Señales y Sistemas

Práctico 9
Transformada Z

2019

Cada ejercicio comienza con un símbolo indicando su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ✦ básico, ★ medio, ✷ avanzado, y ✹ desafiante. Además puede tener un número, como (1.21) que indica el número de ejercicio del libro del curso, *Señales y Sistemas*, Oppenheim/Willsky, 2nd.edition.

✦ Ejercicio 1 (3.1)

Determinar la Transformada Z de cada una de las siguientes secuencias, especificando su región de convergencia:

(a) $(1/2)^n u[n]$.

(b) $-(1/2)^n u[-n-1]$.

(c) $(1/2)^n u[-n]$.

(d) $\delta[n]$.

(e) $\delta[n-1]$.

(f) $\delta[n+1]$.

(g) $(1/2)^n \big(u[n] - u[n-10]\big)$.

✦ Ejercicio 2

Hallar las Transformadas Z inversas de las siguientes transferencias:

$$H_1(z) = \frac{z^3}{z-1} \quad H_2(z) = \frac{4z^2+8z}{z^2-5z+4} \quad H_3(z) = \frac{4}{z^3(2z-1)} \quad H_4(z) = \frac{z}{(z-1)^2(z-2)}$$

Discutir cuáles corresponden a sistemas estables y cuáles a sistemas causales.

✦ Ejercicio 3

Hallar las Transformadas Z de las secuencias:

$$f_1[n] = \begin{cases} a^n & \text{para } 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$f_2[n] = a^{|n|} \ \text{ con } |a| < 1$$

⋆ Ejercicio 4

Dado el sistema causal de la figura:

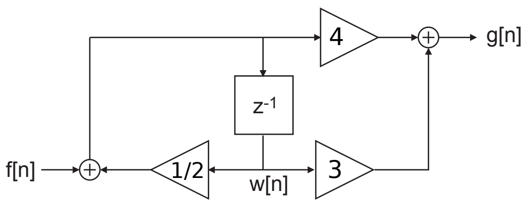
(a) Hallar la transferencia del sistema.

(b) Bosquejar el módulo de la respuesta en frecuencia $|H(e^{j\theta})|$.

(c) Hallar la respuesta al impulso.

(d) Dar el diagrama de polos y ceros. Indicar la región de convergencia.

(e) Estudiar la estabilidad del sistema.



⋆ Ejercicio 5

Si $g[n] = 0$ para $n < 0$ y $g[n+N] = g[n]$ para $n \geq 0$, demostrar que:

$$G(z) = \mathbf{Z}\big(\{g[n]\}_{n\in Z}\big)(z) = \frac{z^N}{z^N - 1}\sum_{n=0}^{N-1} g[n]z^{-n} \quad |z| > 1.$$

⋆ Ejercicio 6

Dado el sistema causal de la figura:

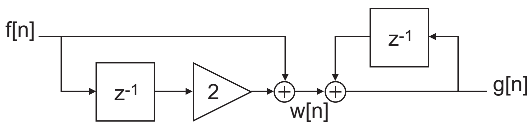
(a) Hallar la transferencia $H(z)$.

(b) Hallar la salida $g[n]$ cuando la entrada es $f[n] = u[n+2]$.

(c) Realizar el sistema empleando solamente un elemento de retardo.

(d) Dar el diagrama de polos y ceros. Indicar la región de convergencia.

(e) Analizar la estabilidad del sistema.



⋆ Ejercicio 7 (3.9)

Un SLIT causal tiene respuesta al impulso $h[n]$, cuya Transformada Z es:

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + \frac{1}{4}z^{-1})}$$

(a) ¿Cuál es la región de convergencia de $H(z)$?

(b) ¿Es el sistema estable? Justificar.

(c) Hallar la Transformada Z de una entrada $X(z)$ que genere la salida:

$$y[n] = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \frac{4}{3}\,2^n u[-n-1]$$

(d) Hallar la respuesta al impulso del sistema.

✶ Ejercicio 8

Si $f(t) = 0\ \forall t < 0$ y $F(j\omega)$ es su Transformada de Fourier, hallar la transformada Z de la secuencia $f[n] = f(nT)$ para cualquier T en función de $F(j\omega)$.

✦ Ejercicio 9

Demostrar que:

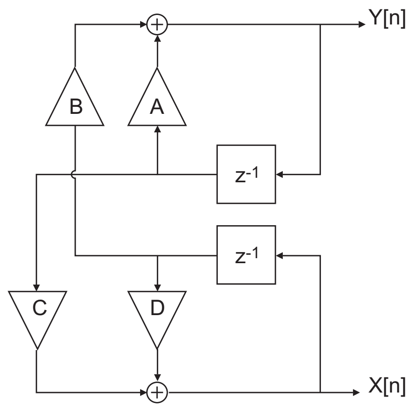
(a) Si $x[n] = 0$ para $n < 0$ entonces la Transformada Z unilateral de $x[n]$ cumple que $X_u(z) = X(z)$.

