Primer parcial de Lógica

17 de Mayo 2014

Indicaciones generales

- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **40** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (10 puntos)

a. Defina una función $cantConectivos : \mathtt{PROP} \to \mathbb{N}$ que cuente la cantidad de ocurrencias de conectivos en una formula.

b. Defina una función $f : \mathtt{PROP} \to \mathtt{PROP}$ tal que $f(\alpha)$ es equivalente a α, no tiene los conectivos $\vee$ ni $\to$, y $cantConectivos(f(\alpha)) \geq cantConectivos(\alpha)$.

   Observación No es necesario probar que la función f cumple las propiedades pedidas.

c. Calcule $f(p_0 \vee p_1)$ y $f(\neg(\neg p_0 \wedge \neg p_1))$

d. Recordando que se cumple la propiedad:
   $(\bar{\forall}\varphi \in PROP) cantConectivos(f(\varphi)) \geq cantConectivos(\varphi)$

   Demuestre que:

   $(\bar{\forall}\varphi \in PROP)$si $\varphi \neq f(\varphi)$ entonces $cantConectivos(f(\varphi)) > cantConectivos(\varphi)$

   Justifique su respuesta.

e. ¿Existe alguna función $g : \mathtt{PROP} \to \mathtt{PROP}$ tal que $g(f(\varphi)) = \varphi$? Justifique su respuesta.

Propuesta de solución

a.

$$
\begin{array}{ll}
cantConectivos : \mathtt{PROP} \to \mathbb{N} & \\
cantConectivos\,(\bot) & = 1 \\
cantConectivos\,(p_i) & = 0 \\
cantConectivos\,(\neg\alpha) & = 1 + cantConectivos\,(\alpha) \\
cantConectivos\,(\alpha \star \beta) & = 1 + cantConectivos\,(\alpha) + cantConectivos\,(\beta) \;\; \text{con } \star \in \{\to, \vee, \wedge, \leftrightarrow\}
\end{array}
$$

b.

$$
\begin{aligned}
&f : \mathtt{PROP} \to \mathtt{PROP} \\
&f(\bot) &&= \bot \\
&f(p_i) &&= p_i \\
&f(\neg\alpha) &&= \neg f(\alpha) \\
&f(\alpha \wedge \beta) &&= f(\alpha) \wedge f(\beta) \\
&f(\alpha \vee \beta) &&= \neg(\neg f(\alpha) \wedge \neg f(\beta)) \\
&f(\alpha \to \beta) &&= \neg(f(\alpha) \wedge \neg f(\beta)) \\
&f(\alpha \leftrightarrow \beta) &&= f(\alpha) \leftrightarrow f(\beta)
\end{aligned}
$$

c.

$$
\begin{aligned}
&f(p_0 \vee p_1) \\
&= \text{(regla 5 de la def. de } f\text{)} \\
&\neg(\neg f(p_0) \wedge \neg f(p_1)) \\
&= \text{(regla 2 de la def. de } f\text{)} \\
&\neg(\neg p_0 \wedge \neg p_1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&f(\neg(\neg p_0 \wedge \neg p_1)) \\
&= \text{(regla 3 de la def. de } f\text{)} \\
&\neg f(\neg p_0 \wedge \neg p_1) \\
&= \text{(regla 4 de la def. de } f\text{)} \\
&\neg(f(\neg p_0) \wedge f(\neg p_1)) \\
&= \text{(regla 3 de la def. de } f\text{)} \\
&\neg(\neg f(p_0) \wedge \neg f(p_1)) \\
&= \text{(regla 2 de la def. de } f\text{)} \\
&\neg(\neg p_0 \wedge \neg p_1)
\end{aligned}
$$

d. Usaremos inducción sobre `PROP` para probar la propiedad:

$$\mathcal{P}(\varphi) := \text{si } \varphi \neq f(\varphi) \text{ entonces } cantConectivos(f(\varphi)) > cantConectivos(\varphi)$$

Paso Base 1

T) si $\bot \neq f(\bot)$ entonces $cantConectivos(f(\bot)) > cantConectivos(\bot)$

Demo.

Se cumple trivialmente ya que, por definición de f, $\bot = f(\bot)$.

Paso Base 2

T) si $p_i \neq f(p_i)$ entonces $cantConectivos(f(p_i)) > cantConectivos(p_i)$

Demo.

