Señales y Sistemas

Práctico **007**

Muestreo de señales de tiempo continuo

2019

Cada ejercicio comienza con un símbolo indicando su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ✦ básico, ★ medio, ✷ avanzado, y ✹ desafiante. Además puede tener un número, como (1.21) que indica el número de ejercicio del libro del curso, *Señales y Sistemas*, Oppenheim/Willsky, 2nd.edition.

✦ Ejercicio 1

En este ejercicio se explora qué sucede si no se cumple la hipótesis del Teorema de Muestreo. Sea $x_c(t) = \cos(40000\pi t)$ una sinusoidal en tiempo continuo. $x[n]$ son muestras de $x_c(t)$ tomadas a frecuencia $f_s = 16000\,\mathrm{Hz}$.

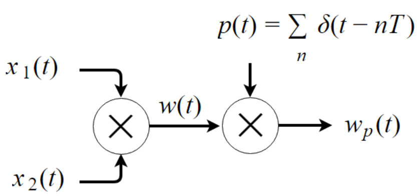
(a) Dar una expresión para $x[n]$.

(b) Hallar $y_c(t)$, la reconstrucción ideal de $x[n]$ para la frecuencia de muestreo f_s.

(c) Sea $x[n]$ la señal de tiempo discreto obtenida en la parte a). Si se sabe que $x[n]$ fue obtenida de una señal analógica $x(t) = \cos(\omega_c t)$ a una tasa de muestreo de 16kHz, hallar todos los posibles valores de ω_c que podrían resultar en la secuencia $x[n]$.

✦ Ejercicio 2 (7.6)

En el sistema de la figura, dos funciones del tiempo $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son multiplicadas entre sí, y su producto $w(t)$ es muestreado por un tren de deltas.



Las funciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$ tienen anchos de banda ω_1 y ω_2 en radianes por segundo, esto es

$$X_1(j\omega) = 0, \quad |\omega| > \omega_1$$

$$X_2(j\omega) = 0, \quad |\omega| > \omega_2$$

(a) Determinar el período de muestreo T máximo para garantizar que $w(t)$ pueda recuperarse a partir de $w_p(t)$ usando un filtro pasabajos ideal.

✦ Ejercicio 3

Sea $h_c(t)$ la respuesta al impulso de un SLIT, de tiempo continuo, y $h_d[n]$ la respuesta al impulso de un SLIT, de tiempo discreto.

(a) Determinar la respuesta en frecuencia $H_c(j\omega)$ del sistema en tiempo continuo y bosquejar su módulo si

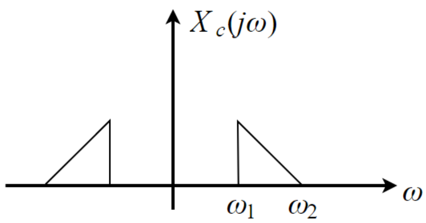
$$h_c(t) = \begin{cases} e^{-at} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

(b) Si $h_d[n] = T\,h_c(nT)$, donde T es el período de muestreo y $h_c(t)$ es la definida en (a), determinar la respuesta en frecuencia $H_d\left(e^{j\theta}\right)$ del sistema en tiempo discreto y bosquejar su módulo.

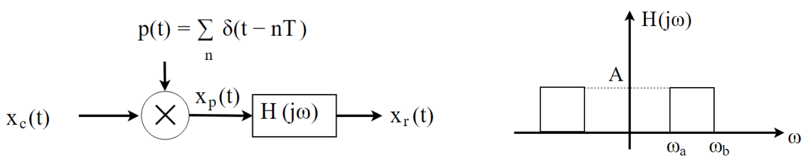
(c) Para un valor dado de a, determinar el mínimo de $|H_d(\, e^{j\theta}\,)|$ en función de T, y comparar con $|H_c(j\omega_s/2)|$ donde $\omega_s = 2\pi/T$.

★ Ejercicio 4 (7.26)

Sea la señal pasabanda $x_c(t)$ cuyo espectro se muestra en la siguiente figura.



