Señales y Sistemas

Práctico 0

Introducción a las Señales y Sistemas

2019

Cada ejercicio comienza con un símbolo indicando su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ✦ básico, ★ medio, ✷ avanzado, y ✹ desafiante. Además puede tener un número, como (1.21) que indica el número de ejercicio del libro del curso, *Señales y Sistemas*, Oppenheim/Willsky, 2nd.edition.

Exponenciales complejas

✦ Ejercicio 1 (1.2)

Expresar cada uno de los siguientes números complejos en forma polar ($re^{j\theta}$, con $-\pi < \theta \leq \pi$), y representarlo en el plano complejo:

(a) -2

(b) $-j3$

(c) $\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$

(d) $1 + j$

(e) $(1 - j)^2$

(f) $j(1 - j)$

(g) $\frac{(1+j)}{(1-j)}$

✦ Ejercicio 2 (1.51)

Usar la relación de Euler para obtener las siguientes relaciones:

(a) $\cos(\theta) = \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta})$

(b) $\sin(\theta) = \frac{1}{j2}(e^{j\theta} - e^{-j\theta})$

(c) $\cos(\theta)^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\theta))$

(d) $\sin(\theta)\sin(\phi) = \frac{1}{2}(\cos(\theta - \phi) - \cos(\theta + \phi))$

(e) $\sin(\theta + \phi) = \sin(\theta)\cos(\phi) + \cos(\theta)\sin(\phi)$

Periodicidad

✦ Ejercicio 3 (1.9, 1.25, 1.26)

Determinar si cada una de las siguientes señales es o no periódica. Si una señal es periódica, especificar su período fundamental:

(a) $x(t) = je^{j10t}$

(b) $x(t) = e^{(-1+j)t}$

(c) $x[n] = e^{j7\pi n}$

(d) $x[n] = 3e^{j3\pi(n+1/2)/5}$

(e) $x(t) = 3\cos(4t + \frac{\pi}{3})$

(f) $x(t) = [\cos(2t - \frac{\pi}{3})]^2$

(g) $x[n] = \sin(\frac{6\pi}{7}n + 1)$

(h) $x[n] = \cos(\frac{\pi}{2}n)\cos(\frac{\pi}{4}n)$

⋆ Ejercicio 4 (1.32)

Sea $x(t)$ una señal de tiempo continuo, y sean $y_1(t) = x(2t)$ y $y_2(t) = x(t/2)$. La señal $y_1(t)$ representa una versión más rápida de $x(t)$ en el sentido de que la duración de la señal disminuye a la mitad. De manera similar, $y_2(t)$ representa una versión más lenta de $x(t)$ en el sentido de que la duración de la señal se ha duplicado. Considerar las siguientes afirmaciones:

(a) Si $x(t)$ es periódica, entonces $y_1(t)$ es periódica.

(b) Si $y_1(t)$ es periódica, entonces $x(t)$ es periódica.

(c) Si $x(t)$ es periódica, entonces $y_2(t)$ es periódica.

(d) Si $y_2(t)$ es periódica, entonces $x(t)$ es periódica.

Para cada afirmación, determinar si es verdadera, y si lo es, determinar la relación entre los períodos fundamentales de las dos señales consideradas en el enunciado. Si no es verdadera, plantear un contraejemplo de ella.

⋆ Ejercicio 5 (1.33)

Sea $x[n]$ una señal de tiempo discreto, y sean

$$y_1[n] = x[2n] \text{ y } y_2[n] = \begin{cases} x[n/2] & n \text{ par} \\ 0 & n \text{ impar} \end{cases} .$$

Las señales $y_1[n]$ y $y_2[n]$ representan respectivamente en algún sentido las versiones rápida y lenta de $x[n]$. Sin embargo, se debe notar que las nociones de tiempo discreto de rapidez y lentitud tienen sutiles diferencias con respecto a sus contrapartes de tiempo continuo. Considerar las siguientes afirmaciones:

(a) Si $x[n]$ es periódica, entonces $y_1[n]$ es periódica.

(b) Si $y_1[n]$ es periódica, entonces $x[n]$ es periódica.

(c) Si $x[n]$ es periódica, entonces $y_2[n]$ es periódica.

(d) Si $y_2[n]$ es periódica, entonces $x[n]$ es periódica.

Para cada afirmación, determinar si es verdadera, y si lo es, determinar la relación entre los períodos fundamentales de las dos señales consideradas en el enunciado. Si no es verdadera, plantear un contraejemplo de ella.

