Señales y Sistemas

Práctico 3
Series de Fourier

2019

Cada ejercicio comienza con un símbolo indicando su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ✦ básico, ★ medio, ✷ avanzado, y ✹ desafiante. Además puede tener un número, como (1.21) que indica el número de ejercicio del libro del curso, *Señales y Sistemas*, Oppenheim/Willsky, 2nd.edition.

✦ Ejercicio 1

El desarrollo en Series de Fourier de una función de tiempo continuo $f(t)$ de período $T = \frac{2\pi}{\omega}$ puede expresarse de las dos formas siguientes:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{jn\omega t}, \quad f(t) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(n\omega t) + c_n \sin(n\omega t)$$

(a) Calcular los coeficientes b_n y c_n en función de a_n y viceversa.

(b) Si $f(t)$ es par, demostrar que:

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)dt, \quad b_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)dt, \quad c_n = 0$$

(c) Hallar una relación similar en el caso que $f(t)$ sea impar.

✦ Ejercicio 2

Considerar las siguientes señales periódicas de tiempo discreto: $x_1[n] = \sin(\omega_0 n)$ y $x_2[n] = \sin(M\omega_0 n)$ donde $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}, M \in \mathbb{N} \,/\, 1 \leq M < N$.

(a) Calcular la representación en series de Fourier de $x_1[n]$ y bosquejar su espectro.

(b) Calcular la representación en series de Fourier de $x_2[n]$ y bosquejar su espectro.

(c) Calcular la representación en series de Fourier de $x_1[n] + x_2[n]$ y bosquejar su espectro.

(d) Analizar qué información se requiere para representar unívocamente una señal periódica a partir de su espectro.

✦ Ejercicio 3

Para una señal de tiempo continuo $f(t)$ periódica de período T, se define la potencia media como:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt.$$

(a) Probar la *Identidad de Parseval* para señales de tiempo continuo, donde $f(t)$ es una función *compleja* periódica de período T y a_n sus coeficientes de Fourier:

$$\frac{1}{T}\int_b^{b+T} |f(t)|^2 \, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2.$$

(b) Escribir la expresión anterior en función de b_n y c_n (coeficientes de Fourier del desarrollo en serie de senos y cosenos).

Para una señal de tiempo discreto $x[n]$ periódica de período N, se define la potencia media como:

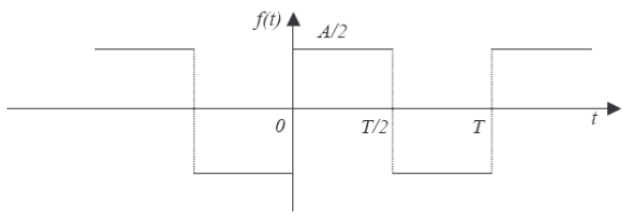
$$P = \frac{1}{N}\sum_{k=<N>} |x[k]|^2$$

(c) Probar la *Identidad de Parseval* para señales de tiempo discreto, donde $x[n]$ es una señal de tiempo discreto periódica de período N y a_n sus coeficientes de Fourier:

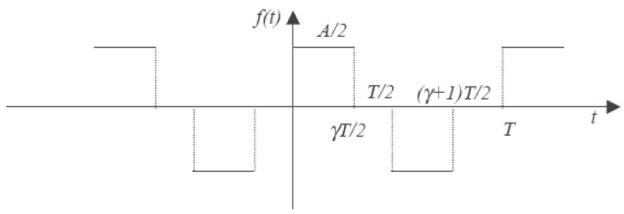
$$\frac{1}{N}\sum_{k=<N>} |x[k]|^2 = \sum_{j=<N>} |a_j|^2$$

✦ Ejercicio 4

(a) Hallar el desarrollo en Series de Fourier y dibujar su espectro para la señal de la siguiente figura.



(b) Para la señal de la siguiente figura, hallar los valores del parámetro γ que aseguren que el tercer armónico de dicha señal sea nulo. Este resultado es muy útil para la realización de conversores DC/AC conmutados en Electrónica de Potencia.



✦ Ejercicio 5

Sea $f(t)$ una función periódica de tiempo continuo dada por sus coeficientes de Fourier, a_n. Hallar los coeficientes de Fourier de las siguientes funciones en función de los coeficientes de $f(t)$:

(a) $g(t) = f(t + a)$

(b) $g(t) = f'(t)$

(c) $g(t) = f(kt)$ (determinar el período de $g(t)$).

