Primer parcial de Lógica

11 de Mayo 2013

Indicaciones generales

- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **40** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (10 puntos)

Considere la siguiente definición inductiva para el lenguaje L sobre el alfabeto $\{c_0, c_1, c_2, \ldots\} \cup \{\#, @,), (\}$.

i Si $i \in \mathbb{N}$ entonces $c_i \in L$

ii Si $t_1 \in L, t_2 \in L, t_3 \in L$, entonces $((t_1 \# t_2) @ t_3) \in L$

a. Demuestre que $((((c_1 \# c_1) @ c_2) \# c_2) @ c_2) \in L$.

b. Defina una función F tal que para cada elemento de L devuelve una palabra de PROP realizando los siguientes reemplazos; cada $\#$ cambia por $\wedge$, cada $@$ por $\rightarrow$, y cada c_i por la letra p_i. La definición de F debe cumplir con el esquema de recursión primitiva.

c. Demuestre que $(\bar{\forall} \alpha \in L)(\bar{\exists} v) v(F(\alpha)) = 1$.

d. Indique si las siguientes oraciones son verdaderas o falsas. Justifique o de un contraejemplo según corresponda.

   I. Hay alguna palabra de L tal que F la transforma en tautología.

   II. $(\bar{\forall} \alpha \in L)(\bar{\exists} v) v\left(F\left(\alpha\right)\right) = 0$.

Propuesta de solución

a.

$$
\begin{array}{l}
\text{(Por regla i)} \\
c_1 \in L \text{ y } c_2 \in L \\
\Rightarrow \text{(regla ii)} \\
((c_1 \# c_1) @ c_2) \in L \\
\Rightarrow \text{(regla ii, tomando } t_1 = ((c_1 \# c_1) @ c_2),\ t_2 = t_3 = c_2) \\
((((c_1 \# c_1) @ c_2) \# c_2) @ c_2) \in L
\end{array}
$$

b.

$$
\begin{array}{ll}
F : L \rightarrow \texttt{PROP} & \\
F(c_i) & = p_i \\
F(((t_1 \# t_2) @ t_3)) & = ((F(t_1) \wedge F(t_2)) \rightarrow F(t_3))
\end{array}
$$

c. Probaremos la propiedad utilizando el PIP para L, con la propiedad:

$$P(\alpha) := (\bar{\exists} v) v(F(\alpha)) = 1$$

Paso Base

T) $P(c_i) : (\bar{\exists} v) v(F(c_i)) = 1$

Demo.

Tomo v_1 la valuación que asigna 1 a todas las letras proposicionales como testigo del existe. En esta valuación:

$$\begin{aligned}
& v_1(F(c_i)) \\
& = \text{(def. } F\text{)} \\
& v_1(p_i) \\
& = \text{(def. } v_1\text{)} \\
& 1
\end{aligned}$$

Paso Inductivo

HI1) $P(t_1) : (\bar{\exists} v) v(F(t_1)) = 1$

HI2) $P(t_2) : (\bar{\exists} v) v(F(t_2)) = 1$

HI3) $P(t_3) : (\bar{\exists} v) v(F(t_3)) = 1$

TI) $P((t_1 \# t_2) @ t_3) : (\bar{\exists} v) v(F((t_1 \# t_2) @ t_3)) = 1$

Demo. Por HI3, existe una valuación v_3 tal que $v_3(F(t_3)) = 1$. Entonces:

$$\begin{aligned}
& v_3(F((t_1 \# t_2) @ t_3)) \\
& = \text{(def. } F\text{)} \\
& v_3((F(t_1) \wedge F(t_2)) \to F(t_3)) \\
& = \text{(def. valuación)} \\
& max\{1 - v_3(F(t_1) \wedge F(t_2)), v_3(F(t_3))\} \\
& = \text{(por HI3)} \\
& max\{1 - v_3(F(t_1) \wedge F(t_2)), 1\} \\
& = \text{(def. } max\text{)} \\
& 1
\end{aligned}$$

Vemos entonces que v_3 sirve como testigo para probar la tesis.