⋆ Ejercicio 6 (3.54)

(a) Demostrar el siguiente resultado:

$$x[k] = \int_T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt = \begin{cases} T, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

donde $\omega_0 = 2\pi/T$. Interpretar este resultado como un fasor girando en el plano complejo.

Considerar la función

$$a[k] = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)kn}$$

(b) Demostrar que $a[k] = N$ para $k = 0, \pm N, \pm 2N, \pm 3N, ...$

(c) Demostrar que $a[k] = 0$ siempre que k no sea un múltiplo entero de N. (Sugerencia: usar la fórmula de suma finita.)

Sumatorias

⋆ Ejercicio 7 (1.54)

(a) Probar la validez de las siguientes expresiones:

$$\sum_{n=a}^{b} \alpha^n = \begin{cases} b+1-a & \alpha = 1 \\ \alpha^a \frac{1-\alpha^{b+1-a}}{1-\alpha} & \text{para cualquier complejo } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

Donde $a \leq b$. A menudo a esto se le llama la *fórmula de suma finita.*

(b) Demostrar que si $|\alpha| < 1$, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}$$

(c) Evaluar

$$\sum_{n=k}^{\infty} \alpha^n,$$

suponiendo que $|\alpha| < 1$.

✦ Ejercicio 8 (1.55)

Usar los resultados del problema anterior para evaluar cada una de las siguientes sumas y expresar su respuesta en forma cartesiana:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{j\pi n/2}$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos(\frac{\pi}{2}n)$

Solución

Ejercicio 1

(a) $2e^{j\pi}$

(b) $3e^{-j\pi/2}$

(c) $e^{-j\pi/3}$

(d) $\sqrt{2}e^{j\pi/4}$

(e) $2e^{-j\pi/2}$

(f) $\sqrt{2}e^{j\pi/4}$

(g) $e^{j\pi/2}$

Ejercicio 2

(a) Se tiene las siguiente expresiones:

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$$

y

$$e^{-j\theta} = \cos(\theta) - j\sin(\theta)$$

Sumando ambas expresiones se obtiene

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2}\left(e^{j\theta} + e^{-j\theta}\right)$$

(b) Con las expresiones anteriores, si se resta la segunda a la primera, se obtiene:

$$\sin(\theta) = \frac{1}{j2}\left(e^{j\theta} - e^{-j\theta}\right)$$

(c) Se tiene $e^{j(\theta+\phi)} = e^{j\theta}e^{j\phi}$. Entonces

$$\cos(\theta+\phi)+j\sin(\theta+\phi) = (\cos(\theta)\cos(\phi)-\sin(\theta)\sin(\phi))+j(\sin(\theta)\cos(\phi)+\cos(\theta)\sin(\phi))$$

Poniendo $\theta = \phi$ se tiene

$$\cos(2\theta) = \cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2$$

Poniendo $\theta = -\phi$ se tiene

$$1 = \cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2$$

Sumando las dos expreciones y simplificando:

$$cos(\theta)^2 = \frac{1}{2}(1 + cos(2\theta))$$

(d) Evaluando la parte real de $\cos(\theta+\phi)+j\sin(\theta+\phi)$, con los argumentos $\theta+\phi$ y $\theta-\phi$ se obtiene:

$$\cos(\theta+\phi)=\cos(\theta)\cos(\phi)-\sin(\theta)\sin(\phi)$$

y

$$\cos(\theta-\phi)=\cos(\theta)\cos(\phi)+\sin(\theta)\sin(\phi)$$

Restando la primer expresión a la segunda, se tiene:

$$\sin\theta\sin\phi=\frac{1}{2}(cos(\theta-\phi)-\cos(\theta+\phi))$$

(e) Mirando el desarrollo de la parte imaginaria de $\cos(\theta+\phi)+j\sin(\theta+\phi)$ en la parte c), se ve que:

$$\sin(\theta+\phi)=(\sin(\theta)\cos(\phi)+\cos(\theta)\sin(\phi))$$

Ejercicio 3

(a) $x(t)$ es una exponencial compleja periódica.

$$x(t)=je^{j10t}=e^{j(10t+\frac{\pi}{2})}$$

El período fundamental de $x_1(t)$ es $\frac{2\pi}{10}=\frac{\pi}{5}$.

(b) $x(t)$ es una exponencial compleja multiplicada por una exponencial decreciente.

$$x(t)=e^{(-1+j)t}=e^{-t}e^{jt}$$

por lo tanto no es periódica.

(c) $x[n]$ es una señal periódica.

$$x[n]=e^{j7\pi n}=e^{j\pi n}$$

$x[n]$ es exponencial compleja con un período fundamental $\frac{2\pi}{\pi}=2$.

