Señales y Sistemas

Práctico 2

Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo (SLIT)

2019

Cada ejercicio comienza con un símbolo indicando su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ✦ básico, ★ medio, ✷ avanzado, y ✹ desafiante. Además puede tener un número, como (1.21) que indica el número de ejercicio del libro del curso, *Señales y Sistemas*, Oppenheim/Willsky, 2nd.edition.

Convolución

✦ Ejercicio 1 (2.21)

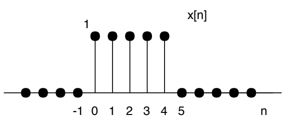
Calcular la convolución $y[n] = x[n] * h[n]$ de los siguientes pares de señales:

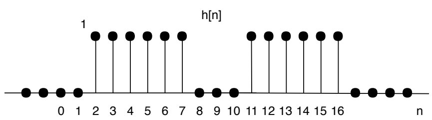
(a) $x[n] = \alpha^n u[n]$, $h[n] = \beta^n u[n]$, $\alpha \neq \beta$

(b) $x[n] = h[n] = \alpha^n u[n]$

(c) $x[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n-4]$, $h[n] = 4^n u[2-n]$

(d) $x[n]$ y $h[n]$ son como en la siguiente figura





✦ Ejercicio 2 (2.8)

Determinar y bosquejar la convolución de las siguientes dos señales:

$$x(t) = \begin{cases} t+1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2-t, & 1 < t \leq 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad h(t) = \delta(t+2) + 2\delta(t+1)$$

★ Ejercicio 3

A partir de los pulsos:

$$f(t) = A_1[u(t+\tau) - u(t-\tau)]$$

$$h(t) = A_2[u(t+\tau) - u(t-\tau)]$$

(a) Calcular $f(t) * h(t)$ ¿Cómo cambia el resultado si el ancho de un pulso es más grande que el otro?.

(b) Calcular $h(t) * h(t) * h(t)$.

(c) Calcular $f(t) * (e^{-at}u(t))$.

⋆ Ejercicio 4

Se sabe que la respuesta al impulso de un SLIT es cero excepto en el intervalo $N_0 \leq n \leq N_1$. Se sabe además que la entrada $x[n]$ vale cero excepto en el intervalo $N_2 \leq n \leq N_3$. Como resultado, la salida $y[n]$ está destinada a ser cero excepto en algún intervalo $N_4 \leq n \leq N_5$.

(a) Determinar N_4 y N_5 en función de N_0, N_1, N_2 y N_3.

(b) Si $h[n]$ es cero excepto en M puntos consecutivos y $x[n]$ es cero excepto en N puntos consecutivos, ¿cuál es el máximo número de puntos consecutivos en los cuales $y[n]$ puede tomar valores distintos de cero?

✷ Ejercicio 5 (2.43)

Una de las propiedades más importantes de la convolución, tanto en tiempo continuo como en tiempo discreto, es la asociatividad.

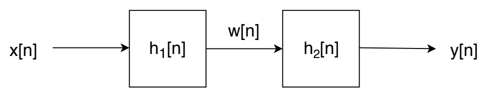
(a) Probar la igualdad

$$(x(t) * h(t)) * g(t) = x(t) * (h(t) * g(t))$$

al mostrar que ambos lados de la igualdad son iguales a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(\sigma)g(t-\tau-\sigma)d\tau d\sigma.$$

(b) Considerar los SLIT con respuesta al impulso $h_1[n]$ y $h_2[n]$ puestos en cascada como se muestra en la figura



Sea $x[n] = u[n]$, $h_1[n] = (1/2)^n u[n]$ y $h_2[n] = u[n] + (1/2)u[n-1]$.