Aplicando el PIP del conjunto L concluimos que: $(\bar{\forall} \alpha \in L)(\bar{\exists} v) v(F(\alpha)) = 1$.

d. I. **Verdadero.**

Sea $\alpha = ((c_1 \# c_1) @ c_1)$. Por definición de F:

$$F(\alpha) = ((p_1 \wedge p_1) \to p_1)$$

El siguiente tableau muestra que $F(\alpha)$ es una tautología:

$$\begin{array}{c}
\mathbf{F}.(p_1 \wedge p_1) \to p_1 * \\
| \\
\mathbf{T}.p_1 \wedge p_1 * \\
\mathbf{F}.p_1 \\
| \\
\mathbf{T}.p_1 \\
\mathbf{T}.p_1 \times \\
\mathbf{F}.p_1 \times
\end{array}$$

II. **Falso.** Por la parte anterior, $F((c_1 \# c_1) @ c_1)$ es una tautología, por lo que no existe ninguna valuación que haga 0 a esta fórmula.

Ejercicio 2 (10 puntos)

a. Demuestre o refute las siguientes afirmaciones
   I. $(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})(\bar{\exists}\psi \in \texttt{PROP}) \models \varphi \vee \psi$.
   II. $(\bar{\exists}\varphi \in \texttt{PROP})(\bar{\forall}\psi \in \texttt{PROP})(\not\models \varphi \leftrightarrow \bot \text{ y } \models \varphi \to \psi)$.

b. Sea

   - $\varphi_0 = p_0$
   - $\varphi_{n+1} = (\varphi_n \vee \neg p_0)$

   I. Demuestre que $(\bar{\forall}n \in \mathbb{N}) \models \varphi_{n+1}$.
   II. Considere $\Gamma = \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$. De ψ tal que $\Gamma \models \psi$ cumpliendo que $\psi \notin \Gamma$ y $\not\models \psi$.

Propuesta de solución

a. I. **Verdadero.**
   Sea φ una fórmula arbitraria y $\psi = \neg\bot$. Entonces:

$$\begin{aligned}
&\models \varphi \vee \neg\bot \\
&\Leftrightarrow \text{(def. } \models) \\
&(\bar{\forall}v)v(\varphi \vee \neg\bot) = 1 \\
&\Leftrightarrow \text{(def. valuación)} \\
&(\bar{\forall}v)\,\text{máx}\{v(\varphi), v(\neg\bot)\} = 1 \\
&\Leftrightarrow \text{(def. valuación)} \\
&(\bar{\forall}v)\,\text{máx}\{v(\varphi), 1 - v(\bot)\} = 1 \\
&\Leftrightarrow \text{(def. valuación)} \\
&(\bar{\forall}v)\,\text{máx}\{(v(\varphi), 1\} = 1 \\
&\Leftrightarrow \text{(aritmética)} \\
&(\bar{\forall}v)1 = 1
\end{aligned}$$

   Por lo tanto $(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})(\bar{\exists}\psi \in \texttt{PROP}) \models \varphi \vee \psi$.

   II. **Falso.**
   Tomamos un φ arbitrario y $\psi = \bot$. Debemos probar o bien que $\models \varphi \leftrightarrow \bot$ o que $\not\models \varphi \to \bot$.
   Dividimos la prueba en dos casos: $\varphi \leftrightarrow \bot$ es una tautología, o no lo es.

   - Si la fórmula es una tautología, se cumple la primer condición de la disyunción que se quiere probar.
   - Si no lo es, entonces:

$$
\begin{aligned}
&\not\models \varphi \leftrightarrow \bot \\
&\Leftrightarrow \text{(def. } \models\text{)} \\
&(\bar{\exists} v) v(\varphi \leftrightarrow \bot) = 0 \\
&\Leftrightarrow \text{(def. } v\text{)} \\
&(\bar{\exists} v) v(\varphi) \neq v(\bot) \\
&\Leftrightarrow \text{(def. } v\text{)} \\
&(\bar{\exists} v) v(\varphi) \neq 0 \\
&\Leftrightarrow (v(\varphi) \in \{0,1\}) \\
&(\bar{\exists} v) v(\varphi) = 1 \\
&\Leftrightarrow \text{(aritmética)} \\
&(\bar{\exists} v) \max\{1 - v(\varphi), v(\bot)\} = 0 \\
&\Leftrightarrow \text{(def. } v\text{)} \\
&(\bar{\exists} v) v(\varphi \to \bot) = 0 \\
&\Leftrightarrow \text{(def. } \models\text{)} \\
&\not\models \varphi \to \bot
\end{aligned}
$$

Por lo que en este caso se cumple la segunda condición de la disyunción a probar.

b. I. Demostración por PIP en $\mathbb{N}$ con la propiedad

$$P(n) := \models \varphi_{n+1}$$

Paso Base 1

T) $P(0) : \models \varphi_1$

Demo.

$$
\begin{aligned}
&\models \varphi_1 \\
&\Leftrightarrow \text{(def. } \varphi_1\text{)} \\
&\models \varphi_0 \vee \neg p_0 \\
&\Leftrightarrow \text{(def. } \varphi_0\text{)} \\
&\models p_0 \vee \neg p_0
\end{aligned}
$$

Lo que se cumple por ser una tautología conocida.

