Parcial Integrador de Lógica

20 de julio 2020

Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **100** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (25 puntos)

Considere los siguientes conjuntos de símbolos:

- $VCL = \{a, e, i, u, o\}$
- $DIG = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

El primero son las letras vocales y el segundo los dígitos.

a. Construya una definición libre del lenguaje $\mathcal{L}$ de las tiras tales que se cumplen todas las siguientes condiciones:
   - Todas las palabras terminan en un dígito.
   - Todas las palabras comienzan en un dígito.
   - No hay dos dígitos seguidos.
   - No hay dos vocales seguidas.

b. Pruebe que todas las tiras del lenguaje tienen por lo menos un símbolo.

c. Defina la función $CVOC : \mathcal{L} \to \mathbb{N}$ que cuenta la cantidad de vocales de una palabra.

d. Defina la función $CDIG : \mathcal{L} \to \mathbb{N}$ que cuenta la cantidad de dígitos de una palabra.

e. Demuestre que para cualquier tira ω de $\mathcal{L}$ se cumple que: $CDIG(\omega) - CVOC(\omega) = 1$.

Bosquejo de solución

a. I Si $d \in DIG$ entonces $d \in \mathcal{L}$.
   II Si $d \in DIG$, $v \in VCL$ y $\omega \in \mathcal{L}$ entonces $dv\omega \in \mathcal{L}$

b. Sea $\omega \in \mathcal{L}$, hay dos posibilidades para este elemento:

   a) $\omega = d$ (se construyo a partir de la regla i) de la definición de $\mathcal{L}$).
   ω tiene 1 símbolo, el dígito d.
   Por lo tanto se cumple la propiedad.

b) $\omega = dv\omega'$ (se construyo a partir de la regla ii) de la definición de $\mathcal{L}$).
ω tiene por lo menos 2 símbolos, el dígito d y la vocal v.
Por lo tanto se cumple la propiedad.

c.

$$\begin{aligned} &CVOC : \mathcal{L} \to \mathbb{N} \\ &CVOC(d) \quad\;\; = 0 \\ &CVOC(dv\omega) = 1 + CVOC(\omega) \end{aligned}$$

d.

$$\begin{aligned} &CDIG : \mathcal{L} \to \mathbb{N} \\ &CDIG(d) \quad\;\; = 1 \\ &CDIG(dv\omega) = 1 + CDIG(\omega) \end{aligned}$$

e. $(\bar{\forall}\omega \in \mathcal{L})(CDIG(\omega) - CVOC(\omega) = 1)$

Demostraremos esta propiedad usando el PIP para $\mathcal{L}$.

Identificación de la propiedad: $P(\omega) := CDIG(\omega) - CVOC(\omega) = 1$

Paso Base

T) $P(d) : CDIG(d) - CVOC(d) = 1$

Demo)

$$\begin{aligned} &CDIG(d) - CVOC(d) \\ &= \text{(Def. de } CDIG \text{ y } CVOC\text{)} \\ &1 - 0 \\ &= \text{(Aritmética)} \\ &1 \end{aligned}$$

Por lo tanto se cumple la tesis.

Paso Inductivo

H) $P(\omega) : CDIG(\omega) - CVOC(\omega) = 1.$

T) $P(dv\omega) : CDIG(dv\omega) - CVOC(dv\omega) = 1.$

Demo)

$$\begin{aligned} &CDIG(dv\omega) - CVOC(dv\omega) \\ &= \text{(Def. de } CDIG \text{ y } CVOC\text{)} \\ &1 + CDIG(\omega) - (1 + CVOC(\omega)) \\ &= \text{(Aritmética)} \\ &CDIG(\omega) - CVOC(\omega) \\ &= \text{(Por } \mathbf{(HI)}\text{)} \\ &1 \end{aligned}$$

Por lo tanto se cumple la tesis.

