Señales y Sistemas

Práctico 4
Transformada de Fourier en tiempo contínuo

2019

Cada ejercicio comienza con un símbolo indicando su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ✦ básico, ★ medio, ✷ avanzado, y ✹ desafiante. Además puede tener un número, como (1.21) que indica el número de ejercicio del libro del curso, *Señales y Sistemas*, Oppenheim/Willsky, 2nd.edition.

✦ Ejercicio 1

(a) Hallar la Transformada de Fourier del pulso rectangular $x(t) = A\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$ mostrado en la Figura 1.

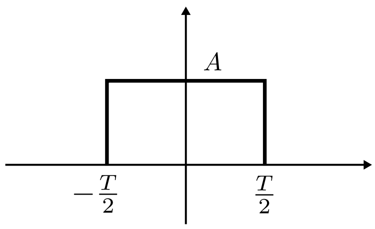

Figura 1: Pulso rectangular del Ejercicio 1.

(b) Hallar la Tranformada de Fourier de la función $x(t) = A\frac{\sin\left(\pi\frac{t}{\tau}\right)}{\left(\pi\frac{t}{\tau}\right)} = A\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{\tau}\right)$ y graficar su espectro.

✦ Ejercicio 2

Demostrar las siguientes propiedades de la Transformada de Fourier:

(a) Linealidad.

(b) $G(j\omega) = \frac{1}{|a|}X(\frac{j\omega}{a}),$ si $g(t) = x(at)$, para todo $a \neq 0$.

(c) Dualidad: si $X(j\omega) = \mathcal{F}\left[x(t)\right](j\omega)$, entonces $x(-j\omega) = \mathcal{F}\left[X(t)\right](j\omega)$.

(d) Si $X(j\omega) = \mathcal{F}\left[x(t)\right](j\omega)$, entonces $j\omega X(j\omega) = \mathcal{F}\left[\frac{dx}{dt}(t)\right](j\omega)$.

(e) Si $x(t)$ es real, entonces $X(-j\omega) = \overline{X(j\omega)}$.

(f) Si $X(j\omega) = \mathcal{F}\left[x(t)\right](j\omega)$, entonces $e^{-j\omega t_0}X(j\omega) = \mathcal{F}\left[x(t - t_0)\right](j\omega)$, para t_0 real cualquiera.

✦ Ejercicio 3

Hallar la Transformada de Fourier de las siguientes señales y bosquejar los espectros.

(a) $f(t) = u(t)e^{-\alpha t}\cos(\omega_0 t)$, con α y ω_0 reales positivos.

(b) Para $\tau > 0$, $f(t) = A\cos\left(9\pi\frac{t}{\tau}\right)$, si $|t| \leq \frac{\tau}{2}$ y 0 en otro caso.

✦ Ejercicio 4

Calcular la Transformada de Fourier de la señal triangular de la Figura 2 y bosquejar su espectro.

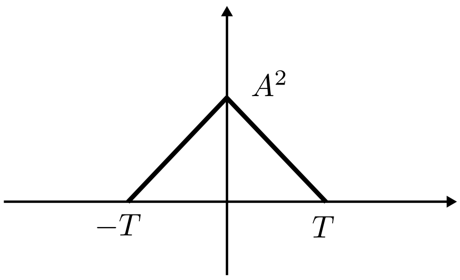

Figura 2: Señal triangular del Ejercicio 4.

✦ Ejercicio 5

Una señal $x(t)$ es de banda acotada W si su Transformada de Fourier cumple que: $X(j\omega) = 0$ si $|\omega| \geq W$.
Probar que si $x(t)$ es una señal de banda acotada W_x e $y(t)$ lo es en W_y, entonces el producto $z(t) = x(t)y(t)$ es de banda acotada en $W_x + W_y$ (ver Figura 3).

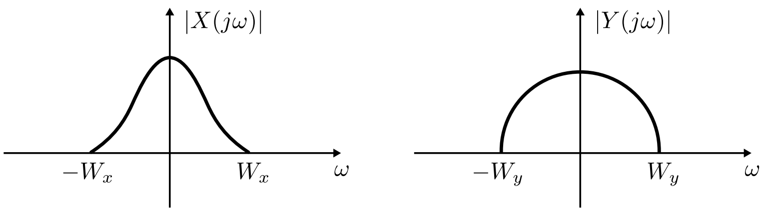

Figura 3: Espectros del Ejercicio 5.

★ Ejercicio 6

(a) Describir una onda cuadrada de período T ($x_T(t)$) como la convolución de un pulso $\Pi\left(\frac{t}{T/2}\right)$ con un peine de Dirac.

(b) Calcular los coeficientes de la Serie de Fourier de $x_T(t)$ y bosquejar su espectro.

(c) Calcular la Transformada de Fourier de $x_T(t)$ a partir de sus coeficientes de Fourier y bosquejar su espectro.

⋆ Ejercicio 7

Considerar las señales

$$x(t) = A\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{t}{T_0}\right),$$

$$n(t) = B\sin\left(8\frac{2\pi}{T_0}t\right) \text{ y}$$

$$x_n(t) = x(t) + n(t).$$

La señal $x_n(t)$ es filtrada (procesada) a través de un sistema lineal e invariente en el tiempo, con respuesta al impulso

$$h(t) = K\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T}\right).$$

Calcular T para que la respuesta del sistema ante la entrada $x_n(t)$ resulte $x(t)$.

Soluciones

Las soluciones que se muestran deben ser consideradas como los resultados o respuestas de los ejercicios, no son ni deben considerarse como el desarrollo o procedimiento para llegar a estos.

Ejercicio 1

(a)

(b)

Ejercicio 3

(a)

(b)

Ejercicio 4

Como:

$$x(t) = A^2\Lambda\left(\frac{t}{T}\right) = A\Pi\left(\frac{t}{T}\right) * A\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$$

Se cumple que

$$X(j\omega) = Asinc^2\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$$

Ejercicio 5

El producto $z(t) = x(t)y(t)$ tiene espectro: $Z(j\omega) = X(j\omega) * Y(j\omega)$, lo que significa que el soporte de $Z(j\omega)$ (ancho de banda) se encuentra en la unión de los soportes (anchos de banda) de W_x y W_y.

Ejercicio 6

(a)

$$x_T(t) = \Pi\left(\frac{t}{T/2}\right) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(t - nT\right)$$

(b)

$$a_k\left(x_T\right) = \frac{1}{2}sinc\left(\frac{k}{2}\right)$$

(c) Como

$$x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\left(x_T\right) e^{jk2\pi t/T}$$

Entonces:

$$X_T(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} sinc\left(\frac{k}{2}\right) \delta\left(\omega - k2\pi/T\right)$$

Ejercicio 7

El espectro de x_n resulta:

$$X_n(j\omega) = X(j\omega) + N(j\omega) = A\Lambda\left(\frac{\omega}{2\pi/T_0}\right) + \frac{B}{2}\delta\left(\omega - 8\times 2\pi/T_0\right) - \frac{B}{2j}\delta\left(\omega + 8\times 2\pi/T_0\right)$$

El especto del filtro resulta $H(j\omega) = \Pi\left(\frac{\omega}{2\pi/T}\right)$. Para obtener sólo $x(t)$ como respuesta, es necesario que se cumpla:

$$\frac{T_0}{2} > T > \frac{T_0}{16}$$