Paso Inductivo 1

HI) $P(n) : \models \varphi_{n+1}$

TI) $P(n+1) : \models \varphi_{n+2}$

Demo.

$$
\begin{aligned}
&\models \varphi_{n+2} \\
&\Leftrightarrow \text{(def. } \varphi_{n+2}\text{)} \\
&\models \varphi_{n+1} \vee \neg p_0 \\
&\Leftrightarrow \text{(def. } \models\text{)} \\
&(\bar{\forall} v) v(\varphi_{n+1} \vee \neg p_0) = 1 \\
&\Leftrightarrow \text{(def. } v\text{)} \\
&(\bar{\forall} v) \max\{v(\varphi_{n+1}), v(\neg p_0)\} = 1 \\
&\Leftrightarrow \text{(HI)} \\
&(\bar{\forall} v) \max\{1, v(\neg p_0)\} = 1 \\
&\Leftrightarrow \text{(def. máx)} \\
&(\bar{\forall} v) 1 = 1
\end{aligned}
$$

Luego, por el principio de inducción primitiva en $\mathbb{N}$, concluimos que

$$(\bar{\forall} n \in \mathbb{N}) \models \varphi_{n+1}$$

II. Sea $\psi = p_0 \wedge p_0$

- $\not\models \psi$:
  Considero v tal que $v(p_0) = 0$

  $$\begin{array}{l} \text{mín}(v(p_0), v(p_0)) = 0 \\ \Rightarrow \text{(def. valuación)} \\ v(p_0 \wedge p_0) = 0 \\ \Rightarrow \text{(def. valuación)} \\ (\bar{\exists} v) v(p_0 \wedge p_0) = 0 \\ \Rightarrow \text{(def. } \models) \\ \not\models p_0 \wedge p_0 \end{array}$$

- $\psi \notin \Gamma$:
  Por definición de $\Gamma, p_0 \wedge p_0 \notin \Gamma$.
- $\Gamma \models \psi$:
  Sea una valuación v tal que $v(\Gamma) = 1$. Entonces:

  $$\begin{array}{l} v(\Gamma) = 1 \\ \Rightarrow (p_0 \in \Gamma) \\ v(p_0) = 1 \\ \Rightarrow \text{(aritmética)} \\ \text{mín}\{v(p_0), v(p_0)\} = 1 \\ \Rightarrow \text{(def. } v) \\ v(p_0 \wedge p_0) = 1 \end{array}$$

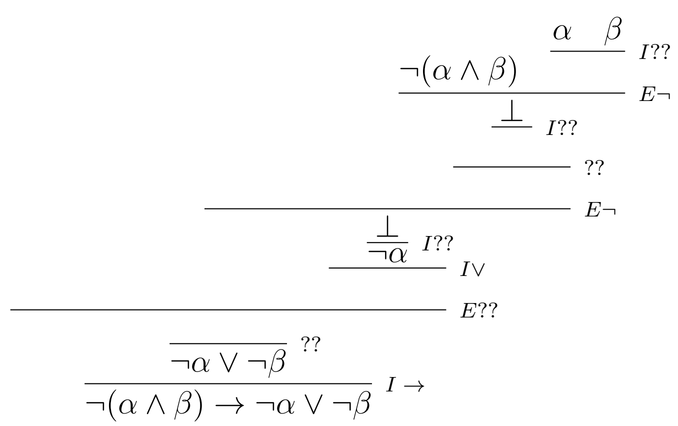
  Como cualquier valuación v que haga verdadero a Γ también debe hacer verdadero a ψ, esto prueba que $\Gamma \models \psi$.

Por lo tanto, la fórmula $\psi = p_0 \wedge p_0$ cumple lo pedido.