Se cumple trivialmente ya que, por definición de f, $p_i = f(p_i)$.

Paso Inductivo 1

HI) si $\varphi \neq f(\varphi)$ entonces $cantConectivos(f(\varphi)) > cantConectivos(\varphi)$

TI) si $\neg\varphi \neq f(\neg\varphi)$ entonces $cantConectivos(f(\neg\varphi)) > cantConectivos(\neg\varphi)$

Demo.

$$
\begin{aligned}
&cantConectivos(f(\neg\varphi)) > cantConectivos(\neg\varphi) \\
&\Leftrightarrow \text{(def. } f\text{)} \\
&cantConectivos(\neg f(\varphi)) > cantConectivos(\neg\varphi) \\
&\Leftrightarrow \text{(Def. cantConectivos)} \\
&1 + cantConectivos(f(\varphi)) > 1 + cantConectivos(\varphi) \\
&\Leftrightarrow \text{(Def. aritmetica)} \\
&cantConectivos(f(\varphi)) > cantConectivos(\varphi)
\end{aligned}
$$

Y esto último se cumple por ser la Hipótesis Inductiva.

Paso Inductivo 2

HI 1) si $\varphi_1 \neq f(\varphi_1)$ entonces $cantConectivos(f(\varphi_1)) > cantConectivos(\varphi_1)$

HI 2) si $\varphi_2 \neq f(\varphi_2)$ entonces $cantConectivos(f(\varphi_2)) > cantConectivos(\varphi_2)$

TI) si $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \neq f(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ entonces $cantConectivos(f(\varphi_1 \wedge \varphi_2)) > cantConectivos(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$

Demo.

$$cantConectivos(f(\varphi_1 \wedge \varphi_2)) > cantConectivos(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$$
$$\Leftrightarrow \text{(def. } f\text{)}$$
$$cantConectivos(f(\varphi_1) \wedge f(\varphi_2)) > cantConectivos(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$$
$$\Leftrightarrow \text{(def. } cantConectivos\text{)}$$
$$1 + cantConectivos(f(\varphi_1)) + cantConectivos(f(\varphi_2)) >$$
$$1 + cantConectivos(\varphi_1) + cantConectivos(\varphi_2)$$
$$\Leftrightarrow \text{(aritmetica)}$$
$$cantConectivos(f(\varphi_1)) + cantConectivos(f(\varphi_2)) >$$
$$cantConectivos(\varphi_1) + cantConectivos(\varphi_2)$$

Como asumimos que $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \neq (f(\varphi_1) \wedge f(\varphi_2))$, entonces o bien $\varphi_1 \neq f(\varphi_1)$ lo que nos permite aplicar la hipótesis inductiva 1, o bien $\varphi_2 \neq f(\varphi_2)$ con lo que podemos aplicar la hipótesis inductiva 2. En ambos casos la desigualdad de arriba se cumple por aritmética y por la propiedad:

$$(\bar{\forall}\varphi \in PROP) cantConectivos(f(\varphi)) \geq cantConectivos(\varphi)$$

Paso Inductivo 3

HI 1) si $\varphi_1 \neq f(\varphi_1)$ entonces $cantConectivos(f(\varphi_1)) > cantConectivos(\varphi_1)$

HI 2) si $\varphi_2 \neq f(\varphi_2)$ entonces $cantConectivos(f(\varphi_2)) > cantConectivos(\varphi_2)$

TI) si $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \neq f(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ entonces $cantConectivos(f(\varphi_1 \vee \varphi_2)) > cantConectivos(\varphi_1 \vee \varphi_2)$

Demo.

$$cantConectivos(f(\varphi_1 \vee \varphi_2)) > cantConectivos(\varphi_1 \vee \varphi_2)$$
$$\Leftrightarrow \text{(def. } f\text{)}$$
$$cantConectivos(\neg(\neg f(\varphi_1) \wedge \neg f(\varphi_2))) > cantConectivos(\varphi_1 \vee \varphi_2)$$
$$\Leftrightarrow \text{(def. } cantConectivos\text{)}$$
$$4 + cantConectivos(f(\varphi_1)) + cantConectivos(f(\varphi_2)) >$$
$$1 + cantConectivos(\varphi_1) + cantConectivos(\varphi_2)$$

Esta desigualdad se cumple por aritmética y por la propiedad:

$$(\bar{\forall}\varphi \in PROP) cantConectivos(f(\varphi)) \geq cantConectivos(\varphi)$$

