PRÁCTICA 4

PÉNDULO SIMPLE – Grandes Oscilaciones

1. OBJETIVOS

Los objetivos de esta práctica son los siguientes:

i) Medir la aceleración de la gravedad (***g***) a través de las pequeñas oscilaciones de péndulos de diferentes largos.

ii) Verificar experimentalmente la dependencia del período con la amplitud de grandes oscilaciones en el péndulo.

iii) Comparar diferentes métodos de ajuste para las curvas experimentales

2. FUNDAMENTO TEÓRICO

El péndulo simple es la idealización de un sistema físico real. Dicho sistema real es una masa (***m***) suspendida de un soporte mediante un hilo de masa muy pequeña comparada con ***m***. La idealización es una masa puntual, suspendida de un soporte inmóvil mediante un hilo flexible, inextensible y sin masa, que se mueve confinada a un plano. Se desprecia la fuerza de rozamiento entre el aire y la masa.

La ecuación de movimiento del péndulo simple es:

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin(\theta)=0 \qquad (2.1)$$

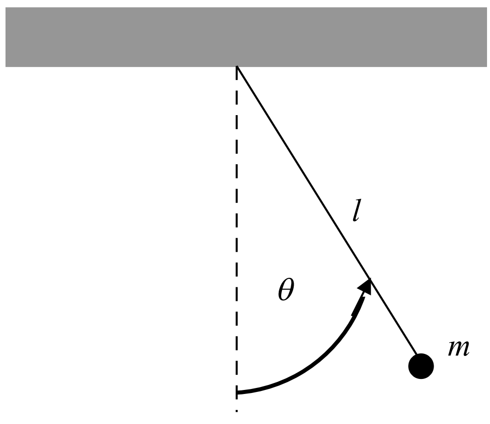

Figura 2.1

donde g es la aceleración gravitatoria, l la longitud del péndulo y θ el ángulo respecto a la vertical.

La ecuación (2.1) es válida para todo_valor de $\theta(t)$, pudiéndose linealizar en torno a la posición de equilibrio estable, si $\theta(t)$ pequeño:

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\theta=0 \qquad (2.2)$$

De aquí en más nos referiremos a ésta como la ecuación de pequeñas oscilaciones. De resolver 2.2 en forma analítica, se puede ver que si el movimiento se restringe al rango en que el ángulo formado por el hilo y la vertical es pequeño, el período se vuelve independiente de la amplitud de la oscilación, esto es, que para cualquier amplitud dentro de ese rango, es aproximadamente constante.

Ejercicio 1

a) Deducir la ecuación (2.1) a partir del modelo físico correspondiente al péndulo simple.

b) Hallar la posición de equilibrio estable y linealizar la ecuación (2.1) para pequeñas oscilaciones en torno a dicha posición.

c) Demostrar que la expresión del período, considerando la ecuación linealizada es :

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{2.3}$$

Nota : La expresión del período puede ser usada para la determinación del valor de ***g***, siempre que midamos ***T*** y ***l*** con suficiente precisión.

3. DESCRIPCION DEL MONTAJE y PROCEDIMIENTO

El montaje experimental es totalmente análogo a lo que ha sido hecho en la práctica 2 (Péndulo simple, pequeñas oscilaciones), tomando el cuidado de utilizar un semi-círculo para medir correctamente el ángulo correspondiente a la amplitud inicial de oscilación. Para empezar:

1. Armar un péndulo simple con un hilo y una masa, atándolo al soporte. Tomar el cuidado necesario para que el *punto fijo* del hilo esté *realmente* fijo.
2. Posicionar la fotopuerta de manera que el centro de la masa concida con la posición del sensor.
3. Se debe fijar el semi-círculo en una posición adecuada (el centro del semi-círculo debe coincidir con el punto fijo del péndulo), de manera a poder medir con precisión la amplitud inicial de la oscilación.
4. Como el ángulo inicial puede ser grande, se debe tomar especial cuidado con la posición de la fotopuerta, para evitar posibles golpes de la masa.

En la práctica se *medirá el periodo* de las oscilaciones del péndulo para dos situaciones: A) en función de *la longitud del hilo* y B) del *angulo inicial* de la oscilación.

