

Señales y Sistemas

Práctico 4

Transformada de Fourier en tiempo continuo

2019

Cada ejercicio comienza con un símbolo indicando su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ♦ básico, ★ medio, * avanzado, y ✱ desafiante. Además puede tener un número, como (1.21) que indica el número de ejercicio del libro del curso, *Señales y Sistemas*, Oppenheim/Willsky, 2nd.edition.

♦ Ejercicio 1

- (a) Hallar la Transformada de Fourier del pulso rectangular $x(t) = A\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$ mostrado en la Figura 1.

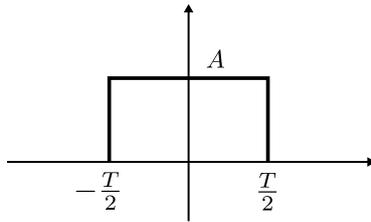


Figura 1: Pulso rectangular del Ejercicio 1.

- (b) Hallar la Transformada de Fourier de la función $x(t) = A\frac{\sin(\pi\frac{t}{T})}{(\pi\frac{t}{T})} = A\text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$ y graficar su espectro.

♦ Ejercicio 2

Demostrar las siguientes propiedades de la Transformada de Fourier:

- Linealidad.
- $G(j\omega) = \frac{1}{|a|}X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$, si $g(t) = x(at)$, para todo $a \neq 0$.
- Dualidad: si $X(j\omega) = \mathcal{F}[x(t)](j\omega)$, entonces $x(-j\omega) = \mathcal{F}[X(t)](j\omega)$.
- Si $X(j\omega) = \mathcal{F}[x(t)](j\omega)$, entonces $j\omega X(j\omega) = \mathcal{F}\left[\frac{dx}{dt}(t)\right](j\omega)$.
- Si $x(t)$ es real, entonces $X(-j\omega) = \overline{X(j\omega)}$.
- Si $X(j\omega) = \mathcal{F}[x(t)](j\omega)$, entonces $e^{-j\omega t_0}X(j\omega) = \mathcal{F}[x(t - t_0)](j\omega)$, para t_0 real cualquiera.

◆ Ejercicio 3

Hallar la Transformada de Fourier de las siguientes señales y bosquejar los espectros.

- (a) $f(t) = u(t)e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t)$, con α y ω_0 reales positivos.
- (b) Para $\tau > 0$, $f(t) = A \cos\left(9\pi \frac{t}{\tau}\right)$, si $|t| \leq \frac{\tau}{2}$ y 0 en otro caso.

◆ Ejercicio 4

Calcular la Transformada de Fourier de la señal triangular de la Figura 2 y bosquejar su espectro.

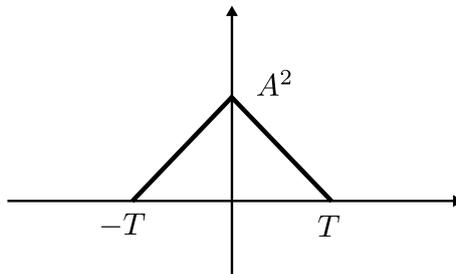


Figura 2: Señal triangular del Ejercicio 4.

◆ Ejercicio 5

Una señal $x(t)$ es de banda acotada W si su Transformada de Fourier cumple que: $X(j\omega) = 0$ si $|\omega| \geq W$.

Probar que si $x(t)$ es una señal de banda acotada W_x e $y(t)$ lo es en W_y , entonces el producto $z(t) = x(t)y(t)$ es de banda acotada en $W_x + W_y$ (ver Figura 3).

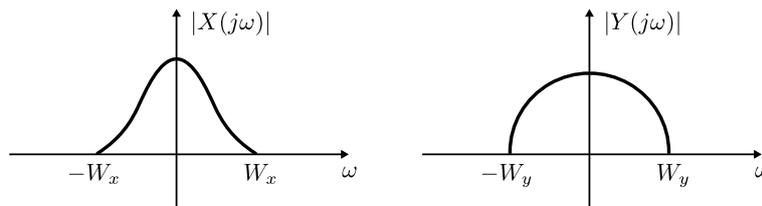


Figura 3: Espectros del Ejercicio 5.

★ Ejercicio 6

- (a) Describir una onda cuadrada de período T ($x_T(t)$) como la convolución de un pulso $\Pi\left(\frac{t}{T/2}\right)$ con un peine de Dirac.
- (b) Calcular los coeficientes de la Serie de Fourier de $x_T(t)$ y bosquejar su espectro.
- (c) Calcular la Transformada de Fourier de $x_T(t)$ a partir de sus coeficientes de Fourier y bosquejar su espectro.

★ Ejercicio 7

Considerar las señales

$$x(t) = A \operatorname{sinc}^2\left(\frac{t}{T_0}\right),$$

$$n(t) = B \sin\left(8\frac{2\pi}{T_0}t\right) \text{ y}$$

$$x_n(t) = x(t) + n(t).$$

La señal $x_n(t)$ es filtrada (procesada) a través de un sistema lineal e invariante en el tiempo, con respuesta al impulso

$$h(t) = K \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T}\right).$$

Calcular T para que la respuesta del sistema ante la entrada $x_n(t)$ resulte $x(t)$.