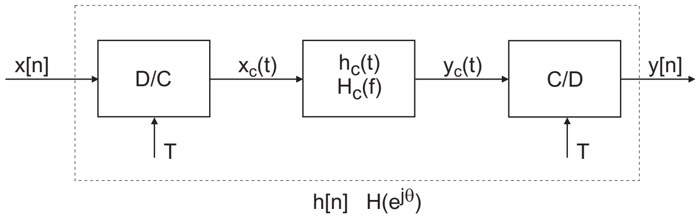
El teorema de muestreo, como lo hemos deducido, establece que la señal $x_c(t)$ debe ser muestreada a una velocidad mayor que su ancho de banda, o de manera equivalente, a una velocidad mayor que el doble de su frecuencia más alta. Esto implica que $x_c(t)$ deba ser muestreada a una velocidad mayor que $2\omega_2$. Sin embargo, ya que la señal tiene la mayor parte de su energía concentrada en una banda angosta, parecería razonable esperar que se pudiera usar una velocidad de muestreo más baja. Para examinar la posibilidad de muestrear una señal pasabanda a una velocidad menor que el ancho de banda total, considere el sistema de la siguiente figura.



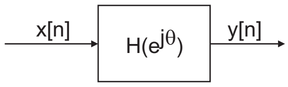
(a) Suponiendo que $\omega_1 > \omega_2 - \omega_2$, encuentre el máximo T y las constantes A, ω_a y ω_b tales que $x_r(t) = x_c(t)$

⋆ Ejercicio 5

En este problema se desea introducir un retardo en la señal luego de que ésta fuera muestreada. Sea una señal de tiempo discreto $x[n]$ obtenida al muestrear una señal de tiempo continuo $x_c(t)$ de ancho de banda ω_m con período de muestreo $T < \pi/\omega_m$. A partir de $x[n]$ se quiere obtener $y[n] = y_c(nT)$ donde $y_c(t) = x_c(t - \tau_d)$.



Si bien esto puede lograrse como se muestra en la figura anterior, es decir, reconstruyendo $x_c(t)$ para aplicar el retardo en tiempo continuo y luego volver a muestrear, nos interesa explorar cómo obtener $y[n]$ directamente a partir de $x[n]$ sin pasar pot $x_c(t)$, tal como se representa en la siguiente figura.



(a) Mostrar que en el caso particular $\tau_d = mT$, $m \in \mathbb{N}$, se tiene $y[n] = x[n - m]$.

(b) Hallar la transferencia $H_c(j\omega)$ del sistema con entrada $x_c(t)$ y salida $y_c(t)$.

(c) A partir de la parte anterior, hallar la respuesta en frecuencia $H\left(e^{j\theta}\right)$ del sistema en tiempo dicreto con entrada $x[n]$ y salida $y[n]$.

(d) Deducir la correspondiente respuesta al impulso $h[n]$.

(e) Bosquejar $h[n]$ para el caso $\tau_d = T/2$ y $\tau_d = T$, mostrando que en el segundo caso $h[n]$ coincide con una delta discreta.

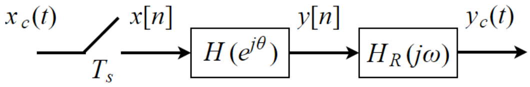
⋆ Ejercicio 6

La secuencia en tiempo discreto $x[n]$ fue obtenida filtrando una señal de voz $x_c(t)$ con un filtro pasabajos ideal de frecuencia de corte de 5 kHz, y muestreando la salida a 10 kHz.
La señal $x_c(t)$ estaba en una cinta magnética que fue destruida accidentalmente luego de obtener y almacenar la secuencia $x[n]$.
Luego se descubre que hubiese sido posible filtrar la señal original $x_c(t)$ con un pasabajos ideal de frecuencia de corte de 3 kHz y posteriormente muestrearla a 6 kHz para obtener una señal $r[n]$ más reducida.

(a) Encontrar un método para obtener $r[n]$ a partir de $x[n]$ directamente, sin utilizar conversores C/D o D/C. Si su método hace uso de un filtro digital especificar la respuesta frecuencial del mismo.

⋆ Ejercicio 7

La figura muestra un diagrama de bloques de un sistema que sirve para hacer filtrado de una señal de tiempo continuo $x_c(t)$ utilizando un filtro de tiempo discreto.



La respuesta en frecuencia del filtro de reconstrucción es $H_r(j\omega) = T_s \Pi\left(\frac{\omega T_s}{2\pi}\right)$ y la del filtro de tiempo discreto es $H(e^{j\theta}) = \Pi\left(\frac{2\theta}{\pi}\right)$.

(a) Para $X_c(f) = \Lambda\left(\frac{f}{10.000}\right)$ y $\frac{1}{T_s} = 20$kHz, graficar $X_s(f)$ y $X(e^{j\theta})$, donde $x_s(t) = x(t)\sum_n \delta(t - nT_s)$.

