omega, n\rangle)) \vee \neg p_{n+1})\}$
$=$ (def. v)
$min\{max\{v(p_{n+1}), 1 - v(p_{n+1}), v(g(\langle \omega, n\rangle))\}, v(f(\langle \omega, n\rangle) \vee g(\langle \omega, n\rangle)) \vee \neg p_{n+1})\}$
$=$ ($v(p_{n+1}) \in \{0,1\}$)
$min\{1, v(f(\langle \omega, n\rangle) \vee g(\langle \omega, n\rangle)) \vee \neg p_{n+1})\}$
$=$ (def. v)
$min\{1, max\{v(f(\langle \omega, n\rangle) \vee g(\langle \omega, n\rangle)), 1 - v(p_{n+1})\}\}$
$=$ (HI)
$min\{1, max\{1, 1 - v(p_{n+1})\}\}$
$=$ (def. max)
$min\{1, 1\}$
$=$ (def. min)
1

Como v es arbitraria, se cumple $\models f(\langle 1\omega, n+1\rangle) \vee g(\langle 1\omega, n+1\rangle)$

Como nos encontramos en las hipótesis del PIP para $BINL$, concluimos que

$$\bar{\forall}\, \langle \omega, n\rangle \in BINL,\ \models f(\langle \omega, n\rangle) \vee g(\langle \omega, n\rangle)$$

Ejercicio 2 (10 puntos)

Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, **justificando por mecanismos semánticos**.

a. Si $\alpha \models \gamma$ y $\beta \models \gamma$ entonces $\alpha \vee \beta \models \gamma$
b. Si $\alpha \vee \beta \models \gamma$ entonces $\alpha \models \gamma$ y $\beta \models \gamma$
c. $\not\models (p_0 \vee p_1) \leftrightarrow p_2$
d. $p_0 \to (p_1 \vee p_2), \neg p_1 \models p_0 \to p_2$

Propuesta de solución

a. **Verdadero.** Sea v una valuación arbitraria tal que $v(\alpha \vee \beta) = 1$. Por definición de valuación:

$$v(\alpha \vee \beta) = max\{v(\alpha), v(\beta)\}$$

Por lo tanto se debe cumplir o bien $v(\alpha) = 1$ o bien $v(\beta) = 1$.

Caso 1) $v(\alpha) = 1$
En este caso, como por hipótesis $\alpha \models \gamma$, se debe cumplir que $v(\gamma) = 1$
Caso 2) $v(\beta) = 1$
En este caso, como por hipótesis $\beta \models \gamma$, se debe cumplir que $v(\gamma) = 1$

Por lo tanto, se cumple $\alpha \vee \beta \models \gamma$.

b. **Verdadero.**

Sea una valuación v tal que $v(\alpha) = 1$. Entonces:

$$v(\alpha) = 1$$
$$\Rightarrow \text{(def. max)}$$
$$max\{v(\alpha), v(\beta)\} = 1$$
$$\Leftrightarrow \text{(def. v)}$$
$$v(\alpha \vee \beta) = 1$$
$$\Rightarrow \text{(hipótesis)}$$
$$v(\gamma) = 1$$

Por lo tanto, se cumple $\alpha \models \gamma$.

Análogamente, se cumple $\beta \models \gamma$.

c. **Verdadero.** Sea v la valuación tal que:

$$v(p_i) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces:

$$
\begin{array}{l}
v((p_0 \vee p_1) \leftrightarrow p_2) = 0 \\
\Leftrightarrow \text{(def. de valuación)} \\
v(p_0 \vee p_1) \neq v(p_2) \\
\Leftrightarrow \text{(def. de valuación)} \\
max\{v(p_0), v(p_1)\} \neq v(p_2) \\
\Leftrightarrow \text{(def. v)} \\
max\{0, 0\} \neq 1 \\
\Leftrightarrow \text{(def. max)} \\
0 \neq 1
\end{array}
$$

Lo que se cumple trivialmente. Por lo tanto, encontramos una valuación v tal que $v((p_0 \vee p_1) \leftrightarrow p_2) = 0$. Esto implica que la fórmula no es una tautología y (por corrección) tampoco puede ser un teorema.