1. Calcular $y[n]$ calculando primero $w[n] = x[n] * h_1[n]$ y luego $y[n] = w[n] * h_2[n]$; esto es $y[n] = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]$.
2. Ahora determinar $y[n]$ aplicando la convolución primero a $h_1[n]$ y $h_2[n]$ para obtener $g[n] = h_1[n] * h_2[n]$ y convolucionando $x[n]$ con $g[n]$ para obtener $y[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n])$

Las respuestas a 1 y 2 deben ser idénticas, y deben ilustrar la propiedad asociatividad de la convolución de tiempo discreto.

(c) Considerar la conexión en cascada de dos SLIT como en la figura anterior, donde en este caso

$$h_1[n] = \sin(8n) \text{ y } h_2[n] = a^n u[n], \quad |a| < 1,$$

donde la entrada es

$$x[n] = \delta[n] - a\delta[n-1].$$

Determinar la salida $y[n]$. (*Sugerencia:* El uso de las propiedades asociativa y conmutativa de la convolución deben facilitar bastante la solución.)

Propiedades de los SLIT

✦ Ejercicio 6 (2.28 y 2.29)

A continuación se muestran las respuestas al impulso de diferentes SLIT de tiempo discreto y tiempo continuo.
Determinar si cada sistema es causal y/o estable. Justificar las respuestas.

(a) $h[n] = \left(\frac{1}{5}\right)^n u[n]$

(b) $h[n] = (0.8)^n u[n+2]$

(c) $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n]$

(d) $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + (1.01)^n u[n-1]$

(e) $h(t) = e^{-4t} u(t-2)$

(f) $h(t) = e^{-6t} u(3-t)$

(g) $h(t) = e^{-2t} u(t+50)$

(h) $h(t) = (2e^{-t} - e^{(t-100)/100}) u(t)$

★ Ejercicio 7

Considerar un SLIT en tiempo discreto, estable con respuesta al impulso $h[n]$. Mostrar que si la entrada $x[n]$ es una secuencia periódica con período N (esto es $x[n] = x[n+N]$) entonces la salida $y[n]$ es también una secuencia periódica con período N.

✦ Ejercicio 8 (2.57)

Considerar un SLIT causal T con entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ relacionados por la siguiente ecuación en diferencias:

$$y[n] = -ay[n-1] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1].$$

(a) Verificar que T puede considerarse como la conexión en cascada de dos SLIT causales T_1 y T_2 con las siguientes relaciones entrada-salida:

$$T_1 : y_1[n] = b_0 x_1[n] + b_1 x_1[n-1],$$

$$T_2 : y_2[n] = -ay_2[n-1] + x_2[n].$$

(b) Dibujar un diagrama de bloques representando a T_1.

(c) Dibujar un diagrama de bloques representando a T_2.

(d) Dibujar un diagrama de bloques representando a T como la cascada del diagrama de T_1 seguido del diagrama de T_2.

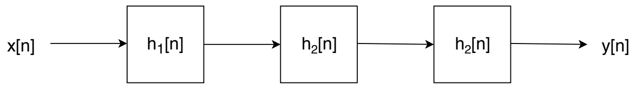
(e) Dibujar un diagrama de bloques representando a T como la cascada del diagrama de T_2 seguido del diagrama de T_1.

(f) Mostrar que la unidades de retardo en el diagrama de bloques de T de la parte (e) se pueden colapsar en un elemento de retardo.

Nota: Los diagramas de la partes (d) y (e) son denominados *Forma Directa I* de T y el diagrama de la parte (f) se denominada *Forma Directa II* de T.

★ Ejercicio 9 (2.24)

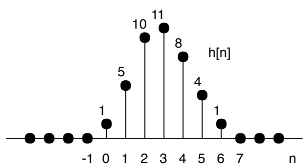
Examinar la interconexión en cascada de los tres SLIT causales ilustrados en la siguiente figura.



La respuesta al impulso $h_2[n]$ es

$$h_2[n] = u[n] - u[n-2]$$

y la respuesta total al impulso es como se muestra en la siguiente figura.