Paso Inductivo 4

HI 1) si $\varphi_1 \neq f(\varphi_1)$ entonces $cantConectivos(f(\varphi_1)) > cantConectivos(\varphi_1)$

HI 2) si $\varphi_2 \neq f(\varphi_2)$ entonces $cantConectivos(f(\varphi_2)) > cantConectivos(\varphi_2)$

TI) si $(\varphi_1 \to \varphi_2) \neq f(\varphi_1 \to \varphi_2)$ entonces $cantConectivos(f(\varphi_1 \to \varphi_2)) > cantConectivos(\varphi_1 \to \varphi_2)$

Demo.

$$cantConectivos(f(\varphi_1 \to \varphi_2)) > cantConectivos(\varphi_1 \to \varphi_2)$$
$$\Leftrightarrow \text{(def. } f\text{)}$$
$$cantConectivos(\neg(f(\varphi_1) \wedge \neg f(\varphi_2))) > cantConectivos(\varphi_1 \to \varphi_2)$$
$$\Leftrightarrow \text{(def. } cantConectivos\text{)}$$
$$3 + cantConectivos(f(\varphi_1)) + cantConectivos(f(\varphi_2)) >$$
$$1 + cantConectivos(\varphi_1) + cantConectivos(\varphi_2)$$

Esta desigualdad se cumple por aritmética y por la propiedad:

$$(\bar{\forall}\varphi \in PROP) cantConectivos(f(\varphi)) \geq cantConectivos(\varphi)$$

Paso Inductivo 5

HI 1) si $\varphi_1 \neq f(\varphi_1)$ entonces $cantConectivos(f(\varphi_1)) > cantConectivos(\varphi_1)$

HI 2) si $\varphi_2 \neq f(\varphi_2)$ entonces $cantConectivos(f(\varphi_2)) > cantConectivos(\varphi_2)$

TI) si $(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2) \neq f(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$ entonces $cantConectivos(f(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)) > cantConectivos(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$

Demo. La prueba es análoga al Paso Inductivo 2.

Aplicando el PIP para `PROP` concluimos que:

$$(\bar{\forall}\varphi \in PROP)\text{si } \varphi \neq f(\varphi) \text{ entonces } cantConectivos(f(\varphi)) > cantConectivos(\varphi)$$

e. No, pues la función no es biyectiva. En particular:

$$f(p_1 \vee p_2) = f(\neg(\neg p_1 \wedge \neg p_2)) = \neg(\neg p_1 \wedge \neg p_2)$$

Ejercicio 2 (10 puntos)

a. Dado $\varphi \in \texttt{PROP}$ y una valuación v_1, ambos fijos, donde además se sabe que $v_1(\varphi) = 0$.

   Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas, falsas o no se puede afirmar nada. Justifique sus respuestas.

   I. $v_1(\varphi \to (p_1 \vee p_2)) = 1$
   II. $\varphi \models \bot$.
   III. Existe $\Gamma \subseteq \texttt{PROP}$ tal que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \models \varphi \wedge (p_1 \to p_1)$

b. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique sus respuestas.

   I. $p_0 \to (\neg p_0 \wedge \neg\bot),\ \ p_0 \models \ \ p_3$
   II. $(\forall\varphi \in \texttt{PROP})(\exists\psi \in \texttt{PROP}) \not\models \varphi \leftrightarrow \psi$ y $\varphi \models \psi$
   III. $\not\models p_1 \leftrightarrow (p_1 \to p_1)$ y $p_1 \models p_1 \to p_1$

Propuesta de solución

a. I. **Verdadero.**

$$\begin{array}{l} v_1(\varphi \to (p_1 \vee p_2)) \\ = \text{(def. valuación)} \\ \max(1 - v_1(\varphi), v(p_1 \vee p_2)) \\ = (v_1(\varphi) = 0) \\ \max(1 - 0, v(p_1 \vee p_2)) \\ = \text{(aritmética)} \\ 1 \end{array}$$

   II. **No se puede afirmar nada.** Por un lado, si $\varphi = \bot$, $v_1(\varphi) = 0$ y se cumple $\varphi \models \bot$, ya que no hay ninguna valuación que satisfaga φ.
   Por otro lado, si $\varphi = p_0$ y $v_1(p_0) = 0$, puedo encontrar una valuación v_2 tal que $v_2(p_0) = 1$, por lo que en este caso $\varphi \not\models \bot$.

