Primer parcial de Lógica

2 de Mayo 2012

Indicaciones generales

- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **40** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (10 puntos)

a. Defina inductivamente el lenguaje `PROP'` con alfabeto $\{p_0, p_1, \neg, \rightarrow,), (\}$, de forma que sea un subconjunto de `PROP`.

b. Considere la siguiente definición inductiva del lenguaje `POSF`:

   I. $p_0 \in \texttt{POSF}$
   II. $p_1 \in \texttt{POSF}$
   III. Si $\varphi \in \texttt{POSF}$, entonces $\varphi\neg\ \in \texttt{POSF}$
   IV. Si $\varphi \in \texttt{POSF}$ y $\psi \in \texttt{POSF}$, entonces $\varphi\ \psi \rightarrow\ \in \texttt{POSF}$

   Defina utilizando el esquema de recursión primitiva que corresponda una función invertible $f : \texttt{POSF} \rightarrow \texttt{PROP'}$ y su función inversa $f^{-1} : \texttt{PROP'} \rightarrow \texttt{POSF}$.

   La función f debe convertir una palabra de `POSF` en una fórmula proposicional con la misma cantidad de ocurrencias de cada letra proposicional y de cada conectivo. Por ejemplo:

$$f(p_0\neg\ p_0\ p_1 \rightarrow \rightarrow) = ((\neg p_0) \rightarrow (p_0 \rightarrow p_1))$$

c. Defina utilizando el esquema de recursión primitiva que corresponda otra función invertible
   $g : \texttt{POSF} \rightarrow \texttt{PROP'}$ (distinta de la anterior) y su inversa $g^{-1} : \texttt{PROP'} \rightarrow \texttt{POSF}$.

   La función g también debe convertir una palabra de `POSF` en una fórmula proposicional con la misma cantidad de ocurrencias de cada letra proposicional y de cada conectivo. Por ejemplo:

$$g(p_0\neg\ p_0\ p_1 \rightarrow \rightarrow) = ((p_1 \rightarrow p_0) \rightarrow (\neg p_0))$$

d. Demuestre por inducción que $\bar{\forall}\varphi \in \texttt{POSF} :: f^{-1}(g(\varphi)) = g^{-1}(f(\varphi))$.

e. Utilizando la parte anterior, demuestre que para todo φ y ψ en `POSF`, $f(\varphi) = g(\psi)$ si y sólo si $f(\psi) = g(\varphi)$.

Propuesta de solución

a. i $p_0 \in \texttt{PROP'}$
   ii $p_1 \in \texttt{PROP'}$
   iii Si $\varphi \in \texttt{PROP'}$, entonces $(\neg\varphi) \in \texttt{PROP'}$
   iv Si $\varphi \in \texttt{PROP'}$ y $\psi \in \texttt{PROP'}$, entonces $(\varphi \to \psi) \in \texttt{PROP'}$

b.
$$\begin{array}{ll} f : \texttt{POSF} \to \texttt{PROP'} & \\ f(p_0) & = p_0 \\ f(p_1) & = p_1 \\ f(\varphi\neg) & = (\neg f(\varphi)) \\ f(\varphi\psi{\to}) & = (f(\varphi) \to f(\psi)) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} f^{-1} : \texttt{PROP'} \to \texttt{POSF} & \\ f^{-1}(p_0) & = p_0 \\ f^{-1}(p_1) & = p_1 \\ f^{-1}(\neg\varphi) & = f^{-1}(\varphi)\neg \\ f^{-1}(\varphi \to \psi) & = f^{-1}(\varphi)f^{-1}(\psi) \to \end{array}$$

c.
$$\begin{array}{ll} g : \texttt{POSF} \to \texttt{PROP'} & \\ g(p_0) & = p_0 \\ g(p_1) & = p_1 \\ g(\varphi\neg) & = (\neg g(\varphi)) \\ g(\varphi\psi{\to}) & = (g(\psi) \to g(\varphi)) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} g^{-1} : \texttt{PROP'} \to \texttt{POSF} & \\ g^{-1}(p_0) & = p_0 \\ g^{-1}(p_1) & = p_1 \\ g^{-1}(\neg\varphi) & = g^{-1}(\varphi)\neg \\ g^{-1}(\varphi \to \psi) & = g^{-1}(\psi)g^{-1}(\varphi) \to \end{array}$$

d. Se demuestra por inducción en POSF, utilizando la siguiente propiedad:

$$P(\varphi) := f^{-1}(g(\varphi)) = g^{-1}(f(\varphi))$$

Paso Base 1

T) $P(p_0) : f^{-1}(g(p_0)) = g^{-1}(f(p_0))$

Demo.