(b) $Z_u\{x[n-n_o]\} = z^{-n_o} Z_u\{x[n]\} + x[-n_o] + x[-n_o+1]z^{-1} + \cdots + x[-1]z^{-(n_o-1)}$

(c) $Z_u\{x[n+n_o]\} = z^{n_o} Z_u\{x[n]\} - x[0]z^{n_o} - x[1]z^{n_o-1} - \cdots - x[n_o-1]z$

⋆ Ejercicio 10

Un bloque muy importante en la simulación *software* de sistemas es un generador de seno-coseno cuya salida se puede usar como una señal de test para cualquier sistema simulado.



Dado el sistema de la figura con condiciones iniciales $x[0]$ e $y[0]$:

(a) Hallar las ecuaciones de recurrencia que lo definen.

(b) Hallar $X_u(z)$ e $Y_u(z)$ en función de los parámetros A, B, C, D, $x[0]$ e $y[0]$.

(c) Determinar los parámetros para que el sistema se comporte como un generador de seno y coseno.

Soluciones

Las soluciones que se muestran deben ser consideradas como los resultados o respuestas de los ejercicios, no son ni deben considerarse como el desarrollo o procedimiento para llegar a estos.

Ejercicio 1

(a)

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1/2)^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (1/2z)^n$$

Si $|\frac{1}{2z}| < 1$ entonces la suma converge:

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2z}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

La región de convergencia es entonces $|z| > \frac{1}{2}$.

(b)

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -(1/2)^n u[-n-1] z^{-n} = -\sum_{n=\infty}^{-1} (1/2z)^n = -\sum_{n=1}^{\infty} (2z)^n$$

Si $|2z| < 1$ entonces la suma converge:

$$X(z) = -\frac{2z}{1 - 2z} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

La región de convergencia es $|z| < \frac{1}{2}$.

(c)

$$x(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1/2)^n u[-n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{0} (1/2)^n z^{-n}$$

$$x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (2)^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2z^n$$

Si $|2z| < 1$ entonces la suma converge:

$$x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 2z^n = \frac{1}{1 - 2z} = -\frac{2z}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

La región de convergencia es $|z| < \frac{1}{2}$.

(d)

$$x(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] z^{-n} = 1$$

La región de convergencia es todo el plano complejo.

(e)

$$x(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n-1]z^{-n} = z^{-1}$$

La región de convergencia es todo el plano complejo menos el origen.

(f)

$$x(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n+1]z^{-n} = z$$

La región de convergencia es todo el plano complejo.

(g)

$$x(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1/2)^n \big(u[n] - u[n-10]\big) z^{-n} = \sum_{n=0}^{9} \left(\frac{1}{2z}\right)^n$$

$$x(z) = \frac{1 - \left(\frac{1}{2z}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2z}}$$

La región de convergencia es todo el plano complejo.

Ejercicio 2

Bajo hipótesis de sistema causal la región de convergencia que debe considerarse es aquella que no sea limitada por derecha.
El sistema H_1 puede escribirse de la forma,

$$H_1(z) = \frac{z^2}{1 - z^{-1}}$$

siendo su antitransformada bajo hipótesis de causalidad,

$$h_1[n] = u[n+2]$$

con región de convergencia $|z| > 1$. Esto implica que el sistema es inestable.
Descomponiéndolo en fracciones simples, el sistema H_2 puede escribirse de la forma

$$H_2(z) = \frac{4(1 + 2z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - 4z^{-1})} = \frac{-4}{3(1 - z^{-1})} + \frac{8}{3(1 - 4z^{-1})}$$

La transformada inversa resulta de la forma

$$h_2[n] = -4\, u[n] + 8 \cdot 4^n u[n]$$

con región de convergencia $|z| > 4$. El sistema es inestable.

$$H_2[n] = \frac{4}{z^3(2z - 1)} = \frac{2z^{-4}}{1 - 1/2z^{-1}}$$

de donde tenemos que la transformada inversa resulta,

$$h_2[n] = 2\left(\frac{2}{2}\right)^{n-4} u[n-4]$$

con región de convergencia $|z| > 1/2$, por lo que el sistema es estable.
Escribiendo $H_4(z)$ en fraciones simples tenemos:

$$H_4(z) = \frac{z}{(z-1)^2(z-2)} = \frac{-1-2(z-1)}{(z-1)^2} + \frac{2}{(z-2)} = \frac{-1}{(z-1)^2} + \frac{-2}{(z-1)} + \frac{2}{(z-2)}$$

Hay 3 posibles secuencias con dicha transformada, que tienen una región de convergencia no vacía.

$$h_4^1[n] = -(n-1)u[n-2] + (-2+2^n)u[n-1]$$
$$h_4^2[n] = -(n-1)u[n-2] - 2u[n-1] - 2^n u[-(n-1)-1]$$
$$h_4^3[n] = -(n-1)u[-n+1] - (2+2^n)u[-(n-1)-1]$$

Ninguna de las combinaciones es estable, ya que al tener un polo (doble) en la circunferencia unidad, ninguna de las ROC la contiene. La versión causal correspondería a la primera opción de cada término.