d. **Verdadero.** El siguiente tableau muestra que la consecuencia semántica se cumple:

$$
\begin{array}{c}
\mathbf{T}.p_0 \to (p_1 \vee p_2) \\
\mathbf{T}.\neg p_1 * \\
\mathbf{F}.p_0 \to p_2 \\
| \\
\mathbf{T}.p_0 \to (p_1 \vee p_2) \\
\mathbf{F}.p_1 \\
\mathbf{F}.p_0 \to p_2 * \\
| \\
\mathbf{T}.p_0 \to (p_1 \vee p_2) * \\
\mathbf{F}.p_1 \\
\mathbf{T}.p_0 \\
\mathbf{F}.p_2 \\
\begin{array}{cc}
\diagup & \diagdown \\
\begin{array}{c}
\mathbf{F}.p_0 \times \\
\mathbf{F}.p_1 \\
\mathbf{T}.p_0 \times \\
\mathbf{F}.p_2
\end{array}
&
\begin{array}{c}
\mathbf{T}.p_1 \vee p_2 * \\
\mathbf{F}.p_1 \\
\mathbf{T}.p_0 \\
\mathbf{F}.p_2 \\
\begin{array}{cc}
\diagup & \diagdown \\
\begin{array}{c}
\mathbf{T}.p_1 \times \\
\mathbf{F}.p_1 \times \\
\mathbf{T}.p_0 \\
\mathbf{F}.p_2
\end{array}
&
\begin{array}{c}
\mathbf{T}.p_2 \times \\
\mathbf{F}.p_1 \\
\mathbf{T}.p_0 \\
\mathbf{F}.p_2 \times
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

Ejercicio 3 (10 puntos)

Construya derivaciones que justifiquen los siguientes juicios:

a. $\vdash ((\alpha \to \gamma) \wedge (\beta \to \gamma)) \leftrightarrow (\alpha \vee \beta \to \gamma)$

b. $\vdash (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \to \gamma)$

En ningún caso se aceptan justificaciones semánticas.

Propuesta de solución

a.

$$\dfrac{\dfrac{[\alpha \vee \beta]_{(2)} \quad \dfrac{\dfrac{[(\alpha \to \gamma) \wedge (\beta \to \gamma)]_{(1)}}{\alpha \to \gamma}\,E\wedge_1 \quad [\alpha]_{(3)}}{\gamma}\,E\to \quad \dfrac{\dfrac{[(\alpha \to \gamma) \wedge (\beta \to \gamma)]_{(1)}}{\beta \to \gamma}\,E\wedge_2 \quad [\beta]_{(3)}}{\gamma}\,E\to}{\dfrac{\gamma}{(\alpha \vee \beta \to \gamma)}\,I\to_{(2)}}\,E\vee_{(3)} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\alpha \vee \beta \to \gamma]_{(1)} \quad \dfrac{[\alpha]_{(4)}}{\alpha \vee \beta}\,I\vee}{\gamma}\,E\to}{\alpha \to \gamma}\,I\to_{(4)} \quad \dfrac{\dfrac{[\alpha \vee \beta \to \gamma]_{(1)} \quad \dfrac{[\beta]_{(5)}}{\alpha \vee \beta}\,I\vee}{\gamma}\,E\to}{\beta \to \gamma}\,I\to_{(5)}}{(\alpha \to \gamma) \wedge (\beta \to \gamma)}\,I\wedge}{(\alpha \to \gamma) \wedge (\beta \to \gamma) \leftrightarrow (\alpha \vee \beta \to \gamma)}\,I\leftrightarrow_{(1)}$$

b.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\alpha \to (\beta \to \gamma)]_{(1)} \quad \dfrac{\dfrac{[\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)]_{(2)} \quad \dfrac{[\neg\alpha]_{(3)}}{\neg\alpha \vee \neg\beta}\,I\vee}{\bot}\,E\neg}{\alpha}\,RAA_{(3)}}{\beta \to \gamma}\,E\to \quad \dfrac{\dfrac{[\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)]_{(2)} \quad \dfrac{[\neg\beta]_{(4)}}{\neg\alpha \vee \neg\beta}\,I\vee}{\bot}\,E\neg}{\beta}\,RAA_{(4)}}{\gamma}\,E\to}{\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \to \gamma}\,I\to_{(2)}}{(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \to \gamma)}\,I\to_{(1)}$$

Ejercicio 4 (10 puntos)

Considere el siguiente conjunto $\Gamma = \{p_0, p_1\}$

a. Pruebe que $\neg p_2 \notin Cons(\Gamma)$.
b. Construya una teoría T consistente que cumpla las siguientes condiciones:
   - $Cons(\Gamma) \subset T$
   - $\neg p_2 \in T$
   - T no es consistente maximal.

