Física Experimental 1

Medidas y cifras significativas

---

1. Mediciones

En lo que sigue se definirán conceptos referentes a la realización y presentación de medidas conforme a los estándares internacionales aceptados actualmente[1].

El objetivo de una medición es determinar el valor de una determinada magnitud, que llamaremos mensurando. Para ello debemos comparar el valor de cierta magnitud con un patrón primario, asignándole un número a través de algún procedimiento, utilizando instrumentos de medida. Debido a imperfecciones naturales en la realización de las mediciones, es imposible conocer con certeza absoluta el valor de una magnitud.

Por ejemplo, medimos la longitud de un lápiz con una regla y el resultado obtenido para el mensurando es 12,3 cm. Sin embargo, utilizando algún instrumento amplificador (lupa, microscopio) podríamos notar que las marcas de la regla que utilizamos no coinciden exactamente con los extremos del lápiz. Las propias marcas de la regla podrían revelarse con cierto ancho propio. Incluso resultará que en cierto punto nos encontramos en el lápiz, la misma situación que en la regla; a este nivel de amplificación las irregularidades en la forma del lápiz provocan que incluso el concepto de "longitud del lápiz"pueda no resultar nada obvio, si es que el mismo no perdió ya su validez y se deba redefinir.

Otro caso sería si consideráramos los efectos de la temperatura, la cual afecta directamente al mensurando por expansión o contracción térmica tanto del lápiz como de la regla. Este ejemplo nos muestra parte de las dificultades existentes en la determinación del "valor real"de una magnitud.

Por lo tanto lo que es posible obtener tras una medida no es el "valor real"de la misma, sino un intervalo de valores dentro del cual se encuentra la magnitud que nos interesa. Esto quiere decir que toda medición lleva implícita una **incertidumbre** y su resultado debe incluir la estimación del valor del mensurando y de su incertidumbre.

O sea que podemos representar el resultado de una medida como:

[1]basados en la "Guía para la expresión de incertidumbre en mediciones", ("Guide to the expression of uncertainly in measurements") BIPM, ISO, IEC, IFCC, IUPAC, IUPAP, GILM. 1995

$$x = \bar{x} \pm u(\bar{x}) \tag{1}$$

Donde $\bar{x}$ es la estimación del valor del mensurando y $u(\bar{x})$ su incertidumbre asociada [2]. Lo anterior permite afirmar que existe cierta probabilidad de que el "valor real"se encuentre en el intervalo $[\bar{x} - u(\bar{x}), \bar{x} + u(\bar{x})]$.

Se define el error en una medida como la diferencia entre el resultado de la medida y un valor acordado de referencia. Un error grande puede no ser preocupante, ya que si este es conocido e informado es posible descontarlo. Por ejemplo, si conocemos que la regla utilizada anteriormente para medir el lápiz tiene un error o desvío de +0,1 cm respecto al metro patrón, tomamos las medidas y luego sumamos -0,1 cm para descontarlo. Esto es diferente a la situación en que la regla tuviera una *incertidumbre* de 0,1 cm, dada por su apreciación, la cual solo indica la dispersión de los valores medidos. Siempre se debe tener presente la diferencia entre *error* e *incertidumbre*; el resultado de una medida luego de las correcciones puede estar extremadamente cerca del valor de referencia de la magnitud y por lo tanto tener un *error* despreciable, aún cuando dicha medida pueda tener una gran *incertidumbre* asociada.

Los errores pueden categorizarse en sistemáticos y aleatorios. Los errores sistemáticos afectan a todas las medidas por igual, y si son conocidos y evaluados es posible aplicar un factor de corrección a la medida con el fin de disminuirlo lo mas posible. El resultado de la medida luego de aplicar las correcciones, seguirá siendo una estimación del verdadero valor, debido a incertidumbres provenientes de efectos aleatorios, imperfecciones en el método o instrumentos de medición, entre otros.

Algunos de los factores que pueden influir en la incertidumbre son:

- Definición incompleta del mensurando.
- Conocimiento parcial de la influencia de las condiciones ambientales.
- Incertidumbres agregadas por el operador.
- Resolución limitada de los instrumentos
- Valores de constantes o parámetros usados en los cálculos.
- Aproximaciones realizadas en el procedimiento de medida
- Variación en observaciones repetidas en condiciones aparentemente idénticas.

[2] Muchas veces también se denota como $\Delta\bar{x}$

2. Clasificación de incertidumbres.

Una clasificación de incertidumbres consiste en agrupar las mismas en dos categorías según el método utilizado para estimar sus valores numéricos:

- Incertidumbres tipo A: aquellas que son evaluadas mediante análisis estadístico sobre una serie de observaciones.
- Incertidumbres tipo B: aquellas que son evaluadas por otros métodos, que no sean métodos estadísticos sobre una serie de mediciones

En la lista de causas de incertidumbre de la sección anterior, exceptuando la última, el resto son fuentes de incertidumbres tipo B.
Dos conceptos importantes de distinguir al momento de hablar de medidas experimentales son los de precisión y exactitud. Para definirlos, nos ayudaremos de la diana en la Figura 1.

