Señales y Sistemas

Práctico 5
Transformada de Fourier de tiempo discreto
y Transformada discreta de Fourier

2019

Cada ejercicio comienza con un símbolo indicando su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ✦ básico, ★ medio, ✷ avanzado, y ✹ desafiante. Además puede tener un número, como (1.21) que indica el número de ejercicio del libro del curso, *Señales y Sistemas*, Oppenheim/Willsky, 2nd.edition.

1. Transformada de Fourier de tiempo discreto

✦ Ejercicio 1 (5.1)

Usando la definición de Transformada de Fourier de Tiempo Discreto, calcular la transformada $X(e^{j\theta})$ para la siguientes señales:

(a) $x_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$

(b) $x_2[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n-1|}$

Bosquejar un período del módulo de cada transformada.

✦ Ejercicio 2 (5.3)

Determinar la Transformada de Fourier de tiempo discreto para $-\pi \leq \theta \leq \pi$ para las siguientes señales periódicas:

(a) $\sin\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{4}\right)$

(b) $2 + \cos\left(\frac{\pi}{6}n + \frac{\pi}{8}\right)$

✦ Ejercicio 3 (5.4)

Usar la definición de la transformada inversa de Fourier de tiempo discreto para calcular la transformada inversa de:

(a) $X_1(e^{j\theta}) = 2\pi\delta(\theta) + \pi\delta(\theta + \pi/2) + \pi\delta(\theta - \pi/2) \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$

(b) $X_2(e^{j\theta}) = \begin{cases} 2j, & 0 < \theta \leq \pi \\ -2j, & -\pi < \theta \leq 0 \end{cases}$

Confirmar que $x_1[n]$ y $x_2[n]$ son reales.

⋆ Ejercicio 4 (5.19)

Considerar un SLIT S causal y estable cuya entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ estén relacionadas mediante una ecuación de diferencias de segundo orden

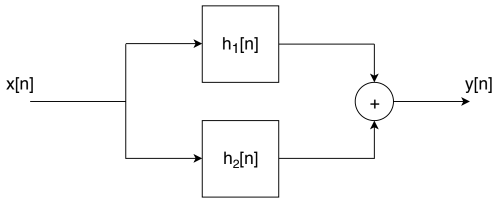
$$y[n] - \frac{1}{6}y[n-1] - \frac{1}{6}y[n-2] = x[n].$$

(a) Determinar la respuesta en frecuencia $H(e^{j\theta})$ del sistema S.

(b) Determinar la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema S.

⋆ Ejercicio 5 (5.13)

Un SLIT con respuesta al impulso $h_1[n] = (1/3)^n u[n]$ se conecta en paralelo con otro SLIT causal con respuesta al impulos $h_2[n]$.



La interconexión en paralelo que resulta tiene la respuesta en frecuencia

$$H(e^{j\theta}) = \frac{-12 + 5e^{-j\theta}}{12 - 7e^{-j\theta} + e^{-j2\theta}}.$$

Determinar $h_2[n]$.

✷ Ejercicio 6 (5.41)

Sea $\tilde{x}[n]$ una señal periódica con período N. Una señal de $x[n]$ de duración finita está relacionada con $\tilde{x}[n]$ mediante

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & n_0 \leq n \leq n_0 + N - 1 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}$$

para algún entero n_0. Esto es, $x[n]$ es igual a $\tilde{x}[n]$ en un período y cero con cualquier otro valor.

(a) Si $\tilde{x}[n]$ tiene coeficientes de series de Fourier a_k y $x[n]$ tiene transformada de Fourier $X(e^{j\theta})$, demostrar que

$$a_k = \frac{1}{N}X(e^{j2\pi k/N})$$

sin importar el valor de n_0.

(b) Considerando las siguientes dos señales:

$$x[n] = u[n] - u[n-4]$$

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-kN]$$

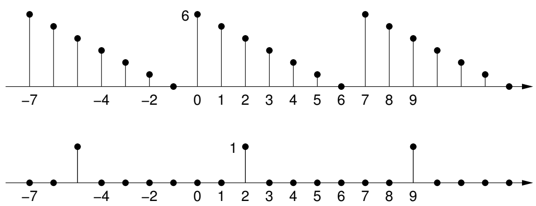
donde N es un entero postivo. Sea que a_k denota los coeficientes de Fourier de $\tilde{x}[n]$ y sea $X(e^{j\theta})$ la Transformada de Fourier de $x[n]$.

1. Determinar la expresión en forma cerrada para $X(e^{j\theta})$.
2. Usando el resultado de la parte (1), determinar una expresión para los coeficientes a_k de Fourier.

