Señales y Sistemas

Práctico **007**

Muestreo de señales de tiempo continuo

Cada ejercicio comienza con un símbolo indicando su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ✦ básico, ★ medio, ✷ avanzado, y ✹ desafiante. Además puede tener un número, como (1.21) que indica el número de ejercicio del libro del curso, *Señales y Sistemas*, Oppenheim/Willsky, 2nd.edition.

✦ Ejercicio 1

En este ejercicio se explora qué sucede si no se cumple la hipótesis del Teorema de Muestreo. Sea $x_c(t) = \cos(40000\pi t)$ una sinusoidal en tiempo continuo. $x[n]$ son muestras de $x_c(t)$ tomadas a frecuencia $f_s = 16000\,\text{Hz}$.

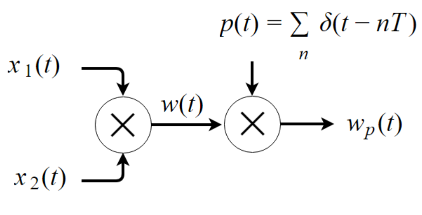
(a) Dar una expresión para $x[n]$.

(b) Hallar $y_c(t)$, la reconstrucción ideal de $x[n]$ para la frecuencia de muestreo f_s.

(c) Sea $x[n]$ la señal de tiempo discreto obtenida en la parte a). Si se sabe que $x[n]$ fue obtenida de una señal analógica $x(t) = \cos(\omega_c t)$ a una tasa de muestreo de 16kHz, hallar todos los posibles valores de ω_c que podrían resultar en la secuencia $x[n]$.

✦ Ejercicio 2 (7.6)

En el sistema de la figura, dos funciones del tiempo $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son multiplicadas entre sí, y su producto $w(t)$ es muestreado por un tren de deltas.



Las funciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$ tienen anchos de banda ω_1 y ω_2 en radianes por segundo, esto es

$$X_1(j\omega) = 0, \quad |\omega| > \omega_1$$

$$X_2(j\omega) = 0, \quad |\omega| > \omega_2$$

(a) Determinar el período de muestreo T máximo para garantizar que $w(t)$ pueda recuperarse a partir de $w_p(t)$ usando un filtro pasabajos ideal.

✦ Ejercicio 3

Sea $h_c(t)$ la respuesta al impulso de un SLIT, de tiempo continuo, y $h_d[n]$ la respuesta al impulso de un SLIT, de tiempo discreto.

(a) Determinar la respuesta en frecuencia $H_c(j\omega)$ del sistema en tiempo continuo y bosquejar su módulo si

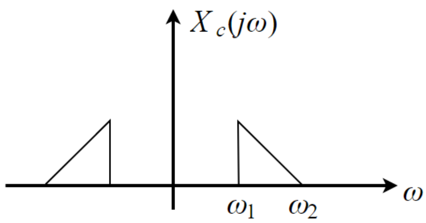
$$h_c(t) = \begin{cases} e^{-at} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

(b) Si $h_d[n] = T\, h_c(nT)$, donde T es el período de muestreo y $h_c(t)$ es la definida en (a), determinar la respuesta en frecuencia $H_d\left(e^{j\theta}\right)$ del sistema en tiempo discreto y bosquejar su módulo.

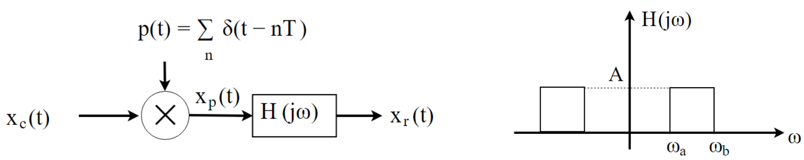
(c) Para un valor dado de a, determinar el mínimo de $|H_d(\, e^{j\theta}\,)|$ en función de T, y comparar con $|H_c(j\omega_s/2)|$ donde $\omega_s = 2\pi/T$.

★ Ejercicio 4 (7.26)

Sea la señal pasabanda $x_c(t)$ cuyo espectro se muestra en la siguiente figura.



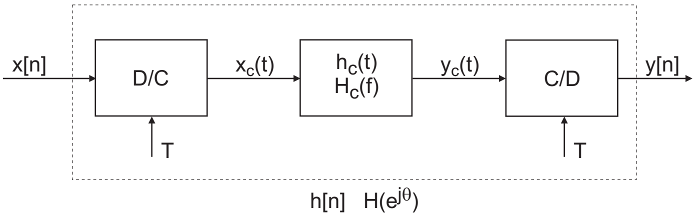
El teorema de muestreo, como lo hemos deducido, establece que la señal $x_c(t)$ debe ser muestreada a una velocidad mayor que su ancho de banda, o de manera equivalente, a una velocidad mayor que el doble de su frecuencia más alta. Esto implica que $x_c(t)$ deba ser muestreada a una velocidad mayor que $2\omega_2$. Sin embargo, ya que la señal tiene la mayor parte de su energía concentrada en una banda angosta, parecería razonable esperar que se pudiera usar una velocidad de muestreo más baja. Para examinar la posibilidad de muestrear una señal pasabanda a una velocidad menor que el ancho de banda total, considere el sistema de la siguiente figura.



