Tópicos de control: Lyapunov redesign

Pablo Monzón

Departamento de Sistemas y Control
Instituto de Ingeniería Eléctrica (IIE)
Facultad de Ingeniería-Universidad de la República
Uruguay

Análisis y control de sistemas no lineales
Primer semestre - 2023

Contenido

Rediseño (Khalil, capítulo 13 (2a Ed.).)

Ejemplo

Consideremos el siguiente sistema, que representa un péndulo con fricción y acción externa

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a\sin(x_1+\bar{\theta}) - bx_2 + cu \end{cases}$$

- $x_1 = \theta - \bar{\theta}$; $\bar{\theta}$ es el ángulo al que queremos estabilizar el péndulo.
- $a = g/l$, $b = k/m$, $c = 1/(ml^2)$, $u = T$.
- Tomando como salida el ángulo x_1, el sistema tiene grado relativo 2.

Rediseño

Ejemplo

- Con
$$u = \frac{a}{c}\sin(x_1 + \bar{\theta}) + \frac{1}{c}v$$
podemos llevar el sistema a una forma linealizada:
$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & x_2 \\ \dot{x}_2 & = & -bx_2 + v \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v$$
$$\dot{x} = Ax + Bv$$
- Podemos diseñar un controlador lineal $v = Kx = k_1x_1 + k_2x_2$, tal que $A + BK$ sea Hurwitz.

Rediseño

Ejemplo

- Supongamos que no conocemos exactamente los valores de a y c.
- Denotemos por $\hat{a}$ y $\hat{c}$ los valores nominales.
- La realimentación nos queda así:

$$u(x) = \left(\frac{\hat{a}}{\hat{c}}\right)\sin(x_1 + \bar{\theta}) + \frac{1}{\hat{c}}(k_1 x_1 + k_2 x_2).$$

- El sistema realimentado es:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & x_2 \\ \dot{x}_2 & = & k_1 x_1 + (k_2 - b)x_2 + \delta(x) \end{array} \right.$$

con

$$\delta(x) = \left(\frac{c - \hat{c}}{\hat{c}}\right)(k_1 x_1 + k_2 x_2) + \left(\frac{c\hat{a} - a\hat{c}}{\hat{c}}\right)\sin(x_1 + \bar{\theta})$$

Rediseño

Ejemplo

- Tenemos un sistema lineal perturbado por una $\delta(x)$ que no se anula en $x = 0$.
- Se cumple que

$$\|\delta(x)\| \leq \gamma_1 \|x\| + \gamma_2$$

$$\gamma_1 = \left| \frac{c - \hat{c}}{\hat{c}} \right| \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$$

- Podemos esperar entonces que si γ_1 es suficientemente chico, las trayectorias se acercan al origen y permanecen confinadas cerca de él.
- Para obtener una cota, necesitamos una función de Lyapunov cuadrática para $A + BK$.

Rediseño

Ejemplo

Supongamos $\bar{\theta} = \pi$. Otra manera de enfrentar el problema es la siguiente

- Ponemos $u(x) = -\left(\frac{\hat{a}}{\hat{c}}\right)\sin(x_1) + \frac{1}{\hat{c}}(k_1 x_1 + k_2 x_2) + v$ (es la u anterior, con un nuevo grado de libertad adicional.)
- El sistema realimentado es:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= k_1 x_1 + (k_2 - b)x_2 + \delta(x, v) \end{cases}$$

  con

$$\delta(x, v) = \left(\frac{c - \hat{c}}{\hat{c}}\right)(k_1 x_1 + k_2 x_2) - \left(\frac{c\hat{a} - a\hat{c}}{\hat{c}}\right)\sin(x_1) + \left(\frac{c - \hat{c}}{\hat{c}}\right)v$$

- Se cumple que

$$\|\delta(x, v)\| \leq \rho_1 \|x\| + k|v|$$

Rediseño

Matching condition

- Consideremos el siguiente esquema general

$$\dot{x} = f(x) + g(x)[u + \delta(x, u)]$$

$$\|\delta(x, u)\| \le \rho(x) + k\|u\| \quad , \quad 0 \le k < 1 \quad , \quad \rho \ge 0$$

- La perturbación aparece de una forma particular y se dice que satisface la condición de matching.
- El sistema $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ será el sistema nominal.
- Supondremos que para el sistema nominal conocemos:
  - Una realimentación de estados $\Psi(x)$ estabilizante.
  - Una función de Lyapunov V para el sistema realimentado.
  - $\dot{V}_n(x) \le -\alpha(\|x\|)$ ($\alpha(0) = 0$, α monótona creciente estricta).

Rediseño

Matching condition

- Consideremos ahora la señal de control:

$$u = \Psi(x) + v$$

donde v ahora es una nueva acción de control que debemos diseñar para lidiar con la perturbación.