   III. **Verdadero.** Tomamos $\Gamma = \{\bot\}$:

$$\begin{array}{l} \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \models \varphi \wedge (p_1 \to p_1) \\ \Leftrightarrow \text{(def. } \Gamma) \\ \{\bot, \neg\varphi\} \models \varphi \wedge (p_1 \to p_1) \\ \Leftrightarrow \text{(corrección y completitud)} \\ \{\bot, \neg\varphi\} \vdash \varphi \wedge (p_1 \to p_1) \end{array}$$

   Y la siguiente derivación muestra que esta afirmación es cierta:

$$\dfrac{\bot}{\varphi \wedge (p_1 \to p_1)}\ E\bot$$

b. I. **Verdadero.** La siguiente derivación prueba que $p_0 \to (\neg p_0 \wedge \neg\bot), p_0 \vdash p_3$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p_0 \to (\neg p_0 \wedge \neg\bot) \quad p_0}{\neg p_0 \wedge \neg\bot}\ E\to}{\neg p_0}\ E\wedge \qquad p_0}{\bot}\ E\neg}{p_3}\ E\bot$$

   y por corrección se cumple lo pedido.

II. **Falso.** Sea $\varphi = \neg\bot$. Si ψ es una fórmula de PROP que cumple $\not\models \neg\bot \leftrightarrow \psi$, alcanza con probar que $\neg\bot \not\models \psi$ para probar que la afirmación es falsa.

$$
\begin{array}{l}
\not\models \neg\bot \leftrightarrow \psi \\
\Rightarrow \text{\scriptsize (def. } \models) \\
(\bar{\exists} v \text{ valuación) } v(\neg\bot \leftrightarrow \psi) = 0 \\
\Rightarrow \text{\scriptsize (def. valuación)} \\
(\bar{\exists} v \text{ valuación) } v(\neg\bot) \neq v(\psi) \\
\Rightarrow {\scriptsize (v(\neg\bot) = 1)} \\
(\bar{\exists} v \text{ valuación) } v(\psi) = 0 \\
\Rightarrow {\scriptsize (v(\neg\bot) = 1)} \\
(\bar{\exists} v \text{ valuación)} (v(\neg\bot) = 1 \text{ y } v(\psi) = 0) \\
\Rightarrow \text{\scriptsize (def. } \models) \\
\neg\bot \not\models \psi
\end{array}
$$

III. **Verdadero.** El siguiente tableau muestra que $\not\models p_1 \leftrightarrow (p_1 \to p_1)$:

$$
\begin{array}{c}
\mathbf{F}.p_1 \leftrightarrow (p_1 \to p_1)* \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
\mathbf{T}.p_1 \\
\mathbf{F}.p_1 \to p_1* \\
| \\
\mathbf{T}.p_1 \\
\mathbf{T}.p_1 \times \\
\mathbf{F}.p_1 \times
\end{array}
&
\begin{array}{c}
\mathbf{F}.p_1 \\
\mathbf{T}.p_1 \to p_1* \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
\mathbf{F}.p_1 \\
\mathbf{F}.p_1
\end{array}
&
\begin{array}{c}
\mathbf{F}.p_1 \times \\
\mathbf{T}.p_1 \times
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

Podemos ver que una valuación que hace falso p_1 hace falsa la fórmula, por lo que no puede ser una tautología.

Por otra parte, el siguiente tableau muestra que $p_1 \models (p_1 \to p_1)$:

$$
\begin{array}{c}
\mathbf{T}.p_1 \\
\mathbf{F}.p_1 \to p_1* \\
| \\
\mathbf{T}.p_1 \\
\mathbf{T}.p_1 \times \\
\mathbf{F}.p_1 \times
\end{array}
$$

Ejercicio 3 (10 puntos)

Construya derivaciones que justifiquen los siguientes juicios. En ningún caso se aceptan justificaciones semánticas.

a. $(\alpha \to \beta) \to \gamma \vdash \gamma \vee \neg\beta$

b. $\vdash (\alpha \leftrightarrow (\beta \to \gamma)) \to (\neg\alpha \wedge \beta \to \neg\gamma)$