Ejercicio 3

$$F_1(z) = \sum_{n=0}^{n=N-1} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{n=N-1} \left(\frac{a}{z}\right)^n = \frac{1-\left(\frac{a}{z}\right)^N}{1-\frac{a}{z}}$$

$$F_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{|n|} z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} (az)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (az)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{a}{z}} + \frac{az}{1-az}$$

Ejercicio 4

(a)

$$g[n] = 4(f[n] + 1/2w[n]) + 3w[n]$$
$$w[n] = f[n-1] + 1/2w[n-1]$$

Transformando:

$$G(z) = 4F(z) + 5W(z)$$
$$W(z) = F(z)z^{-1} + 1/2W(z)z^{-1}$$

Despejando W y sustituyendo:

$$W(z) = F(z)\frac{z^{-1}}{1-1/2z^{-1}}$$

$$G(z) = 4F(z) + 5F(z)\frac{z^{-1}}{1-1/2z^{-1}}$$

Finalmente, la transferencia del sistema es:

$$H(z) = \frac{4+3z^{-1}}{1-1/2z^{-1}}$$

(b) La respuesta en módulo tiene un máximo en $\theta = 0$ que es el punto más cercano al polo y a su vez el más lejano al cero. Por otro lado tiene un mínimo en $\theta = \pi$, ya que es el punto más cercano al cero y a su vez más lejano al polo.

(c) La respuesta al impulso es:

$$h[n] = 4u[n](1/2)^n + 3u[n-1](1/2)^{n-1}$$

(d) El sistema tiene un polo en $1/2$ y un cero en $-3/4$. La región de convergencia corresponde a $|z| > 1/2$.

(e) El sistema es causal y tiene un polo en $1/2$, por lo que la circunferencia unidad está incluída en la región de convergencia y por lo tanto es estable.

Ejercicio 5

$$G(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n]z^{-n}$$

Como $g[n] = 0$ para $n < 0$, tenemos que

$$G(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n]z^{-n} = \sum_{0}^{\infty} g[n]z^{-n}$$

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{N-1} g[Nk + j]z^{-(Nk+j)}$$

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-Nk} \sum_{j=0}^{N-1} g[Nk + j]z^{-j}$$

Como $g[n + N] = g[n]$ para $n \geq 0$:

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-Nk} \sum_{j=0}^{N-1} g[j]z^{-j}$$

Entonces:

$$G(z) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(z^{-N}\right)^k \right) \left(\sum_{j=0}^{N-1} g[j]z^{-j} \right)$$

Si $|z| > 1$ tenemos el resultado deseado:

$$G(z) = \frac{z^N}{z^N - 1} \sum_{n=0}^{N-1} g[n]z^{-n}$$

Ejercicio 6

(a) La transferencia del sistema es:

$$W(z) = F(z) + 2F(z)z^{-1}$$

$$G(z) = W(z) + G(z)z^{-1}$$

Entonces:

$$G(z)(1 - z^{-1}) = F(z)(1 + 2z^{-1})$$

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

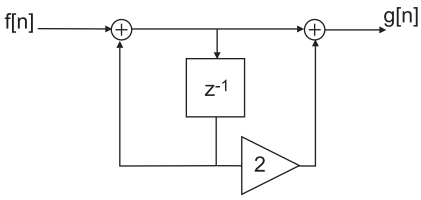
(b)

$$g[n] = u[n+2] * (u[n] + 2u[n-1])$$

Por lo tanto:

$$g[n] = \begin{cases} 0 & \text{si } n < -2 \\ 3(n+2) + 1 & \text{si } n \geq -2 \end{cases}$$

(c) Para plantearlo como un sistema de un retardo podemos escribirlo de la Forma Directa II.



(d) El sistema tiene un polo en $z = 1$ y un cero en $z = -2$. Como es un sistema causal, la región de convergencia corresponde a $|z| > 1$.

(e) La región de convergencia no contiene a la circunferencia unidad, por lo que el sistema no es estable.

Ejercicio 7

(a) La región de convergencia es $|z| > \frac{1}{2}$.

(b) Es estable, pues $C \subset ROC$.