Como nos encontramos en las hipótesis del PIP para $\mathcal{L}$, concluimos que:
$(\bar{\forall}\omega \in \mathcal{L})(CDIG(\omega) - CVOC(\omega) = 1)$.

Ejercicio 2 (25 puntos)

a. Construya un tableau semántico para determinar si el siguiente juicio es verdadero:

$$p \leftrightarrow \neg r, p \rightarrow q \models q \vee r$$

b. Considere un lenguaje de primer orden de tipo $\langle 2; 1; 0\rangle$ la siguiente fórmula:

$$\varphi = (\forall x)\neg(\exists y)(P(x,y) \wedge P(y, f(x)))$$

Considere además las siguiente estructura:

- $\mathcal{M}_1 = \langle \mathbb{N}, <, sucesor\rangle$

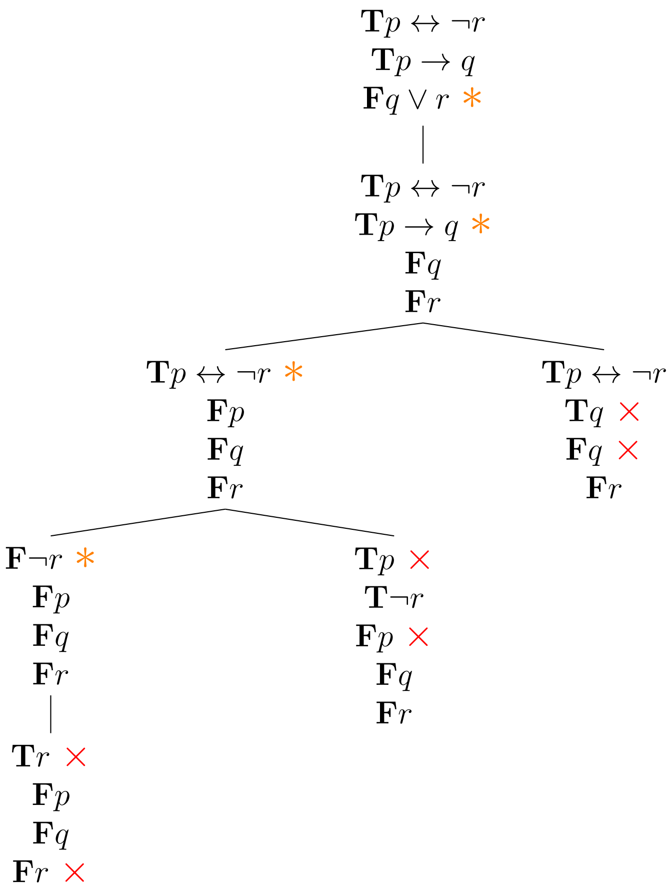
Indique cuales de las siguientes afirmaciones son verdadras y cuales falsas. Justifique sus respuestas.

I. $\mathcal{M}_1 \models \varphi$

II. $\models \varphi$

Bosquejo de solución

a. El tableau pedido es el siguiente:



Como en todas las hojas del tableau semántico se llega a una contradicción, se puede afirmar que no existe ninguna valuación v que cumpla $v(p \leftrightarrow \neg r) = 1,\ v(p \to q) = 1$ y $v(q \vee r) = 0$. Por lo tanto el juicio $p \leftrightarrow \neg r, p \to q \models q \vee r$ es verdadero.

b. I. La afirmación es verdadera.