$$\begin{array}{l} f^{-1}(g(p_0)) \\ = \text{(def. } g\text{)} \\ f^{-1}(p_0) \\ = \text{(def. } f^{-1}\text{)} \\ p_0 \\ = \text{(def. } g^{-1}\text{)} \\ g^{-1}(p_0) \\ = \text{(def. } f\text{)} \\ g^{-1}(f(p_0)) \end{array}$$

Paso Base 2

T) $P(p_1) : f^{-1}(g(p_1)) = g^{-1}(f(p_1))$

Demo.

Análoga a la anterior.

Paso Inductivo 1

HI) $P(\varphi) : f^{-1}(g(\varphi)) = g^{-1}(f(\varphi))$

TI) $P(\varphi\neg) : f^{-1}(g(\varphi\neg)) = g^{-1}(f(\varphi\neg))$

Demo.

$$
\begin{aligned}
& f^{-1}(g(\varphi\neg)) \\
& = \text{(def. } g\text{)} \\
& f^{-1}((\neg g(\varphi))) \\
& = \text{(def. } f^{-1}\text{)} \\
& f^{-1}(g(\varphi))\neg \\
& = \text{(HI)} \\
& g^{-1}(f(\varphi))\neg \\
& = \text{(def. } g^{-1}\text{)} \\
& g^{-1}((\neg f(\varphi))) \\
& = \text{(def. } f\text{)} \\
& g^{-1}(f(\varphi\neg))
\end{aligned}
$$

Paso Inductivo 2

HI1) $P(\varphi) : f^{-1}(g(\varphi)) = g^{-1}(f(\varphi))$

HI2) $P(\psi) : f^{-1}(g(\psi)) = g^{-1}(f(\psi))$

TI) $P(\varphi\psi \to) : f^{-1}(g(\varphi\psi\to)) = g^{-1}(f(\varphi\psi\to))$

Demo.

$$
\begin{aligned}
& f^{-1}(g(\varphi\psi \to)) \\
& = \text{(def. } g\text{)} \\
& f^{-1}((g(\psi) \to g(\varphi))) \\
& = \text{(def. } f^{-1}\text{)} \\
& f^{-1}(g(\psi))f^{-1}(g(\varphi)) \to \\
& = \text{(HI1 y HI2)} \\
& g^{-1}(f(\psi))g^{-1}(f(\varphi)) \to \\
& = \text{(def. } g^{-1}\text{)} \\
& g^{-1}(f(\varphi) \to f(\psi)) \\
& = \text{(def. } f\text{)} \\
& g^{-1}(f(\varphi\psi \to))
\end{aligned}
$$

Por el principio de inducción primitiva en `POSF` concluimos que:

$$(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{POSF}) f^{-1}(g(\varphi)) = g^{-1}(f(\varphi))$$

e.

$$
\begin{array}{l}
f(\varphi) = g(\psi) \\
\Leftrightarrow \text{(aplicamos } f^{-1} \text{ de los dos lados)} \\
f^{-1}(f(\varphi)) = f^{-1}(g(\psi)) \\
\Leftrightarrow \text{(composición de } f \text{ con su inversa)} \\
\varphi = f^{-1}(g(\psi)) \\
\Leftrightarrow \text{(parte d)} \\
\varphi = g^{-1}(f(\psi)) \\
\Leftrightarrow \text{(aplicamos } g \text{ de los dos lados)} \\
g(\varphi) = g(g^{-1}(f(\psi))) \\
\Leftrightarrow \text{(composición de } g \text{ con su inversa)} \\
g(\varphi) = f(\psi) \\
\Leftrightarrow \text{(simetría de la igualdad)} \\
f(\psi) = g(\varphi)
\end{array}
$$

Ejercicio 2 (10 puntos)

a. Para cada uno de los casos que se enumeran a continuación determine si existe un conjunto **consistente** Γ_i que cumpla la condición. En caso de que exista proporcione el que tenga la menor cantidad de fórmulas posibles de forma tal que sólo contengan el conectivo $\neg$. Justifique su respuesta.

