Señales y Sistemas

Práctico 5
Transformada de Fourier de tiempo discreto
y Transformada discreta de Fourier

2019

Cada ejercicio comienza con un símbolo indicando su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ✦ básico, ★ medio, ✷ avanzado, y ✹ desafiante. Además puede tener un número, como (1.21) que indica el número de ejercicio del libro del curso, *Señales y Sistemas*, Oppenheim/Willsky, 2nd.edition.

1. Transformada de Fourier de tiempo discreto

✦ Ejercicio 1 (5.1)

Usando la definición de Transformada de Fourier de Tiempo Discreto, calcular la transformada $X(e^{j\theta})$ para la siguientes señales:

(a) $x_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$

(b) $x_2[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n-1|}$

Bosquejar un período del módulo de cada transformada.

✦ Ejercicio 2 (5.3)

Determinar la Transformada de Fourier de tiempo discreto para $-\pi \leq \theta \leq \pi$ para las siguientes señales periódicas:

(a) $\sin\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{4}\right)$

(b) $2 + \cos\left(\frac{\pi}{6}n + \frac{\pi}{8}\right)$

✦ Ejercicio 3 (5.4)

Usar la definición de la transformada inversa de Fourier de tiempo discreto para calcular la transformada inversa de:

(a) $X_1(e^{j\theta}) = 2\pi\delta(\theta) + \pi\delta(\theta + \pi/2) + \pi\delta(\theta - \pi/2) \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$

(b) $X_2(e^{j\theta}) = \begin{cases} 2j, & 0 < \theta \leq \pi \\ -2j, & -\pi < \theta \leq 0 \end{cases}$

Confirmar que $x_1[n]$ y $x_2[n]$ son reales.

★ Ejercicio 4 (5.19)

Considerar un SLIT S causal y estable cuya entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ estén relacionadas mediante una ecuación de diferencias de segundo orden

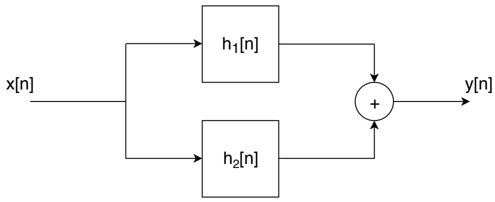
$$y[n] - \frac{1}{6}y[n-1] - \frac{1}{6}y[n-2] = x[n].$$

(a) Determinar la respuesta en frecuencia $H(e^{j\theta})$ del sistema S.

(b) Determinar la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema S.

★ Ejercicio 5 (5.13)

Un SLIT con respuesta al impulso $h_1[n] = (1/3)^n u[n]$ se conecta en paralelo con otro SLIT causal con respuesta al impulos $h_2[n]$.



La interconexión en paralelo que resulta tiene la respuesta en frecuencia

$$H(e^{j\theta}) = \frac{-12 + 5e^{-j\theta}}{12 - 7e^{-j\theta} + e^{-j2\theta}}.$$

Determinar $h_2[n]$.

✷ Ejercicio 6 (5.41)

Sea $\tilde{x}[n]$ una señal periódica con período N. Una señal de $x[n]$ de duración finita está relacionada con $\tilde{x}[n]$ mediante

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & n_0 \leq n \leq n_0 + N - 1 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}$$

para algún entero n_0. Esto es, $x[n]$ es igual a $\tilde{x}[n]$ en un período y cero con cualquier otro valor.

(a) Si $\tilde{x}[n]$ tiene coeficientes de series de Fourier a_k y $x[n]$ tiene transformada de Fourier $X(e^{j\theta})$, demostrar que

$$a_k = \frac{1}{N} X(e^{j2\pi k/N})$$

sin importar el valor de n_0.

(b) Considerando las siguientes dos señales:

$$x[n] = u[n] - u[n-4]$$

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n - kN]$$

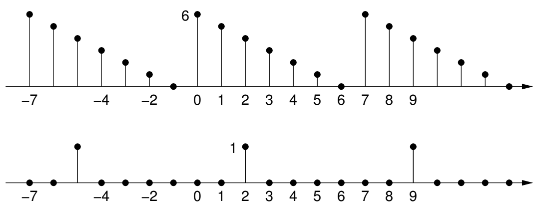
donde N es un entero postivo. Sea que a_k denota los coeficientes de Fourier de $\tilde{x}[n]$ y sea $X(e^{j\theta})$ la Transformada de Fourier de $x[n]$.

1. Determinar la expresión en forma cerrada para $X(e^{j\theta})$.
2. Usando el resultado de la parte (1), determinar una expresión para los coeficientes a_k de Fourier.

2. Transformada discreta de Fourier

✦ Ejercicio 7

Las dos señales $\tilde{x}_1[n]$ y $\tilde{x}_2[n]$ que aparecen en la siguiente figura tienen período $N = 7$.



Hallar una secuencia $\tilde{y}[n]$ cuya serie discreta de Fourier sea el producto de las series discretas de $\tilde{x}_1[n]$ y $\tilde{x}_2[n]$. Es decir, $\tilde{Y}[k] = \tilde{X}_1[k]\tilde{X}_2[k]$.

✦ Ejercicio 8

Encontrar la DFT de las siguientes secuencias, considerándolas de largo finito N, con N par.

(a) $x[n] = \delta[n]$

(b) $x[n] = \delta[n - n_o]$, $0 \leq n_o \leq N - 1$

(c) $x[n] = \begin{cases} 1, & n \text{ par}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n \text{ impar}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \end{cases}$

(d) $x[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$

✦ Ejercicio 9 (8.10)

La señal $x_1[n]$ toma valores [0.3001 0.6366 0.9003 1 0.9003 0.6366 0.3001] para $0 \leq n < 7$, y vale 0 afuera de este rango. Similarmente, la señal $x_2[n]$ toma valores [1 0.9003 0.6366 0.3001 0.3001 0.6366 0.9003] para $0 \leq n < 7$, y vale 0 afuera de este rango.

(a) Graficar $x_1[n]$ y $x_2[n]$.

(b) ¿Qué relación hay entre los módulos de la Transformada Discreta de Fourier de las dos señales?

∗ Ejercicio 10 (8.57)

A partir de la definición de DFT y DFT inversa,

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}, \quad 0 \leq n \leq N-1$$

donde $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$.
Mostrar que para $x[n]$ como secuencia de duración finita N y $X[k]$, su DFT de N puntos, se cumple

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2$$

Este es el teorema de Parseval para DFT.