T) $\mathcal{M}_1 \models (\forall x)\neg(\exists y)(P(x,y) \wedge P(y,f(x)))$

Dem.

$$\begin{array}{l}
\mathcal{M}_1 \models (\forall x)\neg(\exists y)(P(x,y) \wedge P(y,f(x))) \overset{(2.4.5)}{\Leftrightarrow} \\
\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}_1|\, \mathcal{M}_1 \models \neg(\exists y)(P(\bar{a},y) \wedge P(y,f(\bar{a}))) \overset{(2.4.5)}{\Leftrightarrow} \\
\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}_1|\, \mathcal{M}_1 \not\models (\exists y)(P(\bar{a},y) \wedge P(y,f(\bar{a}))) \overset{(2.4.5)}{\Leftrightarrow} \\
\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}_1|\, \bar{\forall} b \in |\mathcal{M}_1|\, \mathcal{M}_1 \not\models P(\bar{a},\bar{b}) \wedge P(\bar{b},f(\bar{a})) \overset{(2.4.5)}{\Leftrightarrow} \\
\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}_1|\, \bar{\forall} b \in |\mathcal{M}_1|\, \mathcal{M}_1 \not\models P(\bar{a},\bar{b}) \text{ o } \mathcal{M}_1 \not\models P(\bar{b},f(\bar{a})) \overset{(\text{def. } \models \text{ y } v^{\mathcal{M}_1})}{\Leftrightarrow} \\
\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}_1|\, \bar{\forall} b \in |\mathcal{M}_1|\, a \geq b \;\text{ o }\; b \geq a+1
\end{array}$$

Observar que si se toman dos naturales cualesquiera a y b se pueden dar dos situaciones:

- $a \geq b$ por lo tanto la afirmción se cumple de forma trivial por ser verdadera la primera parte del "o".
- $a < b$, y en tal caso se cumple $a \leq b$, por lo que la segunda parte del "o" es verdadera.

Por lo tanto la afirmación es verdadera.

■

II. Se puede construir un contraejemplo. Para esto, hay que dar una estructura $\mathcal{M}$ tal que no modele a φ.

Sea $\mathcal{M} = \langle \{1\}, \{\langle 1,1\rangle\}, id\rangle$. En este caso se debe probar lo siguiente:

T) $\mathcal{M} \not\models (\forall x)\neg(\exists y)(P(x,y) \wedge P(y,f(x)))$

Dem.

$$\begin{array}{l}
\mathcal{M} \not\models (\forall x)\neg(\exists y)(P(x,y) \wedge P(y,f(x))) \overset{(2.4.5)}{\Leftrightarrow} \\
(\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \not\models \neg(\exists y)(P(\bar{a},y) \wedge P(y,f(\bar{a}))) \overset{(2.4.5)}{\Leftrightarrow} \\
(\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}_1|)\mathcal{M} \models (\exists y)(P(\bar{a},y) \wedge P(y,f(\bar{a}))) \overset{(2.4.5)}{\Leftrightarrow} \\
(\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}_1|)(\bar{\exists} b \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \models P(\bar{a},\bar{b}) \wedge P(\bar{b},f(\bar{a})) \overset{(2.4.5)}{\Leftrightarrow} \\
(\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}_1|)(\bar{\exists} b \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \models P(\bar{a},\bar{b}) \text{ y } \mathcal{M} \models P(\bar{b},f(\bar{a})) \overset{(\text{def. } \models \text{ y } v^{\mathcal{M}})}{\Leftrightarrow} \\
(\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}_1|)(\bar{\exists} b \in |\mathcal{M}|) <a,b> \in \{\langle 1,1\rangle\} \;\text{ y }\; <b, id(a)> \in \{\langle 1,1\rangle\}
\end{array}$$

Dado que el dominio de $\mathcal{M}$ tiene sólo el elemento 1, sólo se puede dar el caso que $a = 1$ y $b = 1$ y por lo tanto se verifica que:

- $\langle 1,1\rangle \in \{\langle 1,1\rangle\}$ por definición de $\mathcal{M}$.
- Nuevamente, por definición de $\mathcal{M}$ se cumple que $f^{\mathcal{M}}$ es la identidad y $\langle 1,1\rangle \in \{\langle 1,1\rangle\}$.

Por estos motivos se cumple nuestra tesis.

■

Se ha encontrado un modelo que no satisface φ por lo que no es cierto que $\models \varphi$.