(d) $x[n]$ es una señal periódica. El periódo fundamental está dado por $N=m(\frac{10}{3})$. Eligiendo $m=3$, se tiene que el período fundamental es 10.

(e) periódica de período $2\pi/4=\pi/2$

(f) $x(t)=[\cos(2t-\frac{\pi}{3})]^2=[1+\cos(4t-2\pi/3)]/2$. Es periódica de período $\frac{\pi}{2}$

(g) Periódica de período $N=7$

(h) $x[n]=\cos(\frac{\pi}{2}n)\cos(\frac{\pi}{4}n)=(1/2)[\cos(3\pi n/4)+\cos(\pi n/4)]$. Periódica de período $N=8$.

Ejercicio 4

(a) Verdadero. Si $x(t)$ es periódica de período T; $y_1(t)$ es periódica de período $T/2$.

(b) Verdadero. Si $y_1(t)$ es periódica de período T; $x(t)$ es periódica de período $2T$.

(c) Verdadero. Si $x(t)$ es periódica de período T; $y_2(t)$ es periódica de período $2T$.

(d) Verdadero. Si $y_2(t)$ es periódica de período T; $x(t)$ es periódica de período $T/2$.

Ejercicio 5

(a) Verdadero. Si $x[n]$ es periódica de período N; $y(n)$ es periódica de período N_0, donde

$$N_0 = \begin{cases} N/2 & \text{si } N \text{ es par} \\ N & \text{si } N \text{ es impar} \end{cases}$$

.

(b) Falso. Que $y_1[n]$ sea periódica no implica que $x[n]$ sea periódica. Por ejemplo $x[n] = g[n] + h[n]$ donde

$$g[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

y

$$h[n] = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ (1/2)^n & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

. Entonces $y_1[n] = x[2n]$ es periódica pero $x[n]$ claramente no es periódica.

(c) Verdadero. Si $x[n]$ es periódica de período N; $y_2(n)$ es periódica de período $2N$

(d) Verdadero. Si $y_2[n]$ es periódica de período N; $x(n)$ es periódica de período $N/2$

Ejercicio 6

(a) Cuando $n = k$:

$$x[n] = \int_T e^{j0\omega_0 t} dt = \int_T 1 dt = T$$

Cuando $k \neq n$ se cumple que $(k - n) = m$ con m entero.

$$x[k] = \int_T e^{j(m)\omega_0 t} dt = \int_T \cos(m\omega_0 t) + j \sin(m\omega_0 t) dt$$

Estas dos sinusoidales son periódicas de período $T/|m|$. Al integrar entre 0 y T estamos integrando sobre un numero entero de períodos de estas sinusoides. Puesto que la integral puede ser vista como la cuantificación del área total bajo las funciones sobre el intervalo, $\int_T \cos(m\omega_0 t) = \int_T \sin(m\omega_0 t) = 0$.

(b) Dado $k = pN$ con p perteneciente a los enteros. Entonces

$$a[pN] = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)pNn} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi pn} = \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N$$

(c) Usando la formula de suma finita, se tiene:

$$a[k] = \frac{1 - e^{j2\pi k}}{1 - e^{j(2\pi/N)k}} = 0, \quad \text{si } k \neq pN$$

Ejercicio 7

(a) Para $\alpha = 1$, la cuenta es sencilla

$$\sum_{n=a}^{b} \alpha^n = b + 1 - a.$$

Para $\alpha \neq 1$ podemos escribir

$$(1-\alpha)\sum_{a}^{b} \alpha^n = \sum_{a}^{b} \alpha^n - \sum_{a}^{b} \alpha^{n+1} = \alpha^a - \alpha^{b+1}$$

Entonces

$$\sum_{a}^{b} = \alpha^a \frac{1 - \alpha^{b+1-a}}{1-\alpha}.$$

(b) Para $|\alpha| < 1$,

$$\lim_{N\to\infty} \alpha^N = 0.$$

Entonces, a partir del resultado de la parte anterior,

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Derivando de ambos lados

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n\right) = \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^{n-1} = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$$

(c)

$$\sum_{n=k}^{\infty} \alpha^n = \alpha^k \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{\alpha^k}{1-\alpha} \text{ para } |\alpha| < 1$$

Ejercicio 8

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{j\pi n/2} = \frac{1}{1-(1/2)e^{j\pi/2}} = \frac{4}{5} + j\frac{2}{5}$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos(\frac{\pi}{2}n) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(1/2)^n e^{j\pi n/2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(1/2)^n e^{-j\pi n/2} = = \frac{4}{10} + j\frac{2}{10} + \frac{4}{10} - j\frac{2}{10} = \frac{4}{5}$