Las hipótesis de aleatoriedad

Jorge Graneri, LPE, IMERL,
Facultad de Ingeniería, UDELAR.

Las hipótesis de aleatoriedad

Una parte fundamental de la teoría de la probabilidad y de la estadística depende de las hipótesis de aleatoriedad. Con frecuencia se parte un conjunto de datos

$$X_1, X_2, ..., X_n$$

que se asume, son las realizaciones de un conjunto de variables aleatorias i.i.d.

Nos enfrentamos al problema de someter a prueba una hipótesis básica de trabajo:

¿Es razonable suponer que nuestros datos provienen de un conjunto de variables i.i.d.?

Laa pruebas que habitualmente se aplican son bastante precarias.
En esencia, lo que se hace es verificar que no existan en nuestros datos patrones que nos hagan desconfiar de la hipótesis de aleatoriedad.

Damos a continuación algunos ejemplos:

Rachas up-down

Esta prueba estudia el comportamiento de los datos desde el punto de vista del crecimiento. Supongamos que tenemos una muestra

$$X_1, X_2, ..., X_n$$

y que definimos las variables

$$Y_1, Y_2, ..., Y_{n-1}$$

de la siguiente forma:

$$Y_i = 1_{\{X_i < X_{i+1}\}},$$

donde 1_A es la indicatriz del conjunto A. En nuestro caso la función valdrá 1 sólo cuando se dé el suceso indicado entre llaves.

Tenemos entonces un conjunto de ceros y unos que indica si hay crecimiento ó decrecimiento entre cada dato del conjunto original y el dato siguiente.

Por ejemplo, si consideramos el conjunto:

$X_1 = 0,0668;\ X_2 = 0,4175;\ X_3 = 0,6868;\ X_4 = 0,58$

$X_5 = 0,9304;\ X_6 = 0,8462;\ X_7 = 0,5269$

tendremos

$Y_1 = 1;\ Y_2 = 1;\ Y_3 = 0;\ Y_4 = 1;\ Y_5 = 0;\ Y_6 = 0$

La prueba en cuestión se basa en el número de rachas de ceros y unos en la muestra Y.

Por ejemplo, si consideramos el conjunto:

Si las rachas son muy pocas, eso se tomará como evidencia en contra de la hipótesis de aleatoriedad. Por ejemplo, en el caso extremo en el que hay una sola racha creciente

$$Y_1 = 1,\ Y_2 = 1,\ ..., Y_{n-1} = 1$$

o una sola racha decreciente

$$Y_1 = 0,\ Y_2 = 0,\ ..., Y_{n-1} = 0$$

no es demasiado razonable suponer que los datos son i.i.d.

En el otro extremo, los patrones en los que hay muchas rachas también pueden considerarse evidencia en contra de la hipótesis de aleatoriedad
$(Y_1 = 0,\ Y_2 = 1,\ Y_3 = 0,\ Y_4 = 1, ..., Y_{2k} = 1, Y_{2k+1} = 0,\ )$.

La prueba que aquí se describe utiliza como estadístico de decisión el número total de rachas, que matemáticamente puede definirse por la siguiente fórmula:

$$R = 1 + \sum_{i=1}^{n-2} 1_{\{Y_i \neq Y_{i+1}\}}.$$

Para muestras de tamaño pequeño la decisión entre:

- $\mathcal{H}_0$: “los datos son i.i.d.”.
- $\mathcal{H}_1$, : “los datos no son i.i.d.”.

se toma luego de buscar en una tabla exhaustiva.

En nuestro caso el número de rachas R es igual a 4:

TABLA N°9 Test de rachas de subidas y bajadas

TABLA N°9 Rachas (1/3)

n	R	Left-tail P	R	Right-tail P
3	1	.3333	2	.6667
4			3	.4167
	1	.0833	2	.9167
5	1	.0167	4	.2667
	2	.2500	3	.7500
6	1	.0028		
	2	.0861	5	.1694
	3	.4139	4	.5861
$\boxed{7}$	1	.0004	6	.1079
	2	.0250	5	.4417
	3	.1909	$\boxed{4}$	$\boxed{.8091}$
8	1	.0000		
	2	.0063	7	.0687
	3	.0749	6	.3250
	4	.3124	5	.6876
9	1	.0000		
	2	.0014		
	3	.0257	8	.0437

n	R	Left-tail P	R	Right-tail P
13	1	.0000		
	2	.0000		
	3	.0001	12	.0072
	4	.0026	11	.0568
	5	.0213	10	.2058
	6	.0964	9	.4587
	7	.2749	8	.7251
14	1	.0000		
	2	.0000		
	3	.0000		
	4	.0007	13	.0046
	5	.0079	12	.0391
	6	.0441	11	.1536
	7	.1534	10	.3722
	8	.3633	9	.6367
15	1	.0000		
	2	.0000		
	3	.0000		