Imaginemos que existe un valor real de la magnitud que estamos midiendo. A este valor real se lo representa en el centro de la diana, y se lo indica por la intersección de las líneas horizontal y vertical. En nuestro esquema, las medidas que tomamos son representadas por los puntos rojos. Como podemos observar, estas medidas pueden comportarse de modo muy diferente entre sí y con respecto al valor real.

Si nuestro conjunto de medidas está muy disperso entre sí, como es el caso de las figuras A y C de nuestro esquema, se dice que la medida no es precisa. Por el contrario, cuando la dispersión entre nuestro conjunto de medidas es baja (casos B y D) el método de medida es preciso. Para aumentar la precisión de un conjunto de medidas lo ideal es establecer un procedimiento estandarizado para realizar las mediciones. ¿Podrías pensar algún ejemplo en donde el conjunto de medidas tenga una baja precisión?

Por otra parte, el conjunto medido puede tener una gran precisión, pero aún así encontrarse alejado del valor real. Este caso se ejemplifica en la figura B, y podemos pensar, por ejemplo, en una balanza mal equilibrada que nos dará siempre un valor de masa superior al real. Cuando hablamos de cercanía o lejanía de un conjunto de medidas al valor real, hablamos de exactitud. Una medida es exacta cuanto más se acerca al valor real, como muestra la figura 1.

3. Cifras significativas y redondeo de un número.

3.1. Cifras significativas

Supongamos que tenemos un reloj cuya resolución es de décimas de segundo. Una medida del tiempo con este reloj podrá proporcionarnos, por ejemplo, el valor t=2,4 s. Si tuviéramos otro reloj de mayor precisión capaz de apreciar hasta las centésimas de segundo, podrían obtenerse valores como,

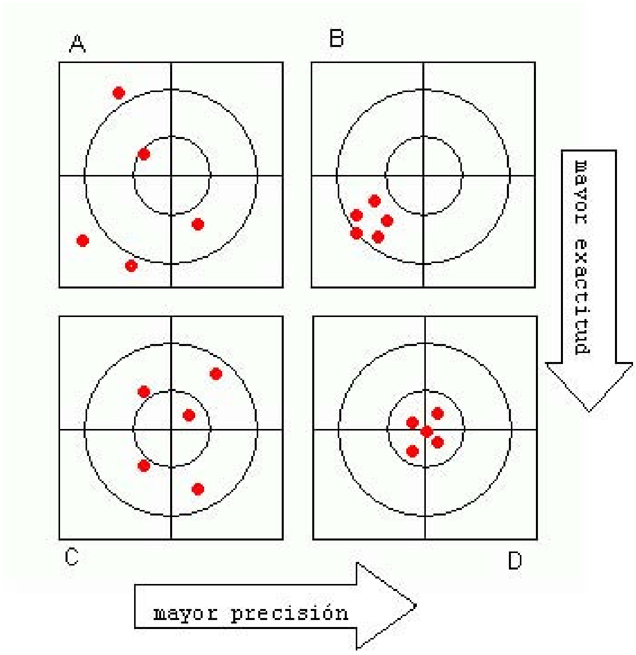

Figura 1: Representación de exactitud y precisión en una medida

por ejemplo, t=2,45 s:
- En el primer caso, decimos que el número tiene dos cifras significativas (el 2 y el 4).
- En el segundo caso, el número tiene tres cifras significativas (el 2, el 4 y el 5).

Debe quedar claro que ambas medidas, aunque aparentemente iguales, son distintas: 2,4 $\neq$ 2,40 ya que el número de cifras significativas es distinto. La medida 2,40 s implica una mayor precisión que una medida de 2,4 s.

Es importante observar que los ceros a la izquierda de un número no son cifras significativas, mientras que los ceros a la derecha sí son cifras significativas.

Ejemplo 1.

0,02 - una cifra significativas (el 2)
0,020 - dos cifras significativas (el 2 y el 0 de la derecha)
2,01 - tres cifras significativas (el 2, el 0 y el 1)
0,20100 - cinco cifras significativas (todas excepto el cero a la izquierda)

Ejemplo 2

Debe tenerse cuidado cuando se exprese una medida en distintas unidades: cuando se proceda a un cambio de unidades la medida debe siempre expresarse con el mismo número de cifras significativas. Por ejemplo, si el resultado de una longitud es 12 mm (dos cifras significativas), podríamos expresar la medida como:

12 mm = 1,2 cm = 0,012 m = 0,000012 km = 1,2x10^{-5} km

En todos los casos, los números están expresados con el mismo número de cifras significativas (dos). Sería incorrecto expresar la medida como 1,20 cm (tres cifras significativas), o como 0,01200 m (cuatro cifras significativas). Es conveniente usar la notación científica cuando el número es muy grande o muy pequeño. Por ejemplo, si el tamaño de una partícula es 2,4 μ m (dos cifras significativas), expresado en m sería 2,4x10^{-6} m. Es más conveniente usar esta notación en lugar de la notación convencional (0,0000024 m).