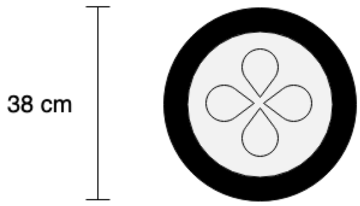
(b) Para un determinado rango de valores de T_s y una entrada con el mismo ancho de banda que $x_c(t)$ en la parte anterior, el sistema es equivalente a un filtro pasabajos continuo ideal $H_{\text{eff}}(f)$. Determinar ese rango de valores de T_s.

(c) Para el rango de valores determinado en la parte anterior, graficar la frecuencia (angular) de corte de H_{eff} como función de $\frac{1}{T_s}$.

Observación: Esta es una forma de implementar filtros pasabajos continuos de corte variable utilizando un filtro pasabajos discreto fijo y frecuencias de muestreo variables.

✷ Ejercicio 8

Se observa frecuentemente en las señales de video que las ruedas de los autos parecen girar hacia atrás, aunque el auto esté avanzando [1].



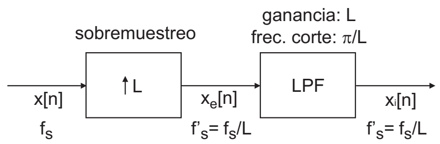
(a) En una película de 24 cuadros por segundo se ve una rueda como la de la figura, de 38cm de diámetro, girando hacia atrás. Cada 2.5 segundos se observa la rueda volver a la misma posición. En base a estos datos, y considerando las simetrías del dibujo, obtenga las posibles velocidades de avance del automóvil.

[1] https://www.youtube.com/playlist?list=PL217FA8C506B5AEB9

✶ Ejercicio 9 (4.50)

La figura siguiente representa un sistema para interpolar una señal en un factor L, donde

$$x_e[n] = \begin{cases} x[\frac{n}{L}] & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



El filtro pasabajos interpola entre las muestras no nulas de $x_e[n]$, generando la señal sobremuestreada $x_i[n]$. Cuando el pasabajos es ideal, la interpolación lleva el nombre de interpolación de banda limitada. Dos interpoladores comúnmente utilizados (por su simplicidad) son el interpolador lineal y el bloqueador de orden cero. En la interpolación del bloqueador de orden cero, cada valor de $x[n]$ se repite L veces, i.e.,

$$x_i[n] = \begin{cases} x_e[0] & n = 0, 1, \dots, L-1 \\ x_e[L] & n = L, L+1, \dots, 2L-1 \\ x_e[2L] & n = 2L, 2L+1, \dots, 3L-1 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

(a) Determinar la respuesta al impulso del filtro pasabajos para que el sistema sea un bloqueador de orden cero. Determinar su respuesta en frecuencia.

La repuesta al impulso del interpolador lineal es

$$h_{lin}[n] = \begin{cases} 1 - \frac{|n|}{L} & |n| \leq L \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(b) Determinar su respuesta en frecuencia.

Sugerencia: puede resultar útil el hecho de que $h_{lin}[n]$ es triangular y por ende es la convolución de dos secuencias rectangulares.

(c) Bosquejar el módulo de la respuesta en frecuencia del filtro para las interpolaciones lineal y por bloqueo de orden cero. ¿Cuál de las dos interpolaciones se aproxima más a la interpolación ideal de banda limitada?

Soluciones

Las soluciones que se muestran deben ser consideradas como los resultados o respuestas de los ejercicios, no son ni deben considerarse como el desarrollo o procedimiento para llegar a estos.

Ejercicio 1

(a) El período de muestreo es $T = 2\pi/\omega_s = 1/16000s$, por lo tanto $x[n] = \cos\left(2\pi\frac{20000}{16000}n\right) = \cos\left(\frac{5}{2}\pi n\right)$

(b) A partir de los resultados intermedios del teorema del muestreo, se ve claramente que entre $\pm f_s/2$ sólo quedarán componentes en $\pm(20000 - 16000) = \pm 4000\,\mathrm{Hz}$. Por lo tanto la salida será $y_c(t) = \cos(4000 \cdot 2\pi t)$.