2. Transformada discreta de Fourier

✦ Ejercicio 7

Las dos señales $\tilde{x}_1[n]$ y $\tilde{x}_2[n]$ que aparecen en la siguiente figura tienen período $N = 7$.



Hallar una secuencia $\tilde{y}[n]$ cuya serie discreta de Fourier sea el producto de las series discretas de $\tilde{x}_1[n]$ y $\tilde{x}_2[n]$. Es decir, $\tilde{Y}[k] = \tilde{X}_1[k]\tilde{X}_2[k]$.

✦ Ejercicio 8

Encontrar la DFT de las siguientes secuencias, considerándolas de largo finito N, con N par.

(a) $x[n] = \delta[n]$

(b) $x[n] = \delta[n-n_o]$, $0 \leq n_o \leq N-1$

(c) $x[n] = \begin{cases} 1, & n \text{ par}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n \text{ impar}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \end{cases}$

(d) $x[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$

✦ Ejercicio 9 (8.10)

La señal $x_1[n]$ toma valores [0.3001 0.6366 0.9003 1 0.9003 0.6366 0.3001] para $0 \leq n < 7$, y vale 0 afuera de este rango. Similarmente, la señal $x_2[n]$ toma valores [1 0.9003 0.6366 0.3001 0.3001 0.6366 0.9003] para $0 \leq n < 7$, y vale 0 afuera de este rango.

(a) Graficar $x_1[n]$ y $x_2[n]$.

(b) ¿Qué relación hay entre los módulos de la Transformada Discreta de Fourier de las dos señales?

✷Ejercicio 10 (8.57)

A partir de la definición de DFT y DFT inversa,

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}, \quad 0 \leq n \leq N-1$$

donde $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$.
Mostrar que para $x[n]$ como secuencia de duración finita N y $X[k]$, su DFT de N puntos, se cumple

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2$$

Este es el teorema de Parseval para DFT.

Solución

Ejercicio 1

(a)

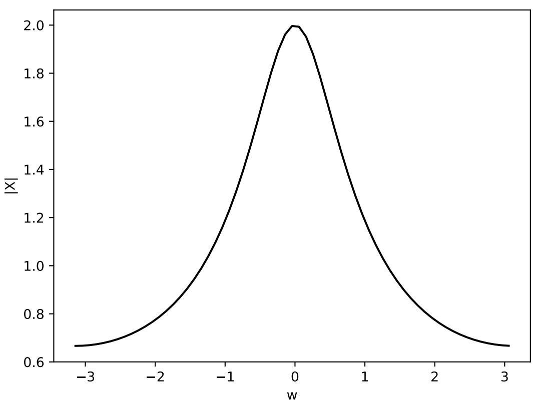
$$X(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x[n]e^{-j\theta n}$$

$$= \sum_{n=1}^{n=\infty} (1/2)^{n-1}e^{-j\theta n}$$

$$= \sum_{m=0}^{m=\infty} (1/2)^{m}e^{-j\theta(m+1)}$$

$$= e^{-j\theta}\frac{1}{1-(1/2)e^{-j\theta}}$$

Para poder usar el resultado se las serie geometrica se hizo el cambio $m = n - 1$.



(b)

$$X(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x[n]e^{-j\theta n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{n=0} (1/2)^{-(n-1)}e^{-j\theta n} + \sum_{n=1}^{n=\infty} (1/2)^{n-1}e^{-j\theta n}$$

El resultado del segundo termino es igual al del problema a).

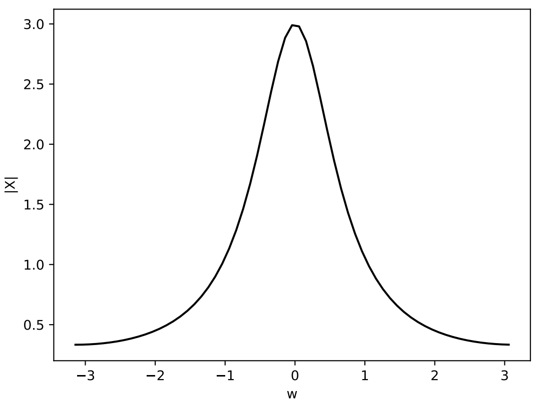
$$\sum_{n=-\infty}^{n=0} (1/2)^{-(n-1)}e^{-j\theta n}$$

$$= \sum_{m=0}^{m=\infty} (1/2)^{m+1}e^{j\theta m}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) \frac{1}{1-(1/2)e^{j\theta}}$$

