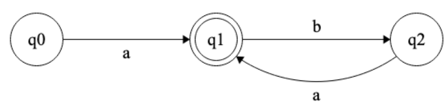
Demostración de que $L(M) = L(r)$

Teoría de Lenguajes

2020

1 Introducción

Dado el autómata finito M:



y la expresión regular $r = (ab)^*a$, queremos probar que $L(M) = L(r)$.

1.1 ¿Cómo lo vamos a probar?

Para probar dicha igualdad de conjuntos, haremos una prueba por doble inclusión:

- $L(M) \subseteq L(r)$: $\forall w \in L(M)$, se cumple $w \in L(r)$
- $L(r) \subseteq L(M)$: $\forall w \in L(r)$, se cumple $w \in L(M)$

O sea, queremos probar que toda tira aceptada por el autómata (que al reconocerse queda en un estado final) efectivamente pertenece al lenguaje dado; y luego al revés, que toda tira perteneciente al lenguaje es aceptada por el autómata M.

Así que primero hallemos una expresión por comprensión para el lenguaje generado por la expresión regular dada.

Podemos ver que: $L(r) = L((ab)^*a) = L(ab)^*.L(a) = (\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} L(ab)^i).L(a)$

$\Rightarrow L(r) = \{x \in \Sigma^* : (ab)^k a, k \geq 0\}$ sobre $\Sigma = \{a, b\}$.

Definamos ahora 3 propiedades [1] que serán las que probaremos.

- P_0) w es de la forma w=ϵ
- P_1) w es de la forma w=$a(ba)^k = (ab)^k a$, $k \geq 0$
- P_2) w es de la forma w=$a(ba)^k b = ab(ab)^k$, $k \geq 0$

2 $L(M) \subseteq L(r)$

Comencemos con la demostración de que toda tira aceptada por el autómata pertenece al lenguaje $L(r)$. Esta prueba la haremos por inducción sobre los pasos necesarios (por el AFD M) para reconocer la tira w, que le llamaremos $\tau(w)$. Para ello, primero nos definiremos 3 lenguajes:

- $L_0 = \{w \in \Sigma^* / q_0 = \hat{\delta}(q_0, w)\}$ [2] [3]
- $L_1 = \{w \in \Sigma^* / q_1 = \hat{\delta}(q_0, w)\}$
- $L_2 = \{w \in \Sigma^* / q_2 = \hat{\delta}(q_0, w)\}$

El lenguaje L_i contiene todas las tiras de Σ^* que, al reconocerlas en el AFD, finalizan en el estado q_i. Cabe destacar que las tiras que pertenezcan a L_1, por ser el correspondiente al estado final, serán las tiras válidas; o sea, $L_1 = L(M)$.[4]

Lo que queremos probar es que:

- $w \in L_0 \Rightarrow$ w cumple P_0
- $w \in L_1 \Rightarrow$ w cumple P_1
- $w \in L_2 \Rightarrow$ w cumple P_2

2.1 Enunciado

Paso base: Tomaremos tiras w tales que $\tau(w)$ sea lo más chico posible.

- **PB0**: Sea $w \in L_0$. Como $\tau(w) = 0 \Rightarrow w = \epsilon \Rightarrow w$ cumple P_0.
- **PB1**: Sea $w \in L_1$. Como $\tau(w) = 1 \Rightarrow w = a \Rightarrow w$ es de la forma $w = a(ba)^0 \Rightarrow w$ cumple P_1.
- **PB2**: Sea $w \in L_2$. Como $\tau(w) = 2 \Rightarrow w = ab \Rightarrow w$ es de la forma $w = a(ba)^0 b \Rightarrow w$ cumple P_2.

Hipótesis inductiva: Suponemos que, dado $h \in \mathbb{N} : \forall w' \in \Sigma^* \ \tau(w') \leq h$, se cumple:

- **HI0**: $w' \in L_0 \Rightarrow w'$ cumple P_0
- **HI1**: $w' \in L_1 \Rightarrow w'$ cumple P_1
- **HI2**: $w' \in L_2 \Rightarrow w'$ cumple P_2

Tesis inductiva: $\forall w \in \Sigma^* : \tau(w) = h + 1$, se cumple:

- **TI0**: $w \in L_0 \Rightarrow w$ cumple P_0
- **TI1**: $w \in L_1 \Rightarrow w$ cumple P_1
- **TI2**: $w \in L_2 \Rightarrow w$ cumple P_2

2.2 Demostración

La estrategia para probar la tesis inductiva será pensar en las transiciones del AFD, que va a ser la información desde la que partiremos. Si se está en un estado, entonces **se llegó desde otro estado** con alguna transición. La tira que había llegado al estado anterior será w' y la tira que está en el estado actual será w.

- **TI0**: $w \in L_0 \Rightarrow w = \epsilon \Rightarrow w$ cumple P_0
- **TI1**: En este caso, al estado q_1 podría llegarse desde el estado q_0 lo cual haría la prueba idéntica al PB1, o podría llegarse desde el estado q_2. Veamos ese caso.