(a) Encuentre la respuesta al impulso $h_1[n]$

(b) Encuentre la respuesta del sistema total a la entrada

$$x[n] = \delta[n] - \delta[n-1].$$

★ Ejercicio 10

Se tiene un sistema de acumulación de energía (baterías) que se modelará en tiempo discreto. En cada instante la carga de la batería $y[n]$ se compone de la carga acumulada hasta el instante anterior, con una pérdida por fuga del 5 %, sumada a la energía $x[n]$ que se inyecta al acumulador desde la red eléctrica en cada instante (que será negativa cuando se extraiga energía).

(a) Plantear una ecuación en diferencias que modele el sistema.

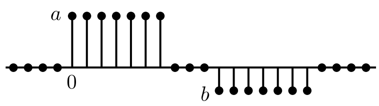
(b) Calcular su repuesta al impulso.

(c) Si la entrada es un pulso de M muestras $x[n] = u[n] - u[n-M]$, calcular la salida $y[n]$.

(d) Realizar un diagrama de bloques con sumadores, multiplicadores y retardos que modele este sistema.

(e) ¿Qué hipótesis se asumieron para resolver las partes anteriores?

(f) Basado en la respuesta de la parte (c) dar la respuesta a la siguiente entrada



Solución

Ejercicio 1

(a)

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] * h[n] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \\ &= \beta^n \sum_{k=0}^{n} (\alpha/\beta)^k \quad para\; n \geq 0 \\ &= \left[\frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha}\right] u[n] \quad para \quad \alpha \neq \beta \end{aligned}$$

(b) De (a),

$$y[n] = \alpha^n \left(\sum_{k=0} n1 \right) u[n] = (n+1)\alpha^n u[n]$$

(c) Para $n \leq 6$,

$$y[n] = 4^n \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{8}\right)^k - \sum_{k=0}^{3} \left(-\frac{1}{8}\right)^k \right)$$

Para $n > 6$,

$$y[n] = 4^n \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{8}\right)^k - \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{8}\right)^k \right)$$

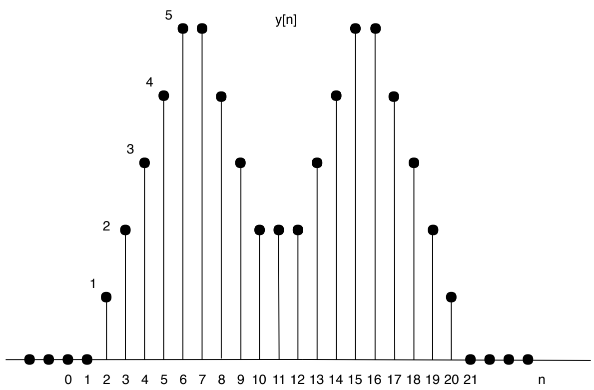
Entonces,

$$y[n] = \begin{cases} (8/9)(-1/8)^4 4^n, & n \leq 6 \\ (8/9)(-1/2)^n, & n > 6 \end{cases}$$

(d)

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$
$$x[0]h[n] + x[1]h[n-1] + x[2]h[n-2] + x[3]h[n-3] + x[4]h[n-4]$$

Esto se puede ver en la siguiente figura



Ejercicio 2

$$y(t) = x(t) * h(t) = x(t+2) + 2x(t+1)$$

Entonces

$$y(t) = \begin{cases} t+3, & -2 < t \leq -1 \\ t+4, & -1 < t \leq 0 \\ 2-2t, & 0 < t \leq 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejercicio 3