$m = -n$. Entonces

$$X(e^{j\theta}) = \left(\frac{1}{2}\right) \frac{1}{1-(1/2)e^{j\theta}} + e^{-j\theta} \frac{1}{1-(1/2)e^{-j\theta}} = \frac{0.75e^{-j\theta}}{1.25-\cos(\theta)}$$



Ejercicio 2

(a) Las señales periódicas con representación en series de Fourier

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

tienen una transformada de Fourier

$$X(e^{j\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta\left(\theta - \frac{2\pi k}{N}\right).$$

Considerando la señal $x_1[n] = \sin(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{4})$, su período fundamental es $N = 6$. Ésta también se puede escribir como:

$$x_1[n] = (1/2j)e^{j(\frac{\pi}{3}n+\frac{\pi}{4})} - (1/2j)e^{-j(\frac{\pi}{3}n+\frac{\pi}{4})} = (1/2j)e^{j(\frac{\pi}{4})}e^{j(\frac{2\pi}{6}n)} - (1/2j)e^{\frac{\pi}{4})}e^{-j(\frac{2\pi}{6}n}$$

De esto se obtienen los coeficientes de Fourier distintos de cero en el rango $-2 \leq k \leq 3$.

$$a_1 = (1/2j)e^{j(\frac{\pi}{4})}$$
$$a_{-1} = -(1/2j)e^{-j(\frac{\pi}{4})}$$

Entonces en el rango $-\pi \leq \theta \leq \pi$ se tiene

$$X(e^{j\theta}) = 2\pi a_1 \delta(\theta - \frac{2\pi}{6}) + 2\pi a_{-1} \delta(\theta + \frac{2\pi}{6})$$

$$= (\pi/j)\left(e^{j\pi/4}\delta(\theta - 2\pi/6) - e^{-j\pi/4}\delta(\theta + 2\pi/6)\right)$$

(b) Considerando la señal $x_2[n] = 2 + \cos(\frac{\pi}{6}n + \frac{\pi}{8})$, su período fundamental es $N = 12$. Ésta también se puede escribir como:

$$x_2[n] = 2+(1/2)e^{j(\frac{\pi}{6}n+\frac{\pi}{8})}+(1/2)e^{-j(\frac{\pi}{6}n+\frac{\pi}{8})} = (1/2)e^{j(\frac{\pi}{8})}e^{j(\frac{2\pi}{12}n)}+(1/2)e^{\frac{\pi}{8}}e^{-j(\frac{2\pi}{12}n}$$

De esto se obtienen los coeficientes de Fourier distintos de cero en el rango $-5 \leq k \leq 6$.

$$a_0 = 2$$
$$a_1 = (1/2)e^{j(\frac{\pi}{8})}$$
$$a_{-1} = (1/2)e^{-j(\frac{\pi}{8})}$$

Entonces en el rango $-\pi \leq \theta \leq \pi$ se tiene

$$X(e^{j\theta}) = 2\pi a_0\delta(\theta) + 2\pi a_1\delta(\theta - \frac{2\pi}{12}) + 2\pi a_{-1}\delta(\theta + \frac{2\pi}{12})$$
$$= 4\pi\delta(\theta) + \pi\left(e^{j\pi/8}\delta(\theta - 2\pi/12) + e^{-j\pi/8}\delta(\theta + 2\pi/12)\right)$$

Ejercicio 3

(a)

$$x_1[n] = (1/2\pi)\int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\theta})e^{j\theta n}d\theta$$
$$= (1/2\pi)\int_{-\pi}^{\pi} (2\pi\delta(\theta) + \pi\delta(\theta + \pi/2) + \pi\delta(\theta - \pi/2))\, e^{j\theta n}d\theta$$
$$= e^{j0} + (1/2)e^{-j(\pi/2)n} + (1/2)e^{j(\pi/2)n}$$
$$= 1 + \cos(\pi n/2)$$

(b)

$$x_2[n] = (1/2\pi)\int_{-\pi}^{\pi} X_2(e^{j\theta})e^{j\theta n}d\theta$$
$$= -(1/2\pi)\int_{-\pi}^{0} 2je^{j\theta n} + (1/2\pi)\int_{0}^{\pi} 2je^{j\theta n}$$
$$= (1/n\pi)\left(e^{j\pi n} + e^{-j\pi n} - 2\right)$$
$$= (2/n\pi)\left(\cos(n\pi) - 1\right)$$
$$= -(4/n\pi)\sin^2(n\pi/2)$$