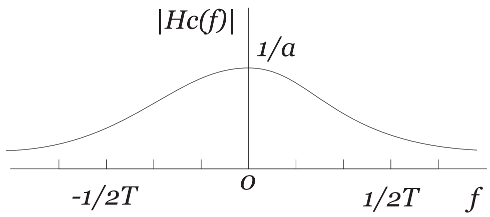
Ejercicio 2

(a) El ancho de banda del producto de las señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$ es $\omega_1 + \omega_2$, por lo tanto el tiempo de muestreo debe cumplir $2\pi f_s = 2\pi/T > 2(\omega_1 + \omega_2)$, por lo tanto $T < \pi/(\omega_1 + \omega_2)$

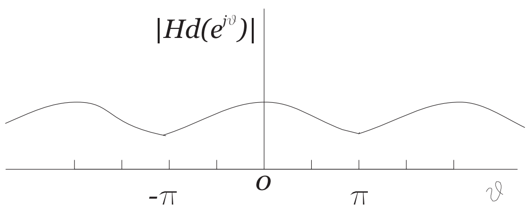
Ejercicio 3

(a) Considerando que a es mayor que 0 la transformada de Fourier queda:

$$H_c(f) = \frac{1}{a + j2\pi f} \Rightarrow |H_c(f)|^2 = \frac{1}{a^2 + (j2\pi f)^2}$$



(b) $h_d[n] = T\,h_c(nT) \Rightarrow H_d(e^{j\theta}) = \frac{T}{1-e^{-aT}e^{-j\theta}} \Rightarrow |H_d(e^{j\theta})|^2 = \frac{T^2}{1+(e^{-aT}e^{-j\theta})^2}$



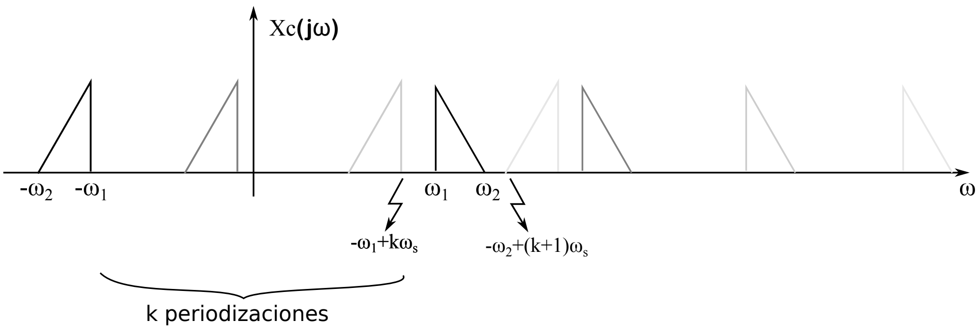
(c) Observando la gráfica del módulo para la respuesta en tiempo continuo, podemos ver que es una función monótona decreciente y simétrica respecto a 0, por lo que el mínimo módulo de la respuesta en tiempo discreto debe darse en el punto donde se solapan las respuestas que se repiten, siendo este el que corresponde a

$\theta = \pi \Rightarrow min\,|H_d(e^{j\theta})|^2 = |H_d(e^{j\pi})|^2 = \frac{T^2}{1+(e^{-aT}e^{-j\pi})^2} = \frac{T^2}{1+e^{-2aT}}$
Se puede verificar que este valor es mayor al que tiene la respuesta en tiempo continuo a esta frecuencia debido al efecto del solapamiento.

$$|H_d(e^{j\pi})|^2 = \frac{T^2}{1+e^{-2aT}} > |H_c(\frac{1}{2T})|^2 = \frac{1}{a^2+(j\frac{\pi}{T})^2}$$

Ejercicio 4

(a)



Las condiciones de no solapamiento que se deben cumplir son:

$$-\omega_1 + k\omega_s < \omega_1$$

$$-\omega_2 + (k+1)\omega_s > \omega_2$$

Despejando ω_s de ambas ecuaciones se tiene:

$$\frac{2\omega_2}{k+1} < \omega_s < \frac{2\omega_1}{k}$$

Por lo tanto

$$k < \frac{\omega_1/\omega_2}{1-\omega_1/\omega_2}$$

Entonces el valor de k es:

$$k = \left\lfloor \frac{\omega_1}{\omega_2-\omega_1} \right\rfloor$$

Finalmente:

$$T = \frac{k+1}{2\omega_2}$$

Ejercicio 5

(a) En el caso particular en que $\tau_d = mT$, tenemos que $y_c(t) = x_c(t-\tau_d) = x_c(t-mT)$. Al muestreasr $y[n] = y_c(nT) = x_c(nT-mT) = x_c((n-m)T) = x[n-m]$

(b) La transferencia para un retardo arbitrario τ_d es $H_c(j\omega) = e^{-j\omega\tau_d}$

(c) El efecto del retardo en tiempo discreto resulta en $H(e^{j\theta}) = e^{-j\frac{\theta}{T}\tau_d}$ con $-\pi < \theta \leq \pi$

(d) Antitransformado la transferencia se tiene $h[n] = sinc\left(n - \frac{\tau_d}{T}\right)$

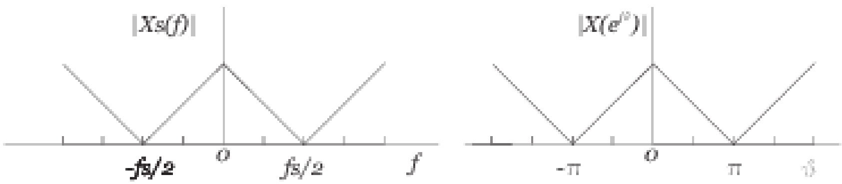
(e) El resultado es el muestreo de un seno cardinal que tiene todos sus ceros en los enteros (salvo en 0), atrasado media muestra.