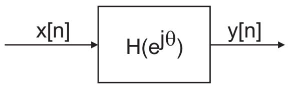
(a) Suponiendo que $\omega_1 > \omega_2 - \omega_2$, encuentre el máximo T y las constantes A, ω_a y ω_b tales que $x_r(t) = x_c(t)$

⋆ Ejercicio 5

En este problema se desea introducir un retardo en la señal luego de que ésta fuera muestreada. Sea una señal de tiempo discreto $x[n]$ obtenida al muestrear una señal de tiempo continuo $x_c(t)$ de ancho de banda ω_m con período de muestreo $T < \pi/\omega_m$. A partir de $x[n]$ se quiere obtener $y[n] = y_c(nT)$ donde $y_c(t) = x_c(t - \tau_d)$.



Si bien esto puede lograrse como se muestra en la figura anterior, es decir, reconstruyendo $x_c(t)$ para aplicar el retardo en tiempo continuo y luego volver a muestrear, nos interesa explorar cómo obtener $y[n]$ directamente a partir de $x[n]$ sin pasar pot $x_c(t)$, tal como se representa en la siguiente figura.



(a) Mostrar que en el caso particular $\tau_d = mT$, $m \in \mathbb{N}$, se tiene $y[n] = x[n - m]$.

(b) Hallar la transferencia $H_c(j\omega)$ del sistema con entrada $x_c(t)$ y salida $y_c(t)$.

(c) A partir de la parte anterior, hallar la respuesta en frecuencia $H\left(e^{j\theta}\right)$ del sistema en tiempo dicreto con entrada $x[n]$ y salida $y[n]$.

(d) Deducir la correspondiente respuesta al impulso $h[n]$.

(e) Bosquejar $h[n]$ para el caso $\tau_d = T/2$ y $\tau_d = T$, mostrando que en el segundo caso $h[n]$ coincide con una delta discreta.

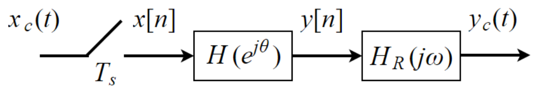
⋆ Ejercicio 6

La secuencia en tiempo discreto $x[n]$ fue obtenida filtrando una señal de voz $x_c(t)$ con un filtro pasabajos ideal de frecuencia de corte de 5 kHz, y muestreando la salida a 10 kHz.
La señal $x_c(t)$ estaba en una cinta magnética que fue destruida accidentalmente luego de obtener y almacenar la secuencia $x[n]$.
Luego se descubre que hubiese sido posible filtrar la señal original $x_c(t)$ con un pasabajos ideal de frecuencia de corte de 3 kHz y posteriormente muestrearla a 6 kHz para obtener una señal $r[n]$ más reducida.

(a) Encontrar un método para obtener $r[n]$ a partir de $x[n]$ directamente, sin utilizar conversores C/D o D/C. Si su método hace uso de un filtro digital especificar la respuesta frecuencial del mismo.

★ Ejercicio 7

La figura muestra un diagrama de bloques de un sistema que sirve para hacer filtrado de una señal de tiempo continuo $x_c(t)$ utilizando un filtro de tiempo discreto.



La respuesta en frecuencia del filtro de reconstrucción es $H_r(j\omega) = T_s \Pi\left(\frac{\omega T_s}{2\pi}\right)$ y la del filtro de tiempo discreto es $H(e^{j\theta}) = \Pi\left(\frac{2\theta}{\pi}\right)$.

(a) Para $X_c(f) = \Lambda\left(\frac{f}{10.000}\right)$ y $\frac{1}{T_s} = 20$kHz, graficar $X_s(f)$ y $X(e^{j\theta})$, donde $x_s(t) = x(t) \sum_n \delta(t - nT_s)$.

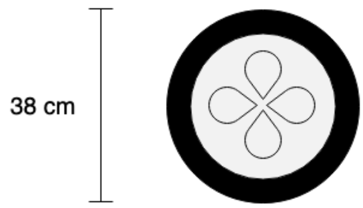
(b) Para un determinado rango de valores de T_s y una entrada con el mismo ancho de banda que $x_c(t)$ en la parte anterior, el sistema es equivalente a un filtro pasabajos continuo ideal $H_{\text{eff}}(f)$. Determinar ese rango de valores de T_s.