Ejercicio 4

(a) Tomando la tranformada de Fourier de amobos lados de la ecuación diferencial, se tiene

$$Y(e^{j\theta}) = \left\{1 - \frac{1}{6}e^{j\theta} - \frac{1}{6}e^{-2j\theta}\right\} = X(e^{j\theta}).$$

Entonces,

$$H(e^{j\theta}) = \frac{Y(e^{j\theta})}{X(e^{j\theta})} = \frac{1}{1 - \frac{1}{6}e^{-j\theta} - \frac{1}{6}e^{-2j\theta}} = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}e^{j\theta})(1 + \frac{1}{3}e^{-j\theta})}$$

(b) Usando fracciones simples,

$$H(e^{j\theta}) = \frac{3/5}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\theta}} + \frac{2/5}{1 + \frac{1}{3}e^{-j\theta}}$$

Entonces

$$h[n] = \frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n].$$

Ejercicio 5

Cuando dos SLIT se conectan en paralelo, la respuesta al impulso de todo el sistema es la suma de las respuestas al impuslo de cada sistema individual. Entonces

$$h[n] = h_1[n] + h_2[n].$$

Usando la propiedad de linealidad

$$H(e^{j\theta}) = H_1(e^{j\theta}) + H_2(e^{j\theta})$$

Dado que $h_1[n] = (1/3)^n u[n]$, se tiene que

$$H_1(e^{j\theta}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\theta}}$$

Entonces

$$H_2(e^{j\theta}) = \frac{-12 + 5e^{j\theta}}{12 - 7e^{-j\theta} + e^{-j2\theta}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\theta}} = \frac{-2}{1 - \frac{1}{4}e^{j\theta}}$$

Tomando la Transformada inversa de Fourier,

$$h_2[n] = -2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n].$$

Ejercicio 6

(a) La transformada de Fourier $X(e^{j\theta})$ de la seǹal $x[n]$ es

$$X(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\theta n} = \sum_{n_0}^{n_0+N-1} x[n]e^{-j(2\pi/N)kn}$$

Ahora, la expresión de la serie de Fourier de $\tilde{x}[n]$ es

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{<N>} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)kn} = \frac{1}{N} \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} x[n] e^{-j(2\pi/N)kn}$$

($x[n] = \tilde{x}[n]$ en el intervalo $n_0 \leq n \leq n_0 + N - 1$). Entonces

$$a_k = \frac{1}{N} X(e^{j2\pi k/N})$$

(b) 1. Utilizando la definición de transformada de Fourier discreta

$$X(e^{j\theta}) = 1 + e^{-j\theta} + e^{-2j\theta} + e^{-3j\theta}$$

$$= e^{-j(3/2)\theta} \left(e^{j(3/2)\theta} + e^{-j(3/2)\theta} \right) + e^{-j(3/2)\theta} \left(e^{j(1/2)\theta} + e^{-j(1/2)\theta} \right)$$

$$= 2e^{-j(3/2)\theta} \left(\cos(3\theta/2) + \cos(\theta/2) \right)$$

2. De la parte (a) se tiene,

$$a_k = \frac{1}{N} X(e^{j2\pi k/N}) = \frac{1}{N} 2e^{-j(3/2)2\pi k/N} \left(\cos(6\pi k/(2N)) + \cos(\pi k/N) \right)$$

Ejercicio 7

Si $\tilde{Y}[k] = \tilde{X}_1[k]\tilde{X}_2[k]$, entonces $\tilde{y}[n]$ será la convolución circular de $\tilde{x}_1$ y $\tilde{x}_2$.
En este caso, la convolución circular es muy sencilla, ya que $\tilde{x}_2$ es un tren de impulsos retrasado 2 muestras. Por lo tanto, la convolución circular será $\tilde{x}_1[n-2]$.

Ejercicio 8

(a) $X[k] = 1$

(b) $X[k] = e^{-j\frac{2\pi}{N}n_0 k}$

Ejercicio 9

(b) La transformada discreta es, por definición, el primer período de la serie discreta de la señal periodizada.
En este caso, $x_1[n]$ periodizada y $x_2[n]$ periodizada ($\tilde{x}_1[n]$ y $\tilde{x}_2[n]$ respectivamente) son la misma señal salvo un retardo de 3 muestras.
Por lo tanto, la serie discreta de cada una estará dada por: $\tilde{X}_1[k] = \tilde{X}_2[k] W_7^{3k}$.
La transformada discreta es el primer período de la serie discreta, y por lo tanto valdrá la misma relación.
Entonces, en módulo, las dos transformadas serán iguales, ya que $|W_7| = 1$.