1. $\Gamma_1 \models (p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$
2. $\Gamma_2 \models (p \vee \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

b. Proporcione un conjunto $\Gamma_3 \neq \emptyset$ tal que $\Gamma_3 \models (p \vee \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)$ pero $\Gamma_3 \not\models (p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$. Justifique su respuesta.

¿Γ_3 puede ser inconsistente? Justifique su respuesta.

c. Indique si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

Para toda v valuación, $v(\Gamma_1) = 1$ si y sólo si $v((p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)) = 1$

Recuerde que: dada una valuación v, $v(\Gamma_1) = 1$ si y sólo si $\bar{\forall} \varphi \in \Gamma_1 : v(\varphi) = 1$

Propuesta de solución

a. Como se trata de las fórmulas que solo pueden tener el conectivo $\neg$ y los conjuntos deben ser los menores posibles, es suficiente probar con subconjuntos de $\Gamma = \{p, q, \neg p, \neg q\}$

1. $\Gamma_1 \models (p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$
   Operamos para ver mejor que condiciones debe cumplir una valuación que satisfaga la fórmula.

$$
\begin{array}{ll}
v((p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)) = 1 & \Leftrightarrow \\
max(1 - v(p \vee \neg q), v(p \wedge q)) = 1 & \Leftrightarrow \\
max(1 - max(v(p), 1 - v(q)), min(v(p), v(q))) = 1 & \Leftrightarrow \\
max(min(1 - v(p), v(q)), min(v(p), v(q))) = 1 &
\end{array}
$$

   Haremos un análisis de casos en el valor de verdad de p:

$v(p) = 1$

$$
\begin{array}{ll}
max(min(1 - v(p), v(q)), min(v(p), v(q))) = 1 & \Leftrightarrow \\
max(min(1 - 1, v(q)), min(1, v(q))) = 1 & \Leftrightarrow \\
max(min(0, v(q)), v(q)) = 1 & \Leftrightarrow \\
max(0, v(q)) = 1 & \Leftrightarrow \\
v(q) = 1 &
\end{array}
$$

$v(p) = 0$

$$
\begin{array}{ll}
max(min(1 - v(p), v(q)), min(v(p), v(q))) = 1 & \Leftrightarrow \\
max(min(1 - 0, v(q)), min(0, v(q))) = 1 & \Leftrightarrow \\
max(min(1, v(q)), 0) = 1 & \Leftrightarrow \\
max(v(q), 0) = 1 & \Leftrightarrow \\
v(q) = 1 &
\end{array}
$$

Vemos que en ambos casos $v((p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)) = 1 \Leftrightarrow v(q) = 1$, por lo que $(p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$ `eq` q, por lo que un conjunto posible para Γ_1 será $\{q\}$, que es mínimo, ya que si hubiera uno menor implicaría que $\Gamma_1 = \emptyset$, debiendo ser q una tautología, lo que es falso, ya que q es contingencia. Además, podemos ver que Γ_1 es consistente, ya que cualquier valuación que haga verdadera a q satisface Γ_1.

2. $\Gamma_2 \models (p \vee \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)$
   Operamos en base a equivalencias conocidas para llevar la fórmula a una forma normal conjuntiva.

$$
\begin{array}{ll}
(p \vee \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p) & \texttt{eq} \\
\neg(p \vee \neg q) \vee (\neg q \vee p) & \texttt{eq} \text{ (De Morgan)} \\
(\neg p \wedge \neg\neg q) \vee (\neg q \vee p) & \texttt{eq} \text{ (doble negación)} \\
(\neg p \wedge q) \vee (\neg q \vee p) & \texttt{eq} \text{ (distributiva)} \\
(\neg p \vee \neg q \vee p) \wedge (q \vee \neg q \vee p) & \texttt{eq} \text{ (conmutativa, asociativa)} \\
(\neg p \vee p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg q \vee p) & \texttt{eq} \ (\varphi \vee \neg\varphi \ \texttt{eq} \ \neg\bot) \\
(\neg\bot \vee \neg q) \wedge (\neg\bot \vee p) & \texttt{eq} \text{ (absorción)} \\
\neg\bot \wedge \neg\bot & \texttt{eq} \text{ (neutro)} \\
\neg\bot &
\end{array}
$$

   Es decir la fórmula es una tautología, por lo que $(\bar{\forall}\Gamma \in \texttt{PROP})\Gamma \models (p \vee \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)$. Tomamos entonces el conjunto con el menor número de elementos: $\Gamma_2 = \emptyset$, que es consistente, ya que cualquier valuación lo satisface.

b. Por $a.2$ sabemos que cualquier conjunto cumple la primera condición, y por $a.1$ que $\Gamma_3 \not\models q$, por lo que cualquier conjunto unitario (mínimo no vacío) que no modele a q es suficiente, por ejemplo $\Gamma_3 = \{r\}$, donde r es una variable proposicional cualquiera, distinta de q.