Ejercicio 6

(a)

Ejercicio 7

(a)



(b) $\frac{7}{8}f_s \geq 10\,kHz \Rightarrow f_s = \frac{1}{T_s} \geq \frac{80}{7}\,kHz$

(c) $f_c = \frac{1}{8}f_s$ para el rango de f_s de la parte b.

Ejercicio 8

(a) Definamos una función $a(t)$, cuyo valor es el ángulo de la rueda en el instante t. El cine toma 24 cuadros por segundo, y las medidas del ángulo de la rueda que podamos obtener de la película serán muestras de $a(t)$ con frecuencia 24 Hz.
Una delta en el espectro de $a[n]$ en la frecuencia $\theta = 2\pi$ correspondería a una rueda que da una vuelta completa en el período de muestreo, es decir 24 vueltas por segundo.
Asumiendo que las ruedas tienen un diámetro de 0.38 metros, esto corresponde a una velocidad del auto de $\pi \times 0.38\ m \times 24\ rps = 28.65\ m/s$. Multiplicando por 3.6 obtenemos el valor en km/h, 103.14 km/h.
Esto nos permite determinar la velocidad en función de θ

$$v(\theta) = 3.6 \cdot \pi \cdot \text{DIA} \cdot \frac{24}{2\pi} \cdot \theta$$

donde DIA es el diámetro de la rueda y el resultado queda expresado en km/h.

Girar hacia atrás con período de 2.5 segundos implica

$$\theta_o = \frac{2\pi f_o}{f_s} = \frac{2\pi \frac{-1}{2.5}}{24} = -\frac{2\pi}{24 \cdot 2.5}.$$

Pero como puede haber solapamiento, la velocidad real corresponde a

$$\theta = \theta_o + k \cdot 2\pi \qquad \text{para algún } k \text{ entero.}$$

Como sabemos que el auto avanza, k debe ser mayor o igual a 1 y la velocidad es

$$v(k) = 3.6 \cdot \pi \cdot \text{DIA} \cdot \frac{24}{2\pi} \cdot \left(-\frac{2\pi}{24 \cdot 2.5} + k \cdot 2\pi\right) \approx -1,72 + 103,14(k).$$

Sin considerar los ejes de simetría, las velocidades razonables a las que podría girar son: 101.42 km/h o 204.56 km/h
Considerando el eje de simetría, las ruedas pueden verse igual si giran un múltiplo de un cuarto de vuelta, por lo que la solución completa sería:

$$v(k) =\approx -1,72 + 103,14(k/4).$$

Por lo tanto las posibles velocidades a las que se mueve el auto son: 24,1 km/h 49.9 km/h 75,7 km/h 101,4 km/h 127,2 km/h 153.0 km/h 178.78 km/h 204.6 km/h 230.3 km/h.

Ejercicio 9

(a) La respuesta al impulso debe ser un pulso rectangular de altura 1, y largo L.

$$h[n] = u[n] - u[n-L]$$

$$H(e^{j\theta}) = \sum_{k=0}^{L-1} e^{-j\theta k}$$

Operando obtenemos:

$$H(e^{j\theta}) = e^{j\theta\frac{L-1}{2}} \frac{sin(\theta L/2)}{sin(\theta/2)}$$

(b) Asumiendo L impar, es posible escribir el interpolador lineal como la convolución de dos bloquadores de orden cero:

$$h_{lin}[n] = \frac{1}{L} h[n + (L-1)/2] * h[n + (L-1)/2]$$

Por lo tanto:

$$H_{lin}(e^{j\theta}) = \frac{sin^2(\theta L/2)}{sin^2(\theta/2)}$$

(c) El interpolador lineal tiene atenuados los lóbulos secundarios con una función cuadrática en $sin(\theta/2)$ mientras que el interpolador de orden cero es en atenuado en forma lineal con dicha expresión.
Por lo tanto, el interpolador lineal aproxima mejor la interpolación de banda limitada en la cual los esos lóbulos secundarios deberían ser nulos.