Ejercicio 3 (10 puntos)

a. Complete el siguiente árbol de forma tal que sea un elemento de `DER` que justifique la siguiente afirmación:

   $\vdash \neg(\alpha \wedge \beta) \to \neg\alpha \vee \neg\beta$



b. Construya una derivación que justifique la siguiente afirmación:

$$\varphi \to \psi \vdash \neg\neg\psi \vee \neg\varphi$$

c. A partir de lo demostrado en las partes anteriores y sabiendo que se cumple:

$$\neg\varphi, \neg\alpha \vee \neg\beta \vdash \sigma$$

Demostrar que:

I. $\neg\varphi \vdash \neg(\alpha \wedge \beta) \to \sigma$
II. $(p_0 \to p_1) \to \neg p_1 \vdash \neg\neg\neg p_1 \vee \neg(p_0 \to p_1)$

En ningún caso son aceptables justificaciones basadas en consideraciones semánticas

Propuesta de solución

a.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)]^3$}
\AxiomC{$[\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)]^3$}
\AxiomC{$[\neg(\alpha \wedge \beta)]^4$}
\AxiomC{$[\alpha]^2$}
\AxiomC{$[\beta]^1$}
\RightLabel{$I\wedge$}
\BinaryInfC{$\alpha \wedge \beta$}
\RightLabel{$E\neg$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$I\neg(1)$}
\UnaryInfC{$\neg\beta$}
\RightLabel{$I\vee$}
\UnaryInfC{$\neg\alpha \vee \neg\beta$}
\RightLabel{$E\neg$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$I\neg(2)$}
\UnaryInfC{$\neg\alpha$}
\RightLabel{$I\vee$}
\UnaryInfC{$\neg\alpha \vee \neg\beta$}
\RightLabel{$E\neg$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$RAA(3)$}
\UnaryInfC{$\neg\alpha \vee \neg\beta$}
\RightLabel{$I \to (4)$}
\UnaryInfC{$\neg(\alpha \wedge \beta) \to \neg\alpha \vee \neg\beta$}
\end{prooftree}
$$

b.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\neg(\neg\neg\psi \vee \neg\varphi)]^3$}
\AxiomC{$[\neg(\neg\neg\psi \vee \neg\varphi)]^3$}
\AxiomC{$[\neg\psi]^2$}
\AxiomC{$\varphi \to \psi$}
\AxiomC{$[\varphi]^1$}
\RightLabel{$E \to$}
\BinaryInfC{ψ}
\RightLabel{$E\neg$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$I\neg(1)$}
\UnaryInfC{$\neg\varphi$}
\RightLabel{$I\vee$}
\UnaryInfC{$\neg\neg\psi \vee \neg\varphi$}
\RightLabel{$E\neg$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$I\neg(2)$}
\UnaryInfC{$\neg\neg\psi$}
\RightLabel{$I\vee$}
\UnaryInfC{$\neg\neg\psi \vee \neg\varphi$}
\RightLabel{$E\neg$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$RAA(3)$}
\UnaryInfC{$\neg\neg\psi \vee \neg\varphi$}
\end{prooftree}
$$

c. I. Por las partes anteriores y la sugerencia, sabemos que:

- $(\bar{\exists} D_1 \in \mathtt{DER}) H(D_1) \subseteq \emptyset$ y $C(D_1) = \neg(\alpha \wedge \beta) \to \neg\alpha \vee \neg\beta$
- $(\bar{\exists} D_3 \in \mathtt{DER}) H(D_3) \subseteq \{\neg\varphi, \neg\alpha \vee \neg\beta\}$ y $C(D_3) = \sigma$

Con esto construimos la siguiente derivación:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\neg\varphi$}
\AxiomC{D_1}
\noLine
\UnaryInfC{$\neg(\alpha \wedge \beta) \to \neg\alpha \vee \neg\beta$}
\AxiomC{$[\neg(\alpha \wedge \beta)]^1$}
\RightLabel{$E \to$}
\BinaryInfC{$\neg\alpha \vee \neg\beta$}
\noLine
\BinaryInfC{D_3}
\noLine
\UnaryInfC{σ}
\RightLabel{$I \to^1$}
\UnaryInfC{$\neg(\alpha \wedge \beta) \to \sigma$}
\end{prooftree}
$$

De esta forma se encuentra que

$$(\bar{\exists} D_4 \in \texttt{DER}) H(D_4) \subseteq \{\neg\varphi, \} \text{ y } C(D_4) = \neg(\alpha \wedge \beta) \to \sigma$$

por lo que $\neg\varphi \vdash \neg(\alpha \wedge \beta) \to \sigma$

II. Por la parte b sabemos que $(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})(\bar{\forall}\psi \in \texttt{PROP})\varphi \to \psi \vdash \neg\neg\psi \vee \neg\psi$. En particular se debe cumplir para:

- $\varphi := p_0 \to p_1$
- $\psi := \neg p_1$

con lo que sustituyendo, obtenemos:

$$(p_0 \to p_1) \to \neg p_1 \vdash \neg\neg\neg p_1 \vee \neg(p_0 \to p_1)$$

Ejercicio 4 (10 puntos)

Dados los siguientes conjuntos:

- $\Gamma_m(k) = \{p_i : i \text{ es múltiplo de } k\}$
- $\Gamma_{nm}(k) = \{\neg p_i : i \text{ no es múltiplo de } k\}$

a. Demuestre que

I. $(\bar{\forall} k \in \mathbb{N})\Gamma_m(k) \nvdash \bot$

II. $(\bar{\forall} k \in \mathbb{N})\Gamma_{nm}(k) \nvdash \bot$

III. $(\bar{\forall} i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N})$si $i < j$ y $i > 0$ entonces $\Gamma_m(i) \cup \Gamma_{nm}(j) \vdash \bot$

b. Indique si se cumple la siguiente afirmación. Demuestre o dé un contraejemplo según corresponda.

$$(\bar{\forall} k \in \mathbb{N})\textsc{Cons}(\Gamma_m(k) \cup \Gamma_{nm}(k) \text{ es consistente maximal.}$$

Propuesta de solución

a. I. **T)** $\Gamma_m(k) \nvdash \bot$

Dem.)

- Dado $k \in \mathbb{N}$ cualquiera, por definición $\Gamma_m(k)$ es el siguiente conjunto de letras proposicionales $\{p_i : i \text{ es múltiplo de } k\}$
- De esta forma, la valuación v tal que $v(p_i) = 1$ para todo i hace verdaderas a todas las letras proposicionales, en particular a las de $\Gamma_m(k)$.
- Por la condición suficiente de consistencia, al existir esa valuación, el conjunto es consistente y se cumple la tesis.

II. **T)** $\Gamma_{nm}(k) \nvdash \bot$

Dem.)

- Dado $k \in \mathbb{N}$ cualquiera, por definición $\Gamma_{nm}(k)$ es el siguiente conjunto de negaciones de letras proposicionales $\{\neg p_i : i \text{ no es múltiplo de } k\}$

- De esta forma, la valuación v tal que $v(p_i) = 0$ para cualquier i debe hacer falsas a todas las letras proposicionales y por lo tanto verdaderas todas las negaciones de las letras proposicionales incluyendo a las de $\Gamma_{nm}(k)$.
- Por la condición suficiente de consistencia, al existir esa valuación, el conjunto es consistente y se cumple la tesis.

III. **T)** $(\bar{\forall} i \in \mathbb{N})(\bar{\forall} j \in \mathbb{N})$ Si $i < j$ y $i > 0$ entonces $\Gamma_m(i) \cup \Gamma_{nm}(j) \vdash \perp$
Dem.)

- Dado que $i < j$ y $i > 0$, entonces i no es múltiplo de j pero sí es múltiplo de sí mismo, por lo que $p_i \in \Gamma_m(i)$ y $\neg p_i \in \Gamma_{nm}(j)$.
- En este caso, se puede hacer la siguiente derivación a partir de la unión de los dos conjuntos.

$$\dfrac{\neg p_i \quad p_i}{\perp}\, E\neg$$

Por lo que el conjunto es inconsistente.

b. **Verdadero.**
T)$(\bar{\forall} k \in \mathbb{N})\textsc{Cons}(\Gamma_m(k) \cup \Gamma_{nm}(k))$ es consistente maximal.
Dem.)

- Consideremos $k \in \mathbb{N}$ arbitrario.
- Por definición, se cumple que dado cualquier natural i, o bien p_i (si i es múltiplo de k) o bien su negación (si i no es múltiplo de k) están en $\Gamma_m(k) \cup \Gamma_{nm}(k)$ y no hay otras fórmulas en la unión.
- Por lo tanto, la valuación v tal que p_i vale 1 si i es múltiplo de k y 0 si i no es múltiplo de k es la única que satisface $\Gamma_m(k) \cup \Gamma_{nm}(k)$.
- Por el teorema de corrección, v también es la única valuación que satisface $\textsc{Cons}(\Gamma_m(k) \cup \Gamma_{nm}(k))$.
- Por otra parte, $\textsc{Cons}(\Gamma_m(k) \cup \Gamma_{nm}(k))$ es una teoría por ser un $\textsc{Cons}$.
- Como el conjunto es teoría y sólo lo satisface una única valuación, debe ser consistente maximal (ver ejercicio 9 del práctico 5).