Propuesta de solución

a.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\neg(\gamma \vee \neg\beta)]^{(1)}$}
\AxiomC{$[\neg(\gamma \vee \neg\beta)]^{(1)}$}
\AxiomC{$(\alpha \to \beta) \to \gamma$}
\AxiomC{$[\beta]^{(2)}$}
\RightLabel{$I\to$}
\UnaryInfC{$\alpha \to \beta$}
\RightLabel{$E\to$}
\BinaryInfC{γ}
\RightLabel{$I\vee$}
\UnaryInfC{$\gamma \vee \neg\beta$}
\RightLabel{$E\neg$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$I\neg^{(2)}$}
\UnaryInfC{$\neg\beta$}
\RightLabel{$I\vee$}
\UnaryInfC{$\gamma \vee \neg\beta$}
\RightLabel{$E\neg$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$RAA^{(1)}$}
\UnaryInfC{$\gamma \vee \neg\beta$}
\end{prooftree}
$$

b.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\neg\alpha \wedge \beta]^{(2)}$}
\RightLabel{$E\wedge$}
\UnaryInfC{$\neg\alpha$}
\AxiomC{$[\alpha \leftrightarrow (\beta \to \gamma)]^{(1)}$}
\AxiomC{$[\gamma]^{(3)}$}
\RightLabel{$I\to$}
\UnaryInfC{$\beta \to \gamma$}
\RightLabel{$E\leftrightarrow$}
\BinaryInfC{α}
\RightLabel{$E\neg$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$I\neg^{(3)}$}
\UnaryInfC{$\neg\gamma$}
\RightLabel{$I\to^{(2)}$}
\UnaryInfC{$\neg\alpha \wedge \beta \to \neg\gamma$}
\RightLabel{$I\to^{(1)}$}
\UnaryInfC{$(\alpha \leftrightarrow (\beta \to \gamma)) \to (\neg\alpha \wedge \beta \to \neg\gamma)$}
\end{prooftree}
$$

Ejercicio 4 (10 puntos)

a. Dé una teoría consistente. Justifique su respuesta.
b. Demuestre que si Γ es una teoría inconsistente entonces $\Gamma = \texttt{PROP}$.
c. Para cada una de las siguientes afirmaciones indique si es verdadera o falsa, justificando en cada caso.
   I. Para todo Γ y Δ subconjuntos consistentes de $\texttt{PROP}$, $\Gamma \cup \Delta$ es consistente.
   II. Para todo Γ y Δ subconjuntos de $\texttt{PROP}$, si Γ es consistente y Δ es inconsistente, entonces $\Gamma \cap \Delta$ es consistente.

Propuesta de solución

a. Sea v la valuación que hace verdaderas a todas las letras proposicionales, esta valuación define al conjunto consistente maximal $\{\varphi \mid v(\varphi) = 1\}$ que por ser consistente maximal también es teoría.
b. Sea Γ una teoría inconsistente. Partimos de una de las hipótesis:

$\Gamma \vdash \bot$

$\Rightarrow$ (Aplicando la regla de eliminación de $\bot$ de $\texttt{DER}$)

$(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})\Gamma \vdash \varphi$

$\Rightarrow$ (Γ es teoría)

$(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})\varphi \in \Gamma$

$\Rightarrow$ (teoría de conjuntos)

$PROP \subseteq \Gamma$

$\Rightarrow$ ($\Gamma \subseteq \texttt{PROP}$)

$\Gamma = \texttt{PROP}$

c. I. La afirmación es falsa, se puede ver un contraejemplo con $\Gamma = \{p_0\}$ y $\Delta = \{\neg p_0\}$. Γ es consistente porque existe al menos una valuación que lo satisface, en particular lo satisface cualquier valuación v tal que $v(p_0) = 1$. Δ es consistente porque existe al menos una valuación que lo satisface, en particular lo satisface cualquier valuación v tal que $v(p_0) = 0$. $\Gamma \cup \Delta$ es inconsistente dado que no existe ninguna valuación que lo satisfaga, o sea, no existe v tal que $v(p_0) = 1$ y $v(p_0) = 0$.

II. La afirmación es verdadera. Γ es consistente, por lo que $(\bar{\exists} v)(\bar{\forall}\varphi \in \Gamma)v(\varphi) = 1$; a esto se le suma que $\Gamma \cap \Delta \subseteq \Gamma$, por lo que se desprende que $(\exists v)(\forall \varphi \in \Gamma \cap \Delta)v(\varphi) = 1$; O sea que $\Gamma \cap \Delta$ es consistente.