   Γ_3 no puede ser inconsistente, porque todas las fórmulas de `PROP` son consecuencia lógica de un conjunto inconsistente, lo que contradiría la segunda condición.

c. **Verdadero.**

$$
\begin{array}{lcll}
(v(\Gamma_1) = 1 & \Leftrightarrow & v((p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)) = 1) & \Leftrightarrow \text{(def. } \Gamma_1) \\
(v(q) = 1 & \Leftrightarrow & v((p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)) = 1) &
\end{array}
$$

   Lo que es cierto por haber sido probado en $a.1$

Ejercicio 3 (10 puntos)

Construya derivaciones que justifiquen los siguientes juicios:

a. $(q \to \neg p) \to p \vdash \neg(p \to \neg q) \vee p$

b. $\vdash ((p \to q) \to p) \to \neg(\neg p \wedge \neg(p \wedge q))$

En ningún caso son aceptables justificaciones basadas en consideraciones semánticas

Propuesta de solución

a.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg p]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg p]^1}{q \to \neg p}\,I\to \qquad (q \to \neg p) \to p}{p}\,E\to}{\bot}\,E\neg}{p}\,RAA^1}{\neg(p \to \neg q) \vee p}\,I\vee$$

b.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg p \wedge \neg(p \wedge q)]^2}{\neg p}\,E\wedge \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[p]^3 \qquad \dfrac{[\neg p \wedge \neg(p \wedge q)]^2}{\neg p}\,E\wedge}{\bot}\,E\neg}{q}\,E\bot}{p \to q}\,I\to^3 \qquad [(p \to q) \to p]^1}{p}\,E\to}{\bot}\,E\neg}{\neg(\neg p \wedge \neg(p \wedge q))}\,I\neg^2}{((p \to q) \to p) \to \neg(\neg p \wedge \neg(p \wedge q))}\,I\to^1$$

Ejercicio 4 (10 puntos)

Dados los siguientes conjuntos:

I. $\Gamma_1 = \{p_0, p_0 \vee p_1, p_1 \leftrightarrow \neg p_0\}$

II. $\Gamma_2 = \{p_0 \vee p_1, p_1 \leftrightarrow \neg p_0, p_2 \leftrightarrow \neg p_1, p_3 \leftrightarrow \neg p_2, ..., p_{i+1} \leftrightarrow \neg p_i \ , ...\}$

III. $\Gamma_3 = \Gamma_2 \cup \{p_7\}$

IV. $\Gamma_4 = Cons(\Gamma_3)$

a. Para cada uno dar el número de valuaciones que lo satisface o sea, que hacen verdaderas a todas las fórmulas del conjunto. Observar que pueden ser infinitas valuaciones. Justifique su respuesta.

b. Determinar cuáles son consistentes. Justifique su respuesta.

c. Determinar cuáles son consistentes maximales. Justifique su respuesta.

Nota: pueden usarse los resultados que aparecen en el práctico del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.

Propuesta de solución

a. I. $\Gamma_1 : \infty$

Sea una valuación v que satisface Γ_1, se tiene que

- $v(p_0) = 1$
- $$\begin{array}{l} v(p_1 \leftrightarrow \neg p_0) = 1 \\ \Leftrightarrow \text{(def. } v\text{)} \\ v(p_1) = v(\neg p_0) \\ \Leftrightarrow \text{(def. } v\text{)} \\ v(p_1) = 1 - v(p_0) \\ \Leftrightarrow (v(p_0) = 1) \\ v(p_1) = 1 - 1 \\ \Leftrightarrow \text{(aritmética)} \\ v(p_1) = 0 \end{array}$$

  Por lo que $v(p_1) = 0$

- $$\begin{array}{l} v(p_0 \vee p_1) \\ = \text{(def. } v\text{)} \\ max(v(p_0), v(p_1)) \\ = (v(p_0) = 1) \\ max(1, v(p_1)) \\ = \text{(aritmética)} \\ 1 \end{array}$$

Por lo tanto, cualquier valuación que cumpla $v(p_0) = 1$ y $v(p_1) = 0$ satisface Γ_1, por lo que hay infinitas que lo hacen.