Ejercicio 3 (25 puntos)

Construir derivaciones para probar los siguientes juicios:

a. $\vdash (\alpha \to \beta) \vee (\neg\alpha \to \neg\beta)$

b. $(\forall y)(\forall x)(P(x,y) \leftrightarrow f(x) =' y) \vdash (\forall x)(\forall z)((\exists y)(P(x,y) \wedge P(y,z)) \to f(f(x)) =' z)$

No se admiten consideraciones semánticas.

Bosquejo de solución

a. $\vdash (\alpha \to \beta) \vee (\neg\alpha \to \neg\beta)$

$$
\dfrac{[\neg((\alpha \to \beta) \vee (\neg\alpha \to \neg\beta))]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg((\alpha \to \beta) \vee (\neg\alpha \to \neg\beta))]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg\beta]^1}{\neg\alpha \to \neg\beta}\, I\to}{(\alpha \to \beta) \vee (\neg\alpha \to \neg\beta)}\, I\vee}{\bot}\, E\neg}{\beta}\, RAA(1)}{\alpha \to \beta}\, I\to}{(\alpha \to \beta) \vee (\neg\alpha \to \neg\beta)}\, I\vee}{\dfrac{\bot}{(\alpha \to \beta) \vee (\neg\alpha \to \neg\beta)}\, RAA(2)}\, E\neg
$$

b. $(\forall y)(\forall x)(P(x,y) \leftrightarrow f(x) =' y) \vdash (\forall x)(\forall z)((\exists y)(P(x,y) \wedge P(y,z)) \rightarrow f(f(x)) =' z)$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[(\exists y)(P(x,y) \wedge P(y,z))]^1$}
\AxiomC{$(\forall y)(\forall x)(P(x,y) \leftrightarrow f(x) =' y)$}
\RightLabel{$E\forall(*7)$}
\UnaryInfC{$(\forall x)(P(x,y) \leftrightarrow f(x) =' y)$}
\RightLabel{$E\forall(*8)$}
\UnaryInfC{$P(x,y) \leftrightarrow f(x) =' y$}
\AxiomC{$[P(x,y) \wedge P(y,z)]^2$}
\RightLabel{$E\wedge$}
\UnaryInfC{$P(x,y)$}
\RightLabel{$E\leftrightarrow$}
\BinaryInfC{$f(x) =' y$}
\RightLabel{$RI2$}
\UnaryInfC{$y =' f(x)$}
\AxiomC{$(\forall y)(\forall x)(P(x,y) \leftrightarrow f(x) =' y)$}
\RightLabel{$E\forall(*5)$}
\UnaryInfC{$(\forall x)(P(x,z) \leftrightarrow f(x) =' z)$}
\RightLabel{$E\forall(*6)$}
\UnaryInfC{$P(y,z) \leftrightarrow f(y) =' z$}
\AxiomC{$[P(x,y) \wedge P(y,z)]^2$}
\UnaryInfC{$P(y,z)$}
\RightLabel{$E\leftrightarrow$}
\BinaryInfC{$f(y) =' z$}
\RightLabel{$RI4*(*4)$}
\BinaryInfC{$f(f(x)) =' z$}
\RightLabel{$E\exists(*3)(2)$}
\BinaryInfC{$f(f(x)) =' z$}
\RightLabel{$I\rightarrow(1)$}
\UnaryInfC{$(\exists y)(P(x,y) \wedge P(y,z)) \rightarrow f(f(x)) =' z$}
\RightLabel{$I\forall(*2)$}
\UnaryInfC{$(\forall z)((\exists y)(P(x,y) \wedge P(y,z)) \rightarrow f(f(x)) =' z)$}
\RightLabel{$I\forall(*1)$}
\UnaryInfC{$(\forall x)(\forall z)((\exists y)(P(x,y) \wedge P(y,z)) \rightarrow f(f(x)) =' z)$}
\end{prooftree}
$$