Ejemplo 3

12,7 mm=1,27 x 10^1 mm
789,4 kg=7,894x10^2 kg
789,400 km=7,89400x10^2 km
0,0000270 s=2,70x10^{-5} s

3.2. Redondeo

Redondear un dato no es más que expresar dicho dato con el número de cifras significativas deseado. Para ello, habrá que eliminar tantas cifras a la derecha del dato como sea preciso según las siguientes reglas:

- Si la cifra omitida es menor que 5, la cifra anterior permanece inalterada.
- Si la cifra omitida es mayor o igual que 5, la cifra anterior se aumenta en una unidad.

Por ejemplo, el valor t=2,538591 s tiene 7 cifras significativas. Si se quiere redondear a 6 cifras significativas, t=2,53859 s; con 5 cifras significativas, t=2,5386 s; con 4 cifras significativas, t=2,539 s; con 3 cifras, t=2,54 s; con 2 cifras, t=2,5 s y con una cifra significativa, t=3 s.

3.3. Criterios importantes

El valor de la medida y su incertidumbre deben expresarse **siempre** con el mismo número de cifras decimales. Como norma general, la incertidumbre debe expresarse siempre con una o con dos cifras significativas.

Por lo tanto, una vez obtenido el resultado de una magnitud y su incertidumbre se deberá:

- Escribir la incertidumbre con una o dos cifras significativas

- Escribir el valor de la magnitud con la misma cantidad de decimales que la incertidumbre.

4. Propagación de incertidumbres.

En muchos casos la magnitud a determinar y no se mide directamente, sino a través de la determinación de otras N magnitudes de entrada $x_1, ..x_N$, que se vinculan a través de la relación funcional:

$$y = f(x_1, ...x_N) \tag{2}$$

Supongamos que el resultado obtenido luego de medir **una** vez estas magnitudes es: $x_1^*, .., x_N^*$

Los valores obtenidos para x_i tienen asociadas incertidubres $u(x_i)$. Por lo tanto el valor de y estará comprendido dentro de cierto intervalo de incertidumbre que habrá que determinar. La incertidumbre estándar combinada del resultado de la medida y, que designaremos $u(y)$ está dada por:

$$u^2(y) = \sum_{j=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_{x_i^*})^2 u^2(x_i^*) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_{x_i^*})(\frac{\partial f}{\partial x_j}\bigg|_{x_j^*}) u^2(x_i^*, x_j^*) \tag{3}$$

Esta ecuación está basada en un desarrollo de Taylor de primer orden de la ecuación 2 y nos referiremos a ella como **ley de propagación de incertidumbres**. Si las variables que se están midiendo son independientes, el segundo término de la ecuación 3 se anula. Esta última hipótesis se cumplirá en la mayoría de las situaciones experimentales con las que trabajemos en este curso. Por lo tanto la ecuación 3 se reduce a:

$$u^2(y) = \sum_{j=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_{x_i^*})^2 u^2(x_i^*) \tag{4}$$

Ejemplo Realicemos un ejemplo sencillo de aplicación de la expresión para propagación de incertidumbre (4).

Mediante la medida del volumen (V) de un líquido, y conociendo su densidad ρ, calculamos la masa (m) del líquido mediante la expresión $m = \rho \times V$

En este caso, la función $y = f(x_1, ...x_N)$ expresada en (1) quedaría de la forma:

$$m = f(\rho, V) \tag{5}$$

Si consideramos que tanto ρ como V poseen incertidumbre ($\delta\rho$ y δV respectivamente), podemos calcular el cuadrado de la incertidumbre de m, δm aplicando (4):

$$(\delta m)^2 = (\frac{\partial m}{\partial \rho}\Big)^2 \delta\rho^2 + (\frac{\partial m}{\partial V}\Big)^2 \delta V^2 \tag{6}$$

Por último, deben calcularse las derivadas resolver el cuadrado en la incertidumbre:

$$\delta m = \sqrt{V^2\delta\rho^2 + \rho^2\delta V^2} \tag{7}$$

En la ecuación 7 encontramos la expresión analítica para la incertidumbre de la masa. Pongámosle valores numéricos para terminar el ejemplo. Supongamos que el líquido medido es aceite,$\rho = (0,92 \pm 0,01)g/mL$, y se mide un volumen de $V = (15,7 \pm 0,2)mL$. Podemos calcular entonces la masa y la incertidumbre de la masa para 15,7mL de aceite:
$m = 0,92g/mL \times 15,7mL$
$m = 14,444g$
$\delta m = \sqrt{(15,7mL)^2 \times 0,01(g/mL)^2 + (0,92g/mL)^2 \times (0,2mL)^2}$
$\delta m = 0,0585g$

Finalmente, expresando correctamente el valor con una incertidumbre de una sola cifra significativa tenemos:

$$m = (14{,}44 \pm 0,06)g \tag{8}$$

El cálculo de propagación de incertidumbres se retomará en la próxima clase para una situación más general, al realizar un análisis estadístico de los resultados.

5. Bibliografía

Evaluation of measurement data - Guide to the expression of uncertainty in measurement. Joint Committee for Guides in Metrology (JCGM). Versión 2010.
https://www.bipm.org/utils/common/documents/jcgm/JCGM_100_2008_E.pdf. Último acceso 21/2/2018.