★ Ejercicio 6 (3.14)

Determinar la señal $x[n]$, de la que se conocen los siguientes datos:

- $x[n]$ es periódica de período $N = 6$.
- $\sum_{n=0}^{5} x[n] = 2$.
- $\sum_{n=2}^{7} (-1)^n x[n] = 1$.
- De todas las señales que cumplen las condiciones anteriores, $x[n]$ es la que posee menor potencia media.

★ Ejercicio 7 (3.58)

Dadas las señales de tiempo discreto $x[n]$ y $y[n]$ periódicas de período N se define $z[n]$ del siguiente modo:

$$z[n] = \sum_{r=<N>} x[r]y[n-r]$$

(a) Mostrar que $z[n]$ es periódica de período N.

(b) Mostrar que si a_k, b_k y c_k son los coeficientes de Fourier de $x[n]$, $b[n]$ y $z[n]$ respectivamente, entonces

$$c_k = N a_k b_k$$

✶ Ejercicio 8

Se tiene un sistema de emergencia formado por un transmisor, un receptor y un canal de comunicación. En caso de emergencia, el transmisor envía una señal consistente en una onda cuadrada de período T, amplitud $A/2$ y valor medio nulo. El receptor mide la potencia media de la señal que recibe y si ésta supera el valor correspondiente al $90\,\%$ de la potencia media de la onda transmitida, declara la emergencia. El canal de comunicación es modelado como un filtro pasabajos de frecuencia de corte ω_c (ω_c define el ancho de banda del canal).

(a) Hallar, en función de ω_c, el mínimo período posible de la onda cuadrada que asegure que el mensaje sea bien interpretado por el receptor.

Soluciones

Las soluciones que se muestran deben ser consideradas como los resultados o respuestas de los ejercicios, no son ni deben considerarse como el desarrollo o procedimiento para llegar a estos.

Ejercicio 1

(a)

$$b_0 = a_0$$
$$\frac{b_n}{2} + \frac{c_n}{2j} = c_n \; \forall n > 0$$
$$\frac{b_n}{2} - \frac{c_n}{2j} = c_n \; \forall n < 0$$

Ejercicio 2

(a) Como $x_1[n] = \frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n})$, sólo tiene potencia en el primer armónico (frecuencia fundamenteal ω_0): $a_1 = \frac{1}{2j}$, $a_{-1} = -\frac{1}{2j}$, $a_k = 0 \; \forall |k| \neq 1$

(b) Como $x_2[n] = \frac{1}{2j}(e^{jM\omega_0 n} - e^{-jM\omega_0 n})$, sólo tiene potencia en el primer armónico (frecuencia fundamenteal $M\omega_0$): $a_1 = \frac{1}{2j}$, $a_{-1} = -\frac{1}{2j}$, $a_k = 0 \; \forall |k| \neq 1$

(c) En este caso:

$$x_1[n] + x_2[n] = \frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n}) + \frac{1}{2j}(e^{jM\omega_0 n} - e^{-jM\omega_0 n})$$

que tiene armónicos no nulos a_1, a_{-1}, a_M y a_{-M}, ya que la frecuencia fundamental es ω_0.

(d) Como se puede apreciar en las primeras partes, los valores de los coeficientes de Fourier NO alcanzan para identificar unívocamente una señal periódica: es necesario también conocer su frecuencia fundamental.

Ejercicio 3

(a) Ver teórico.

(b) Ver teórico.

(c) Ver teórico.

Ejercicio 4

(a) Los coeficientes de Fourier tienen la forma: $a_k = \frac{A}{jk2\pi}(1 - (-1)^k)$ (nótese que los armónicos pares son nulos).

(b) La única solución es: $\gamma = 2/3$.

Ejercicio 5

(a) Ver teórico.

(b) Ver teórico.

(c) Ver teórico.

Ejercicio 6

$$x[n] = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}(-1)^n$$

Ejercicio 7

(a) Ver teórico.

(b) Ver teórico.

Ejercicio 8

(a) Observando cúanta potencia aporta cada armónico de la señal de entrada, resulta que el 90 % de la potencia total es portada por los primeros tres armónicos. Por esta razón, la frecuencia de corte del filtro (ω_c) debe ser tal que permita pasar frecuencias de hasta $3 \times \frac{2\pi}{T}$ o más. Por lo tanto

$$T \geq 3 \times \frac{2\pi}{\omega_c}$$

.