(*1) $x \notin FV\,\{(\forall y)(\forall x)(P(x,y) \leftrightarrow f(x) =' y)\}$

(*2) $z \notin FV\,\{(\forall y)(\forall x)(P(x,y) \leftrightarrow f(x) =' y)\}$

(*3) $y \notin FV\,\{f(f(x)) =' z, (\forall y)(\forall x)(P(x,y) \leftrightarrow f(x) =' y)\}$

(*4) y y $f(x)$ están libres para y en $f(y) =' z$

(*5) z está libre para y en $(\forall x)(P(x,y) \leftrightarrow f(x) =' y)$

(*6) y está libre para x en $P(x,z) \leftrightarrow f(x) =' z$

(*7) y está libre para y en $(\forall x)(P(x,y) \leftrightarrow f(x) =' y)$

(*8) x está libre para x en $P(x,y) \leftrightarrow f(x) =' y$

Ejercicio 4 (25 puntos)

Construya subconjuntos Γ_i de `PROP` que cumplan las siguientes condiciones. Justifique sus respuestas y en caso de no ser posible explique por qué.

a. Γ_1 tal que sea teoría y $(\bar{\forall} i \in \mathbb{N})(p_i \notin \Gamma_1$ y $\neg p_i \notin \Gamma_1)$

b. Γ_2 tal que sea consistente maximal y $(\bar{\forall} i \in \mathbb{N}) p_i \notin \Gamma_2$

c. Γ_3 tal que sea completo y $(\bar{\forall} i \in \mathbb{N})(p_i \notin \Gamma_3$ y $\neg p_i \notin \Gamma_3)$

Bosquejo de solución

a. $\Gamma_1 = \textsc{Cons}(\emptyset)$

Γ_1 es teoría ya que $\textsc{Cons}(\Gamma 1) = \textsc{Cons}(\textsc{Cons}(\emptyset)) = \textsc{Cons}(\emptyset) = \Gamma_1$.

Sea v la valuación que asigna 0 a todo p_i.

$v(\emptyset) = 1$ y $v(p_i) = 0$
$\Rightarrow$ (def. de $\models$)
$\emptyset \not\models p_i$
$\Rightarrow$ (por correctitud)
$\emptyset \nvdash p_i$
$\Leftrightarrow$ (def. de $\textsc{Cons}$)
$p_i \notin \textsc{Cons}(\emptyset) = \Gamma_1$

Sea v' la valuación que asigna 1 a todo p_i.

$v'(\emptyset) = 1$ y $v(\neg p_i) = 0$
$\Rightarrow$ (def. de $\models$)
$\emptyset \not\models \neg p_i$
$\Rightarrow$ (por correctitud)
$\emptyset \nvdash \neg p_i$
$\Leftrightarrow$ (def. de $\textsc{Cons}$)
$\neg p_i \notin \textsc{Cons}(\emptyset) = \Gamma_1$

b. $\Gamma_2 = \{\varphi \in \texttt{PROP} \ : \ v(\varphi) = 1\}$ donde v es la valuación que asigna 0 a todas las p_i.

- Γ_2 es consistente maximal de acuerdo con la *caracterización semántica* de la consistencia maximal.
- $p_i \notin \Gamma_2$ por definición de v y Γ_2.

c. $\Gamma_3 = \{\neg\neg p_i \ : \ i \in \mathbb{N}\}$

- Sea v una valuación tal que $v(\Gamma_3) = 1$.
  Se cumple para todo $i \in \mathbb{N}$ que: $v(\neg\neg p_i) = v(p_i) = 1$.
  Por lo tanto v es la valuación que asigna 1 a todas las letras proposicionales.
  Se concluye que Γ_3 es completo por que existe una única valuación que asigna 1 a todos sus elementos (caracterización semántica de completo).
- $p_i \notin \Gamma_3$ y $\neg p_i \notin \Gamma_3$ por construcción de Γ_3