(a)

$$f(t) * h(t) = \begin{cases} A_1A_2(t+2\tau), & -2\tau \leq t \leq 0 \\ A_1A_2(2\tau - t), & 0 \leq t \leq 2\tau \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En el caso donde $f(t)$ y $h(t)$ tienen anchos τ_1 y τ_2 respectivamente, los cuales cumplen que $\tau_1 \geq \tau_2$, la solución es:

$$f(t) * h(t) = \begin{cases} A_1A_2(t+\tau_1+\tau_2), & -(\tau_1+\tau_2) < t \leq \tau_2 - \tau_1 \\ A_1A_2(\tau_1+\tau_2-t), & \tau_1 - \tau_2 < t \leq \tau_1+\tau_2 \\ 2A_1A_2\tau_2, & \tau_2 - \tau_1 < t \leq \tau_1 - \tau_2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(b)

$$h(t) * h(t) * h(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}A_2^3(t+3\tau)^2, & -3\tau < t \leq -\tau \\ A_2^3(\sqrt{3}\tau + t)(\sqrt{3}\tau - t), & -\tau < t \leq \tau \\ \frac{1}{2}A_2^3(t-3\tau)^2, & \tau < t \leq 3\tau \\ 0, \text{en otro caso} \end{cases}$$

(c)

$$f(t) * (e^{-at}u(t)) = \begin{cases} \frac{A_1}{a}\left(1 - e^{-a(t+\tau)}\right), & -\tau < t \leq \tau \\ \frac{A_1}{a}\left(e^{-a(t-\tau)} - e^{-a(t+\tau)}\right), & \tau < t \\ 0, \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejercicio 4

(a) Sea $h[n]$ la respuesta al impulso del sistema. La salida la podemos plantear entonces como $y[n] = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n-m]h[m]$. Para que la salida $y[n]$ pueda ser distinta de cero debe cumplirse que $N_2 \leq n-m \leq N_3$ y $N_0 \leq m \leq N_1$ para algún m. Es decir que debemos poder encontrar m tal que $n - N_3 \leq m \leq n - N_2$ y $N_0 \leq m \leq N_1$. Para que esto ocurra los intervalos $[n-N_3, n-N_2]$ y $[N_0, N_1]$ no deben ser disjuntos. Esto nos da las condiciones para n:

$$n - N_2 \geq N_0$$

$$N_1 \geq n - N_3$$

De donde:

$$N_0 + N_2 \leq n \leq N_1 + N_3$$

Así obtenemos $N_4 = N_0 + N_2$ y $N_5 = N_1 + N_3$.

(b) Podemos aplicar la parte anterior sabiendo que $N_1 - N_0 = M - 1$ y $N_3 - N_2 = N - 1$. Sumando ambas ecuaciones tenemos que:

$$(N_1 + N_3) - (N_0 + N_2) = N + M - 2$$

Es decir:

$$N_5 - N_4 = N + M - 2$$

Por lo que la cantidad mÃ¡xima de puntos consecutivos distintos de cero es $N+M-1$.

Ejercicio 5

(a) Primero se tiene

$$[x(t)*h(t)]*g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(\sigma'-\tau)g(t-\sigma')d\tau d\sigma' = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(\sigma)g(t-\sigma-\tau)d\tau d\sigma$$

también,

$$\begin{aligned} x(t) * [h(t) * g(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\sigma')h(\tau)g(\sigma'-\tau)d\sigma' d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\sigma)h(\tau)g(t-\tau-\sigma)d\tau d\sigma \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(\sigma)g(t-\sigma-\tau)d\tau d\sigma \end{aligned}$$

La igualdad está probada.

(b) (i) Primero se tiene

$$w[n] = u[n] * h_1[n] = \sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{2}{3}\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]u[n]$$

Ahora,

$$y[n] = w[n] * h_2[n] = (n+1)u[n].$$

(ii) Primero se tiene

$$g[n] = h_1[n] * h_2[n] = \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = u[n]$$

Ahora,

$$y[n] = u[n] * g[n] = u[n] * u[n] = (n+1)u[n].$$

El mismo resultado fue obtenido en ambas partes (i) y (ii).