Eso quiere decir que para una muestra de datos i.i.d. de tamaño 7 se tiene

$$P\{R \geq 4\} = 0{,}8091$$

Si el número de rachas hubiera sido igual a 3, tendríamos

$$P\{R \leq 3\} = 0{,}1909$$

En este caso el p-valor es 0,8091 y representa la probabilidad de que el número de rachas up-down en una muestra de tamaño 7 sea tan grande como el observado $R = 4$.

Como el p-valor es mayor que 0,05 (se suele trabajar al nivel $\alpha = 0,05$) aceptamos la hipótesis nula de que los datos son i.i.d.

De todas formas aplicaremos otra prueba de aletoriedad que es el Test de Correlación de rangos de Spearman y tendremos la cautela de decir que los datos son i.i.d. si y sólo si la muestra pasa los dos tests.

Para muestras de tamaño grande, un resultado asintótico de Levene (1952) nos da un criterio de decisión. Levene demostró que la variable

$$\frac{R - \frac{2n-1}{3}}{\sqrt{\frac{16n-29}{90}}}$$

puede ser aproximada por una normal típica.

Test de correlación de rangos

Esta prueba estudia la relación entre índices y rangos. Supongamos que tenemos una muestra

$$X_1, X_2, ..., X_n$$

y que definimos sus rangos

$$r_1, r_2, ..., r_n.$$

Recordemos previamente que el vector de rangos indica a qué posición de la muestra ordenada corresponde cada observación de la muestra original. De modo que para la muestra

$X_1 = 0,0668$; $X_2 = 0,4175$; $X_3 = 0,6868$; $X_4 = 0,58$

$X_5 = 0,9304$; $X_6 = 0,8462$; $X_7 = 0,5269$

el vector de rangos será igual a

$$r = (1, 2, 5, 4, 7, 6, 3).$$

En el caso general, el estadístico de Spearman entre dos vectores x e y, se define simplemente como el coeficiente de correlación entre ambas muestras, es decir:

$$S(x,y) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2\right)^{1/2}}$$

No es difícil demostrar que en el caso particular de los vectores r y v se tiene

$$RS := S(r,v) = 1 - 6\frac{\sum_{i=1}^{n}(r_i - i)^2}{n(n^2 - 1)}$$

Para todo par de vectores, el valor de este estadístico está entre -1 y 1. Si basamos nuestra prueba de aleatoriedad en este estadístico convendrá sospechar que existe cierto tipo de dependencia y rechazar la hipótesis de aleatoriedad para valores de $S(r, v)$ muy cercanos a 1 ó a -1.

Como en los casos anteriores, se dispone de una tabla exhaustiva en los casos en que el tamaño de la muestra es pequeño. En nuestro caso $n = 7$ y $RS = 0,5714$.

n	R	P	n	R	P	n	R	P
3	1.000	.167	7	1.000	.000	8	.810	.011
	.500	.500		.964	.001		.786	.014
4	1.000	.042		.929	.003		.762	.018
	.800	.167		.893	.006		.738	.023
	.600	.208		.857	.012		.714	.029
	.400	.375		.821	.017		.690	.035
	.200	.458		.786	.024		.667	.042
	.000	.542		.750	.033		.643	.048
5	1.000	.008		.714	.044		.619	.057
	.900	.042		.679	.055		.595	.066
	.800	.067		.643	.069		.571	.076
	.700	.117		.607	.083		.548	.085
	.600	.175		.571	.100		.524	.098
	.500	.225		.536	.118		.500	.108
	.400	.258		.500	.133		.476	.122
	.300	.342		.464	.151		.452	.134
	.200	.392		.429	.177		.429	.150
	.100	.475		.393	.198		.405	.163

En este caso el p-valor es 0,10.

Como el p-valor es mayor que 0,05 (se suele trabajar al nival $\alpha = 0,05$) aceptamos la hipótesis nula de que los datos son i.i.d.

De todas formas aplicaremos otra prueba de aletoriedad que es el Test de Rachas y tendremos la cautela de decir que los datos son i.i.d. si y sólo si la muestra pasa los dos tests.

Como en los casos anteriores, se dispone de una tabla exhaustiva en los casos en que el tamaño de la muestra es pequeño y de una aproximación: $\sqrt{n-1}\,RS \sim N(0,1)$ cuando el tamaño de la muestra es grande.