   Justifique su respuesta.
c. Construya un conjunto consistente maximal Δ_0 tal que $T \subset \Delta_0$.
d. Construya un conjunto consistente maximal Δ_1 tal que $\Gamma \subset \Delta_1$ pero $T \not\subseteq \Delta_1$.
e. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas.
   I. $\Delta_0 \cup \Delta_1$ es teoría.
   II. $\Delta_0 \cup \Delta_1$ es consistente.

   Justifique su respuesta.

Propuesta de solución

a. Sea v_1 la valuación que asigna 1 a todas las letras proposicionales. Entonces,

$v_1(p_0) = 1, v_1(p_1) = 1$ y $v_1(p_2) = 1$
$\Rightarrow$ (def. valuación)
$v_1(p_0) = 1, v_1(p_1) = 1$ y $v_1(\neg p_2) = 0$
$\Rightarrow$ (v_1 es testigo)
$\exists v,\ v(\Gamma) = 1$ y $v(\neg p_2) = 0$
$\Rightarrow$ (definición de $\not\models$)
$\Gamma \not\models \neg p_2$
$\Rightarrow$ (contrarrecíproco de corrección)
$\Gamma \nvdash \neg p_2$
$\Rightarrow$ (definición de $\textsc{Cons}$)
$\neg p_2 \notin \textsc{Cons}(\Gamma)$

b. Sea $T = \textsc{Cons}(\Gamma \cup \{\neg p_2\})$

T es teoría:
Se cumple por ser un $\textsc{Cons}$.

T es consistente:
Sea v_1 la valuación:

$$v_1(p_i) = \begin{cases} 0, & \text{si } i = 2 \\ 1, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces:

$v_1(p_0) = 1,\ v_1(p_1) = 1$ y $v_1(p_2) = 0$
$\Rightarrow$ (def. valuación)
$v_1(p_0) = 1, v_1(p_1) = 1$ y $v_1(\neg p_2) = 1$
$\Rightarrow$ (def. Γ)
$v_1(\Gamma \cup \{\neg p_2\}) = 1$
$\Rightarrow$ (corrección)
$v_1(\textsc{Cons}(\Gamma \cup \{\neg p_2\})) = 1$
$\Rightarrow$ (def. T)
T es consistente

Cons(Γ) $\subset T$:

Probamos primero que $\textsc{Cons}(\Gamma) \subseteq T$, para lo que tomamos un $\varphi \in \textsc{Cons}(\Gamma)$ arbitrario y probamos que $\varphi \in T$:

$\varphi \in \textsc{Cons}(\Gamma)$
$\Rightarrow$ (def. $\textsc{Cons}$)
$\Gamma \vdash \varphi$
$\Rightarrow$ (def. $\vdash$)
$\Gamma \cup \{\neg p_2\} \vdash \varphi$
$\Rightarrow$ (def. $\textsc{Cons}$)
$\varphi \in \textsc{Cons}(\Gamma \cup \{\neg p_2\})$
$\Rightarrow$ (def. T)
$\varphi \in T$

Resta probar que $\bar{\exists}\psi \in T,\ \psi \notin \textsc{Cons}(\Gamma)$.
Sea $\psi = \neg p_2$. Por un lado se cumple que:

$$\neg p_2 \in T$$

ya que $\Gamma \cup \{\neg p_2\} \vdash \neg p_2$. Además, por parte a:

$$\neg p_2 \notin \textsc{Cons}(\Gamma)$$

$\neg p_2 \in T$:

$$\begin{array}{l} \Gamma \cup \{\neg p_2\} \vdash \neg p_2 \\ \Rightarrow \text{(def. Cons)} \\ \neg p_2 \in \textsc{Cons}(\Gamma \cup \{\neg p_2\}) \\ \Rightarrow \text{(def. T)} \\ \neg p_2 \in T \end{array}$$