II. $\Gamma_2 : 2$

Estudiamos que valuaciones satisfacen Γ_2:

$$\begin{array}{l} v(p_{i+1} \leftrightarrow \neg p_i) = 1 \\ \Leftrightarrow \text{(def. } v\text{)} \\ v(p_{i+1}) = v(\neg p_i) \\ \Leftrightarrow \text{(def. } v\text{)} \\ v(p_{i+1}) = 1 - v(p_i) \end{array}$$

En particular para $i = 0$: $v(p_1) = 1 - v(p_0)$. El valor de v para $p_0 \vee p_1$ es entonces:

$$\begin{array}{l} v(p_0 \vee p_1) \\ = \text{(def. } v\text{)} \\ max(v(p_0), v(p_1)) \\ = (v(p_1) = 1 - v(p_0)) \\ max(v(p_0), 1 - v(p_0)) \\ = \text{(prop. } max\text{)} \\ 1 \end{array}$$

Por lo tanto, las valuaciones que satisfacen Γ_2 son las que cumplen

$$(\bar{\forall} i \in \mathbb{N}) v(p_{i+1}) = 1 - v(p_i)$$

y existen exactamente dos valuaciones que cumplen esto:

$$v_1(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ es par} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad v_2(p_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \text{ es par} \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

III. $\Gamma_3 : 1$

Como $\Gamma_2 \subset \Gamma_3$, entonces las valuaciones que satisfacen Γ_3 también tienen que satisfacer Γ_2 (si hubiera una fórmula en Γ_2 que no se satisface, esa fórmula también tiene que estar en Γ_3, lo que es absurdo).

Las valuaciones v_1 y v_2 de la parte anterior que satisfacen Γ_2, cumplen:

$$v_1(p_7) = 0 \text{ y } v_2(p_7) = 1$$

Por lo que la única valuación que satisface Γ_3 es v_2.

IV. $\Gamma_4 : 1$

Como $\Gamma_3 \subseteq \textsc{Cons}(\Gamma_3)$, las valuaciones que satisfacen a Γ_4 también deben satisfacer a Γ_3; así que la única valuación candidata a satisfacer Γ_4 es v_2.

Sea $\varphi \in \Gamma_4$, entonces:

$$\begin{array}{l}
\varphi \in \Gamma_4 \\
\Leftrightarrow \text{(def. } \Gamma_4\text{)} \\
\varphi \in \textsc{Cons}(\Gamma_3) \\
\Leftrightarrow \text{(def. Cons)} \\
\Gamma_3 \vdash \varphi \\
\Leftrightarrow \text{(corrección)} \\
\Gamma_3 \models \varphi \\
\Leftrightarrow \text{(def. } \models\text{)} \\
(\bar{\forall} v) \text{ si } v(\Gamma_3) = 1 \text{ entonces } v(\varphi) = 1 \\
\Rightarrow \text{(en particular para } v_2\text{)} \\
\text{ si } v_2(\Gamma_3) = 1 \text{ entonces } v_2(\varphi) = 1 \\
\Rightarrow \text{(por parte enterior, } v_2(\Gamma_3) = 1\text{)} \\
v_2(\varphi) = 1
\end{array}$$

Probamos entonces que $v_2(\Gamma_4) = 1$, y esta es la única valuación que lo satisface.

b. Como todos los conjuntos tienen al menos una valuación que los satisfacen, todos son consistentes.

c. Un conjunto es consistentes maximal si y sólo si es teoría y es satisfecho por una única valuación (ver ejercicio 9 del práctico 5).

Por lo tanto, Γ_1 y Γ_2 no pueden ser consistentes maximales (hay más de una valuación que los satisfacen).

Γ_3 no es consistente maximal, puesto que no es teoría. Por ejemplo, $\neg\bot$ es un teorema, por lo que $\Gamma_3 \vdash \neg\bot$, pero $\neg\bot \notin \Gamma_3$.

Finalmente Γ_4 si es consistente maximal, ya que es teoría por ser $\textsc{Cons}$ de un conjunto, y lo satisface una única valuación.