(c) Notar que,

$$x[n] * (h_2[n] * h_1[n]) = (x[n] * h_2[n]) * h_1[n].$$

También notar que

$$x[n] * h_2[n] = \alpha^n u[n] - \alpha^n u[n-1] = \delta[n].$$

Entonces,

$$x[n] * h_1[n] * h_2[n] = \delta[n] * \sin(8n) = \sin(8n)$$

Ejercicio 6

(a) Causal porque $h[n] = 0$ para $n < 0$. Estable porque $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 5/4 < \infty$.

(b) No causal porque $h[n] \neq 0$ para $n < 0$. Estable porque $\sum\limits_{n=-2}^{+\infty} (0.8)^n = (0.8)^{-2} + (0.8)^{-1} + 5 < \infty$.

(c) No causal porque $h[n] \neq 0$ para $n < 0$. Inestable porque $\sum\limits_{n=-\infty}^{0} (1/2)^n = \infty$.

(d) Causal porque $h[n] = 0$ para $n < 0$. Inestable porque el segundo termino tiende a infinito cuando $n \to \infty$.

(e) Causal porque $h(t) = 0$ para $t < 0$. Estable porque $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|dt = e^{-8}/4 < \infty$.

(f) No causal porque $h(t) \neq 0$ para $t < 0$. Inestable porque $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|dt = \infty$.

(g) No causal porque $h(t) \neq 0$ para $t < 0$. Estable porque $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|dt = e^{100}/2 < \infty$.

(h) Causal porque $h(t) = 0$ para $t < 0$. Inestable porque $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|dt = \infty$.

Ejercicio 7

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]h[k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n+N-k]h[k] = y[n+N]$$

La segunda igualdad es válida pues x es periódica de período N. Esto implica que $y[n]$ también es periódica de período N.

Para que sea cierto alcanza con que el sistema sea invariante en el tiempo.

$$R_N\{y\} = R_N\{T\{x\}\} = T\{R_N\{x\}\}$$

Como x es periódica de perÃodo N, $R_N\{x\} = x$. Por lo tanto,

$$R_N\{y\} = T\{x\} = y$$

y esto implica que y es periódica de período N.

Ejercicio 8

(a)

Ejercicio 9

(a) Dado que se conoce la respuesta del impulso $h_2[n]$, entonces

$$h_2[n] * h_2[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2].$$

Desde

$$h[n] = h_1[n] * [h_2[n] * h_2[n]]$$

se obtiene

$$h[n] = h_1[n] + 2h_1[n-1] + h_1[n-2]$$

$$\begin{aligned}
&h[0] = h_1[0] \to h_1[0] = 1,\\
&h[1] = h_1[1] + 2h_1[0] \to h_1[1] = 3,\\
&h[2] = h_1[2] + 2h_1[1] + h_1[0] \to h_1[2] = 3,\\
&h[3] = h_1[3] + 2h_1[2] + h_1[1] \to h_1[3] = 2,\\
&h[4] = h_1[4] + 2h_1[3] + h_1[2] \to h_1[4] = 1,\\
&h[5] = h_1[5] + 2h_1[4] + h_1[3] \to h_1[5] = 0.
\end{aligned}$$

$h_1[n] = 0$ para $n < 0$ y $n \geq 5$

(b) En este caso,

$$y[n] = x[n] * h[n] = h[n] - h[n-1].$$

Ejercicio 10

(a)