A) Modificar el largo del hilo con pequeñas oscilaciones

1. *Medir la longitud l*, recordando que es la distancia del punto fijo al baricentro de la masa.
2. Poner la masa en movimiento con un *ángulo pequeño (menor que 10 grados)* procurando que el movimiento esté restringido a un plano.
3. *Medir el tiempo* para un número grande de oscilaciones (entre 10 y 20) y anotar el número de periodos utilizados. Dividiendo este tiempo total por el número de oscilaciones te dá la medida del período.
4. *Modificar el largo del hilo y repetir los pasos anteriores para al menos 5 valores de l.*
5. Construir una *tabla* de valores de *largo y periodo* medidos y sus *incertidumbres* correspondientes.

B) Modificar el ángulo inicial a grandes oscilaciones

Para un determinado largo elejido se debe medir el periodo de oscilación del péndulo en función del angulo inicial. Para ello,

1. Tomar *medidas del periodo* usando el mismo método anterior para *diferentes ángulos iniciales* θ_0 , mateniendo el largo fijo.
2. Construir una tabla con dichos valores e incertidumbres.

Ejercicio 2

A partir de la ecuación (2.3), obtener una expresión para la incertidumbre en *g* a partir de las incertidumbres en el largo y en el periodo.

4. TRATAMIENTO DE DATOS

A) Pequeñas oscilaciones

Vamos a determinar el valor de la aceleración de la gravedad usando método gráfico e invertindo la ecuación (2.3) para obtener

$$l = T^2 \frac{g}{4\pi^2} \qquad (2.4)$$

1. A partir de las tablas anteriores, contruya un gráfico del periodo (eje x) como función del largo (eje y). El comportamiento es linear? Utilizando la herramienta de ajuste polinomial (prog SciDavis o similar), sobreponga en la misma gráfica un ajuste por una recta y un ajuste por un polinomio de segundo orden.
2. A partir de los coeficientes del ajuste encontrados, determine el valor de *g*. Usando la fórmula de propagación de incertidumbres, determine la incertidumbre y exprésela correctamente.
3. Procedimiento de linealización. Construya una gráfica de $T^2 x\, l$ (equivalente a definir el cambio de variable $y = T^2$ y contruir el gráfico $T\, x\, y$). Que comportamiento se observa? De forma similar al item 1. arriba, sobreponga a este gráfico un ajuste lineal de los datos y calcule un nuevo valor y una nueva incertidumbre de *g* para este método.
4. Compare ambos resultados. Cuál es el valor más exacto y cuál método es el más preciso? Justifique su razonamiento.
5. A partir de la tabla de datos (L,T), calcule los valores de g junto con sus respectivas incertidumbres, calculada usando la expresión encontrada en el ejecicio 2. Construya un gráfico del periodo (eje x) como función de la inceretidumbre en *g*. Analise dicho gráfico y compare con la incertidumbre en *g* encontrada por el ajuste de la recta.

B) Grandes Oscilaciones

Recordemos que en la sección 2 se había obtenido la ecuación de movimiento de un péndulo simple ubicado en un campo gravitatorio uniforme, y que no soporta otras fuerzas (despreciando cualquier fuerza resistiva), obedece a la siguiente ecuación no lineal:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0 \qquad (2.1)$$

Esta ecuación no es resoluble analíticamente, pero de su forma se pueden obtener algunas conclusiones. En particular se puede encontrar una expresión integral para el período en función de las condiciones iniciales (ver ejercicio 3).

Para efecto de tratamiento de datos, exponemos la solución analítica

$$T = T_0 \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\Theta}{2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \sin^4\frac{\Theta}{2} + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \sin^6\frac{\Theta}{2} + \ldots \right], \qquad (2.5)$$

donde Θ es la amplitude inicial (*θ_0* en la notación del experimento) y $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ es el período de las pequeñas oscilaciones. Se observa que la ecuación consiste en una serie de potencias sobre la variable β, definida como

$$\beta = \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \qquad (2.6)$$

1. A partir de la tabla de datos, construya una gráfica de T x θ_0. El comprtamiento es linear?
2. Efectúe el cambio de variable (2.6) y escriba la ecuación *T(β).* Construya un gráfico de T x β. Sobre este, efectúe ajustes polinomiales utilizando órdenes 1, 2 y 3. Analise la calidad del ajuste en cada caso observando el gráfico. Cuál polinomio se ajusta mejor a los datos experimentales? Las diferencias ocurren para todos los valores de periodo?
3. A partir del mejor ajuste obtenido vuelva a calular el valor de *g* y su incertidumbre.
4. Compare la exactitud y la precisión de este método con los otros dos anteriores