(c) Para el rango de valores determinado en la parte anterior, graficar la frecuencia (angular) de corte de H_{eff} como función de $\frac{1}{T_s}$.

Observación: Esta es una forma de implementar filtros pasabajos continuos de corte variable utilizando un filtro pasabajos discreto fijo y frecuencias de muestreo variables.

✷ Ejercicio 8

Se observa frecuentemente en las señales de video que las ruedas de los autos parecen girar hacia atrás, aunque el auto esté avanzando [1].



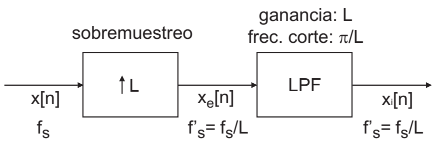
(a) En una película de 24 cuadros por segundo se ve una rueda como la de la figura, de 38cm de diámetro, girando hacia atrás. Cada 2.5 segundos se observa la rueda volver a la misma posición. En base a estos datos, y considerando las simetrías del dibujo, obtenga las posibles velocidades de avance del automóvil.

[1] https://www.youtube.com/playlist?list=PL217FA8C506B5AEB9

✶ Ejercicio 9 (4.50)

La figura siguiente representa un sistema para interpolar una señal en un factor L, donde

$$x_e[n] = \begin{cases} x[\frac{n}{L}] & n = 0, \pm L, \pm 2L, \ldots \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



El filtro pasabajos interpola entre las muestras no nulas de $x_e[n]$, generando la señal sobremuestreada $x_i[n]$. Cuando el pasabajos es ideal, la interpolación lleva el nombre de interpolación de banda limitada. Dos interpoladores comúnmente utilizados (por su simplicidad) son el interpolador lineal y el bloqueador de orden cero. En la interpolación del bloqueador de orden cero, cada valor de $x[n]$ se repite L veces, i.e.,

$$x_i[n] = \begin{cases} x_e[0] & n = 0, 1, \ldots, L-1 \\ x_e[L] & n = L, L+1, \ldots, 2L-1 \\ x_e[2L] & n = 2L, 2L+1, \ldots, 3L-1 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

(a) Determinar la respuesta al impulso del filtro pasabajos para que el sistema sea un bloqueador de orden cero. Determinar su respuesta en frecuencia.

La repuesta al impulso del interpolador lineal es

$$h_{lin}[n] = \begin{cases} 1 - \frac{|n|}{L} & |n| \leq L \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

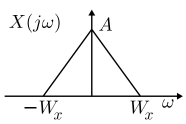
(b) Determinar su respuesta en frecuencia.

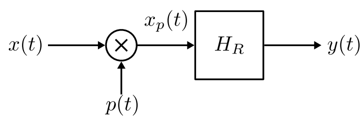
Sugerencia: puede resultar útil el hecho de que $h_{lin}[n]$ es triangular y por ende es la convolución de dos secuencias rectangulares.

(c) Bosquejar el módulo de la respuesta en frecuencia del filtro para las interpolaciones lineal y por bloqueo de orden cero. ¿Cuál de las dos interpolaciones se aproxima más a la interpolación ideal de banda limitada?

⋆ Ejercicio 10

Sea $x(t)$ una señal de tiempo continuo de ancho de banda finito W_x. Sea $x_d[n]$ la señal de tiempo discreto (secuencia) correspondiente a muestrear $x(t)$ con período de muestreo T_s, es decir $x_d[n] = x(n\,T_s)$. Considerar el proceso conceptual de muestreo dado por la siguiente figura, donde $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t - n\,T_s)$ es un tren de impulsos de período T_s y H_R es un filtro reconstructor ideal.





(a) Hallar el máximo tiempo de muestreo T_N que permite recuperar unívocamente la señal $x(t)$ a partir de sus muestras $x_d[n]$.

(b) Hallar una expresión para $X_p(j\omega)$ y bosquejarlo en función de $X(j\omega)$. Discutir las opciones según la relación entre T_s y T_N.

(c) Demostrar la relación $X_p(jw) = X_d\left(e^{j\omega T_s}\right)$.

Considerar dos tiempos de muestreo diferentes $T_1 = \alpha_1 T_N$ y $T_2 = \alpha_2 T_N$ que dan lugar a secuencia $x_1[n]$ y $x_2[n]$ respectivamente.

(d) Bosquejar los espectros de $X_1\left(e^{j\theta}\right)$ y $X_2\left(e^{j\theta}\right)$ en el caso de $\alpha_1 = 2$ y $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, marcando los puntos de interés en θ.