T no es consistente maximal:

Ya vimos que v_1 definida más arriba satisface T. Sea v_2 la siguiente valuación, distinta de v_1:

$$v_2(p_i) = \begin{cases} 1, & \text{si } i < 2 \\ 0, & \text{si } i = 2 \\ 0, & \text{si } i > 2 \end{cases}$$

Esta valuación también satisface T:

$$\begin{array}{l} v_2(p_0) = 1, v_2(p_1) = 1 \text{ y } v_2(p_2) = 0 \\ \Rightarrow \text{(def. valuación)} \\ v_2(p_0) = 1, v_2(p_1) = 1 \text{ y } v_2(\neg p_2) = 1 \\ \Rightarrow \text{(def. } \Gamma) \\ v_2(\Gamma \cup \{\neg p_2\}) = 1 \\ \Rightarrow \text{(corrección)} \\ v_2(\textsc{Cons}(\Gamma \cup \{\neg p_2\})) = 1 \\ \Rightarrow \text{(def. T)} \\ v_2(T) = 1 \end{array}$$

Entonces, hay dos valuaciones que hacen verdadero a T. Por caracterización semántica de conjunto completo T no puede ser completo y por lo tanto tampoco consistente maximal, ya que todo conjunto consistente maximal es teoría y completo.

c. Sea $\Delta_0 = \textsc{Cons}(\{p_0, p_1, \neg p_2, p_3, ..., p_n, ...\})$

Δ_0 es teoría por ser un Cons, y la valuación v_1 de la parte anterior es la única que cumple $v(\Delta_0) = 1$. Por lo tanto, el conjunto es consistente maximal.

Falta probar que $T \subset \Delta_0$. Sea $\varphi \in T$, entonces:

$\varphi \in \textsc{Cons}(\Gamma \cup \{\neg p_2\})$
$\Rightarrow$ (def. $\textsc{Cons}$)
$\Gamma \cup \{\neg p_2\} \vdash \varphi$
$\Rightarrow$ (def. Γ)
$\{p_0, p_1, \neg p_2\} \vdash \varphi$
$\Rightarrow$ (def. $\vdash$)
$\{p_0, p_1, \neg p_2, p_3, ..., p_n, ...\} \vdash \varphi$
$\Rightarrow$ (def. $\textsc{Cons}$)
$\varphi \in \textsc{Cons}(\{p_0, p_1, \neg p_2, p_3, ..., p_n, ...\})$
$\Rightarrow$ (def. Δ_0)
$\varphi \in \Delta_0$

Por lo tanto $T \subseteq \Delta_0$. Y como además T no es consistente maximal, entonces $T \neq \Delta_0$.

d. Sea $\Delta_1 = \textsc{Cons}(\{p_0, p_1, p_2, p_3, ..., p_n, ...\})$

Δ_1 es consistente maximal porque es teoría por ser $\textsc{Cons}$, y la valuación que hace verdadera a todas las letras proposicionales es la única que cumple $v(\Delta_1) = 1$.

Por definición de Δ_1, se cumple:

$$p_0 \in \Delta_1$$

$$p_1 \in \Delta_1$$

$$p_3 \in \Delta_1$$

Por lo tanto, $\{p_0, p_1\} \subset \Delta_1$. Además,

$$\neg p_2 \notin \Delta_1$$

pero

$$\neg p_2 \in T$$

así que $T \not\subseteq \Delta_1$.

e. I. La afirmación es **falsa**

Sabemos que $\neg p_2 \in \Delta_0$ y que $p_2 \in \Delta_1$. Por la siguiente derivación, $\Delta_0 \cup \Delta_1 \vdash \bot$:

$$\frac{\neg p_2 \quad p_2}{\bot}\ E\neg$$

Pero $\bot \notin \Delta_0 \cup \Delta_1$, ya que tanto Δ_0 como Δ_1 son consistentes (por partes anteriores).

II. La afirmación es **falsa**

Por parte anterior, $\Delta_0 \cup \Delta_1 \vdash \bot$.