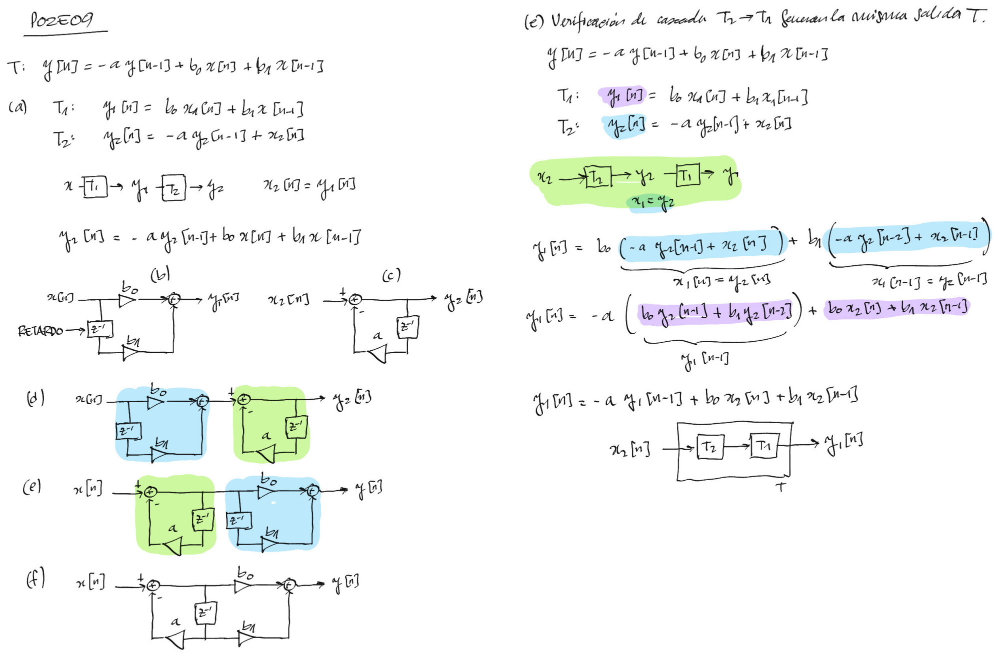


Figura 1: Solución del ejercicio 8.

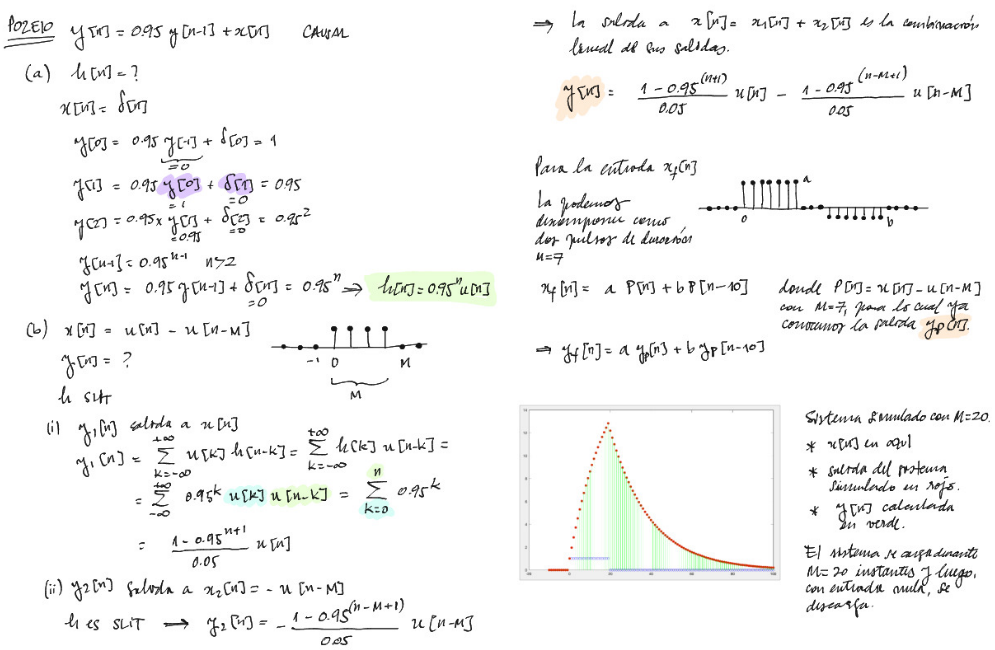


Figura 2: Solución del ejercicio 10.