  $w \in L_1 \Rightarrow \exists w' \in L_2 : w = w'a$. Como $\tau(w') = h$, por HI2, w' cumple P_2 y por tanto w' tiene la forma $w' = a(ba)^k b, k \geq 0 \Rightarrow w = w'a = a(ba)^k ba \Rightarrow$ por su forma, w cumple P_1 y $\tau(w) = \tau(w') + 1 = h + 1$
- **TI2**: $w \in L_2 \Rightarrow \exists w' \in L_1 : w = w'b$. Como $\tau(w') = h$, por HI1, w' cumple P_1 y por tanto w' tiene la forma $w' = a(ba)^k, k \geq 0 \Rightarrow w = w'b = a(ba)^k b \Rightarrow$ por su forma, w cumple P_2 y $\tau(w) = \tau(w') + 1 = h + 1$

Hemos probado entonces, por inducción completa, que toda tira aceptada por el autómata pertenece al lenguaje $L(r)$.

3 $L(r) \subseteq L(M)$

Ahora demostraremos que una tira $w \in L(r)$ es aceptada por el autómata M. Esta vez la inducción la haremos sobre el largo de tira. [5]

Entonces ahora lo que queremos probar es que:

- w cumple $P_0 \Rightarrow w \in L_0$
- w cumple $P_1 \Rightarrow w \in L_1$
- w cumple $P_2 \Rightarrow w \in L_2$

lo cual representa el recíproco de lo probado en la sección anterior.

3.1 Enunciado

Paso base: Tomaremos tiras w tales que $|w|$ sea lo más chico posible.

- **PB0**: Sea $w : w$ cumple P_0. Entonces $w = \epsilon \Rightarrow w \in L_0$.
- **PB1**: Sea $w : w$ cumple P_1. Entonces w es de la forma $w = a(ba)^k$ y como $|w| = 1 \Rightarrow w = a \Rightarrow$ por la definición de M, $w \in L_1$.
- **PB2**: Sea $w : w$ cumple P_2. Entonces w es de la forma $w = a(ba)^k b$ y como $|w| = 2 \Rightarrow w = ab \Rightarrow$ por la definición de M, $w \in L_2$.

Hipótesis inductiva: Suponemos que, dado $h \in \mathbb{N} : \forall w' \in \Sigma^* |w'| \leq h$, se cumple:

- **HI0**: w' cumple $P_0 \Rightarrow w' \in L_0$
- **HI1**: w' cumple $P_1 \Rightarrow w' \in L_1$
- **HI2**: w' cumple $P_2 \Rightarrow w' \in L_2$

Tesis inductiva: $\forall w \in \Sigma^* : |w| = h + 1$, se cumple:

- **TI0**: w cumple $P_0 \Rightarrow w \in L_0$
- **TI1**: w cumple $P_1 \Rightarrow w \in L_1$
- **TI2**: w cumple $P_2 \Rightarrow w \in L_2$

3.2 Demostración

Ahora la estrategia será pensar en la forma de las tiras, que está dada por las propiedades enunciadas y es la información desde la que partiremos. Veremos que si w' es un prefijo de w entonces, por la definición de la función δ del AFD dado, podremos saber a qué estado irá w.

- **TI0**: w cumple $P_0 \Rightarrow w = \epsilon \Rightarrow w \in L_0$.
- **TI1**: El caso en donde $w' = \epsilon$ sería idéntico al PB1. Veamos, entonces, el caso en que $w' \neq \epsilon$.
  w cumple $P_1 \Rightarrow w$ es de la forma $w = (ab)^{k+1}a \Rightarrow w = w'a$, donde w' cumple P_2. Como $|w'| = h$, por HI2, $w' \in L_2 \Rightarrow$ por definición de δ, $w = w'a \in L_1$ y $|w| = h + 1$
- **TI2**: w cumple $P_2 \Rightarrow w$ es de la forma $w = a(ba)^k b \Rightarrow w = w'b$, donde w' cumple P_1. Como $|w'| = h$, por HI1, $w' \in L_1 \Rightarrow$ por definición de δ, $w = w'b \in L_2$ y $|w| = h + 1$

Habiendo probado que $L(M) \subseteq L(r)$ y $L(r) \subseteq L(M)$, entonces probamos que $L(M) = L(r)$.

4 Notas

- [1] Las propiedades probadas en la demostración, que sirven para caracterizar el lenguaje en cuestión, surgen de la *observación*. Es decir, se intenta con esas propiedades pero se podría haber intentado con otras (resultando en una demostración satisfactoria o insatisfactoria).
- [2] Como estamos en un AFD, nuestra función δ tendrá como salida un único estado. Si estuvieramos en el escenario de un AFND, esta salida sería un conjunto, por tanto la expresión correcta sería: $L_0 = \{w \in \Sigma^*/q_0 \in \hat{\delta}(q_0, w)\}$. Es decir, usaríamos la pertenencia, en lugar de la igualdad. La misma aclaración corre para L_1 y L_2.
- [3] $\hat{\delta}$ parte desde el estado q_0 por ser el inicial. Si el estado inicial fuese otro, por ejemplo q_x, se indicaría $\hat{\delta}(q_x, w)$. Lo mismo para L_1 y L_2.
- [4] Si estuvieramos en otro escenario en el que, por ejemplo, tuvieramos a q_x y q_y como estados finales, las tiras válidas serían aquellas w: $w \in L_x \cup L_y$.
- [5] Para este caso, un AFD, el largo de tira ($|w|$) coincide con los pasos para reconocerla ($\tau(w)$). Sin embargo, esto en los AFND-ϵ no siempre se cumple.
- En este ejemplo la función δ del AFD no es total, por tanto no hay necesidad de considerar esos casos en la demostración (como por ejemplo $\delta(q_0, b)$).