- La derivada de V sobre el sistema perturbado es:

$$\dot{V}(x) = \dot{V}_n(x) + \frac{\partial V}{\partial x} g(x)[v + \delta(x, \Psi(x) + v)]$$

- Usando la notación $w^T = \frac{\partial V}{\partial x} g(x)$ y la acotación para la derivada sobre el sistema nominal, obtenemos

$$\dot{V}(x) \leq -\alpha(\|x\|) + w^T v + w^T \delta(x)$$

Rediseño

$$\dot{V}(x) \leq -\alpha(\|x\|) + w^T v + w^T \delta(x)$$

$\|\delta\left(x, \Psi(x) + v\right)\|_2 \leq \rho(x) + k\|v\|_2$, $0 \leq k < 1$

Consideremos la señal de control

$$v = -\frac{\rho(x)}{1-k} \cdot \frac{w}{\|w\|_2} \Rightarrow \|v\|_2 = \frac{\rho(x)}{1-k}$$

Entonces

$$\dot{V}(x) \leq -\alpha(\|x\|) - \omega^T \left[\frac{\rho(x)}{1-k} \cdot \frac{w}{\|w\|_2}\right] + \|w\|_2 \rho(x) + k\|w\|_2\|v\|_2 =$$

$$= -\alpha(\|x\|) + \|w\|_2 \left[\frac{-1}{1-k} + 1 + \frac{k}{1-k}\right] \rho(x) = -\alpha(\|x\|)$$

Rediseño

$$\dot{V}(x) \leq -\alpha(\|x\|) + w^T v + w^T \delta(x)$$

$\|\delta\left(x, \Psi(x) + v\right)\|_\infty \leq \rho(x) + k\|v\|_\infty, \, , \, 0 \leq k < 1$

Consideremos la señal de control

$$v = -\frac{\rho(x)}{1-k}.sg(w) \Rightarrow \|v\|_\infty = \frac{\rho(x)}{1-k}$$

Entonces

$$\dot{V}(x) \leq -\alpha(\|x\|) - \omega^T \left[\frac{\rho(x)}{1-k} . \frac{w}{\|w\|_\infty}\right] + \|w\|_\infty \rho(x) + k\|w\|_\infty \|v\|_\infty =$$

$$= -\alpha(\|x\|) + \|w\|_\infty \left[\frac{-1}{1-k} + 1 + \frac{k}{1-k}\right] \rho(x) = -\alpha(\|x\|)$$

Comentarios

- Las señales de control son discontinuas (teoría de Filippov para existencia y unicidad de soluciones).
- Esto conduce al *chattering*, generalmente no deseado.
- Pueden ser suavizadas en sus pasajes por $w = 0$.
- Por ejemplo, en lugar de $v = -\frac{\rho(x)}{1-k} \cdot \frac{w}{\|w\|_2}$, usamos

$$v = \begin{cases} \frac{\rho(x)}{1-k} \cdot \frac{w}{\|w\|_2} & , \quad \rho(x)\|w\|_2 \geq \epsilon \\ \frac{\rho(x)}{1-k} \cdot \frac{w}{\epsilon} & , \quad \rho(x)\|w\|_2 < \epsilon \end{cases}$$

- Caemos en la estabilidad de sistemas perturbados, cuyo comportamiento asintótico dependerá de si la perturbación se anula o no en el origen.

Ejemplo

- Consideremos el sistema *linealizable entrada-estado*:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

- Entonces, tenemos un cambio de variable $z = T(x)$ que nos lleva a una representación lineal.
- Podemos hallar una realimentación de estados estabilizante $v = Kz$, tal que $A + BK$ sea Hurwitz.
- El control estabilizante es $\Psi(x) = \alpha(x) + \beta(x)KT(x)$
- Podemos hallar una función de Lyapunov $V(z) = z^T Pz$, con $P > 0$ tal que

$$(A + BK)^T P + P(A + BK) = -I$$

Ejemplo

- Supongamos que el modelo tiene incertidumbre con la siguiente estructura

$$\dot{x} = f(x) + \Delta_f(x) + [G(x) + \Delta_G(x)]\, u$$

- En la variable z, el sistema queda

$$\dot{z} = f_1(z) + G_1(z)\,[u + \delta(z, u)]$$

(bajo la hipótesis de que el cambio de variable linealizante sigue siendo válido, lo que se traduce en una restricción al *tamaño* de la perturbación).

Retomemos el ejemplo del péndulo

- La realimentación estabilizante nominal nos había quedado así:

$$\Psi(x) = \left(\frac{\hat{a}}{\hat{c}}\right)\sin(x_1 + \bar{\theta}) + \frac{1}{\hat{c}}(k_1 x_1 + k_2 x_2).$$

- Pongamos $u = \Psi(x) + v$. Entonces

$$\delta(x) = \left(\frac{c-\hat{c}}{\hat{c}}\right)(k_1 x_1 + k_2 x_2) + \left(\frac{c\hat{a} - a\hat{c}}{\hat{c}}\right)\sin(x_1 + \bar{\theta}) + \left(\frac{c-\hat{c}}{\hat{c}}\right)v$$

- La incertidumbre satisface

$$|\delta| \leq \rho\|x\|_2 + k|v|$$

$$k = \left|\frac{c-\hat{c}}{\hat{c}}\right| \quad , \quad \rho = \frac{\left|\frac{\hat{a}c - a\hat{c}}{\hat{c}}\right| + \left|\frac{c-\hat{c}}{\hat{c}}\right| \|K\|^2}{\hat{c}}$$

Retomemos el ejemplo del péndulo

- Asumiendo $k < 1$, estamos en condiciones de aplicar el rediseño, ya que tenemos una función de Lyapunov cuadrática $V = x^T P x$.
- Usamos la acción de control discontinua, o su versión continua, y logramos estabilizar el péndulo alrededor de la posición deseada.