(c)

$$X(z) = \frac{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}{(1 - 2z^{-1})}$$

(d)

$$h[n] = [2\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{-1}{4}\right)^n]u[n]$$

Ejercicio 8

Por definicion de la transformada Z y dado que f es nula para instantes menores a cero, tenemos que,

$$F(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} f[n]z^{-n} = \sum_{0}^{\infty} f(nT)z^{-n}$$

En la igualdad anterior z es un numero complejo, por lo que la expresión anterior puede reescribirse de la siguiente manera

$$F(r, e^{j\theta}) = \sum_{0}^{\infty} f(nT)r^{-n}e^{-j\theta}$$

siendo r el módulo del complejo y θ su argumento. De esta forma la expresión anterior se puede interpretar como la transformada de Fourier de la función $f(nT)r^{-n}$. Por lo tanto podemos calcularla como la convolución de la transformada de Fourier de las funciones $f(nT)$ y r^{-n}. Notar que $f(nT)$ es cero para valores de n negativos, por lo que la expresión anterior puede pensarse como la transformada de Fourier de $f(nT)u[n]r^{-n}$. Agregar $u[n]$ es solo a efectos de poder escribir a la función como producto de dos secuencias cuyas transformadas de Fourier sean conocidas.
La transformada de Fourier de $h[n] = u[n]r^{-n}$ esta dada por

$$H(e^{j\theta}) = \frac{1}{1 - r^{-1}e^{-j\theta}}$$

siempre que se cumpla que $r > 0$. Mientras que la transformada de Fourier de la secuencia $f(nT)$ puede escribirse, usando los resultados del teorema de muestreo, en función de la transformada de Fourier en tiempo continuo de la señal $f(t)$ de la forma,

$$F(e^{j\theta}) = \frac{1}{T}\sum_{k} F\left(\frac{j2\theta}{T} - j\frac{2k\pi}{T}\right)$$

Por lo tanto la relación pedida es

$$F(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} * \frac{1}{T}\sum_{k} F\left(\frac{j\arg(z)}{T} - j\frac{2k\pi}{T}\right)$$

siendo la región de convergencia el conjunto de los puntos z del plano complejo tales que $|z| > 0$.

Ejercicio 9

(a)

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} x[k]z^{-k} = X_u(z)$$

Por lo tanto todas las Transformadas Z de la tabla con $u[n]$ se pueden usar con la Transformada Z unilateral.

(b)

$$Z_u\{x[n-n_o]\} = \sum_{k=0}^{+\infty} x[k-n_o]z^{-k} = \sum_{u=-n_o}^{+\infty} x[u]z^{-(u+n_o)}$$

$$Z_u\{x[n-n_o]\} = z^{-n_o}\sum_{u=0}^{+\infty} x[u]z^{-u} + x[-n_o] + x[-n_o+1]z^{-1} + \cdots + x[-1]z^{-(n_o-1)}$$

$$Z_u\{x[n-n_o]\} = z^{-n_o}Z_u\{x[n]\} + x[-n_o] + x[-n_o+1]z^{-1} + \cdots + x[-1]z^{-(n_o-1)}$$

(c)

$$Z_u\{x[n+n_o]\} = \sum_{k=0}^{+\infty} x[k+n_o]z^{-k} = \sum_{u=n_o}^{+\infty} x[u]z^{-(u-n_o)}$$

$$Z_u\{x[n+n_o]\} = z^{n_o}\sum_{u=0}^{+\infty} x[u]z^{-u} - x[0]z^{n_o} - x[1]z^{n_o-1} - \cdots - x[n_o-1]z$$

$$Z_u\{x[n+n_o]\} = z^{n_o}Z_u\{x[n]\} - x[0]z^{n_o} - x[1]z^{n_o-1} - \cdots - x[n_o-1]z$$

Ejercicio 10

(a)

$$x[n] = Cy[m-1] + Dx[n-1]$$
$$y[n] = Bx[n-1] + Ay[n-1]$$

(b)

$$X_u(z) = \frac{(Cy[0] - Ax[0])z^{-1} + x[0]}{1 - (A+D)z^{-1} + (AD-BC)z^{-2}}$$

$$Y_u(z) = \frac{Bx[0] + y[0] - Dy[0]z^{-1}}{1 - (A+D)z^{-1} + (AD-BC)z^{-2}}$$

(c) $A = cos\omega_o, B = -sen\omega_o, C = sen\omega_o, D = cos\omega_o, x[0] = 0, y[0] = 1.$

$$X_u(z) = \frac{sen\omega_o z^{-1}}{1 - 2cos\omega_o z^{-1} + z^{-2}} \Rightarrow x[n] = sen(\omega_o n)u[n]$$

$$Y_u(z) = \frac{1 - cos\omega_o z^{-1}}{1 - 2cos\omega_o z^{-1} + z^{-2}} \Rightarrow y[n] = cos(\omega_o n)u[n]$$