

casos estructurales, distintos a los previstos inicialmente, tenía una justificación que, ahora, con el impresionante avance llevado a cabo en el ámbito del cálculo de estructuras, no existe. Sin embargo, constituye una alternativa de cálculo interesante y económica, en las situaciones concretas en las que el tablero del puente puede analizarse como losa ortótropa recta simplemente apoyada. En otros casos, existen procedimientos de cálculo, más elaborados que se describen en los siguientes capítulos.

#### REFERENCIAS

- BARÉS, R., y MASSONNET, C.: «Le Calcul des grillages de poutres et dalles orthotropes». Dunod. París (1966).
- CUSSENS, A. R., y PAMA, R. P.: «Bridge Deck Analysis». John Wiley and Sons. Londres (1975).
- CUSSENS, A. R., y PAMA, R. P.: «Distribution of concentrated loads on orthotropic bridge decks». Structural Engineer 47, 9. Septiembre (1969).
- GUYON, Y.: «Calcul des ponts larges à poutres multiples solidarisées par les entretoises». Annales de Ponts et Chaussées, 24 (1946).
- INGLIS, C. E.: «The determination of critical speeds, natural frequencies and modes of vibration by means of basic functions». Trans. of the North East Coast. Institution of Engineers and Ship builders. Vol. 61 (1944).
- MASSONNET, C.: «Méthode de calcul des ponts à poutres multiples tenant compte de leur résistance à la torsion». Publications, International Association for Bridge and Structural Engineering, 10 (1950).
- ROWE, R. E.: «Concrete Bridge Design». C. R. Books Ltd. Londres (1962).
- MORICE, P. B.; LITTLE, G., y ROWE, R. E.: «Design curves for the effects of concentrated loads on concrete bridge decks». Publication DB, 11a. Cement and Concrete Association (1956).
- SAMARTÍN, A.: «Placa ortótropa rectangular». Revista de Obras Públicas. Junio, 1967.
- SAMARTÍN, A., y MARTÍNEZ, J.: «Reparto transversal de la sobrecarga en tableros de puentes». Hormigón y Acero, núm. 113 (1974).

# 6

## Determinación de las constantes de ortotropía de un tablero real

### 6.1. Introducción

El método de Guyon-Massonnet-Rowe (GMR) así como la extensión llevada a cabo por Cussens y Pama (método CP), que han sido expuestos en el capítulo anterior presentan la siguiente característica común: una idealización del tablero en una estructura bidimensional denominada placa ortótropa. Esta será descrita en detalle en el siguiente capítulo. Este hecho implica que, en términos estrictos, una placa de éstas características permite simular únicamente el comportamiento de tableros cuyo plano medio coincide con el plano de simetría de la sección transversal. En la práctica esta situación no es frecuente, por lo que se hace preciso introducir, una serie de simplificaciones e hipótesis en el proceso de conversión o modelización del tablero real en una estructura placa ortótropa. En este capítulo se comentan algunos criterios y técnicas utilizados frecuentemente en la aplicación práctica del método. En primer lugar se expone la teoría general de la aproximación utilizada y a continuación se considera la problemática específica que aparece en algunos tipos de sección transversal del tablero (losa maciza, alveolar, forjado y vigas, etc.)

### 6.2. Teoría general

Como se indicó en el capítulo anterior con relación al método de Guyon-Massonnet-Rowe, el tablero se asimilaba a un emparrillado continuo de vigas ortogonales de características elasto-mecánicas (inercias a flexión y torsión) constantes por unidad de longitud (Fig. 6.1). Las condiciones de equilibrio de este emparrillado se planteaban en cada nudo, conduciendo a tres ecuaciones estáticas que relacionaban los momentos longitudinales —de flexión  $M_x$  y torsión  $M_{xy}$ — y los momentos transversales —de flexión  $M_y$  y torsión  $M_{yx}$ —, con los esfuerzos cortantes longitudinales  $Q_x$  y transversales  $Q_y$ . De un modo semejante en cada barra elemental del emparrillado se consideraban las relaciones de compatibilidad y constitutivas que enlazaban los esfuerzos en los extremos (nudos) de la barra — $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$  y  $M_{yx}$ — con las correspondientes curvaturas

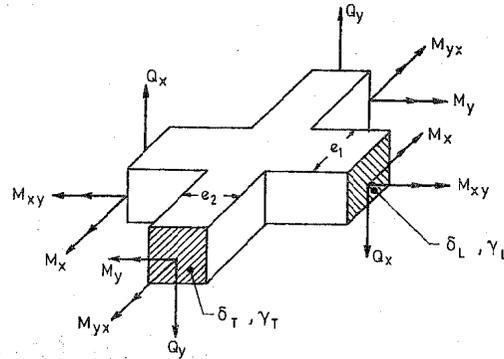


Figura 6.1. Emparrillado continuo.

de flexión,  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$  y de torsión,  $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$  mediante las rigideces unitarias de flexión —longitudinal  $\rho_L$  y transversal  $\rho_T$ — y las rigideces unitarias de torsión —longitudinal  $\gamma_L$  y transversal  $\gamma_T$ —. De esta forma se llegaba a la ecuación diferencial general del emparrillado continuo siguiente (en donde se supone el coeficiente de Poisson nulo):

$$\rho_L \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + (\gamma_L + \gamma_T) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \rho_T \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y)$$

Esta ecuación suele escribirse para el caso general de losa ortótropa en la siguiente forma:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y)$$

siendo:

$$\begin{aligned} D_x &= \rho_L \\ D_y &= \rho_T \\ 2H &= \gamma_L + \gamma_T \end{aligned}$$

Si los coeficientes de Poisson, transversal y longitudinal  $\nu_2$  y  $\nu_1$ , son distintos de cero, la expresión de  $2H$  se convierte en la que sigue:

$$2H = \nu_2 \rho_L + \nu_1 \rho_T + \gamma_L + \gamma_T = D_1 + D_2 + \gamma_L + \gamma_T$$

Los valores  $D_1 = \nu_2 \rho_L$  y  $D_2 = \nu_1 \rho_T$  se suelen denominar rigideces de acoplamiento.

La carga distribuida por unidad de área y normal a la superficie media de la placa se designa por  $p(x, y)$ .

Evidentemente las ecuaciones anteriores sólo son válidas únicamente en el supuesto de que los centros de gravedad de las vigas del emparrillado continuo se encuentren en un plano único correspondiente al plano medio de la losa equivalente (\*) (Fig. 6.2 a). Por otra parte, la continuidad del emparrillado exige la existencia de un número elevado de vigas longitudinales (principales) y transversales (traviesas) si se desea que todos los nudos del emparrillado sean idénticos. Con estas hipótesis resulta la ecuación diferencial de cuarto orden en derivadas parciales en la flecha vertical ( $w$ ), que se representa por la expresión (5.5). Sin embargo, en la práctica no existen normalmente más que vigas principales y traviesas dispuestas en forma disimétrica respecto al plano medio de la losa (Fig. 6.2b). Sería posible deducir una ecuación diferencial que rigiese el comportamiento de esta forma real del tablero, que ahora implicaría la consideración de los trabajos a flexión y también a extensión de las placas y vigas que constituyen el tablero. En este caso la ecuación diferencial resultante sería en los desplazamientos horizontales ( $u$  y  $v$ ) y normal a la placa ortótropa ( $w$ ). Los dos primeros desplazamientos pueden expresarse en función del transversal  $w$ , llegando así a una ecuación diferencial en derivadas parciales de octavo orden del movimiento vertical  $w$ . Los detalles del cálculo pueden verse en Barés (1960). Se comprende, por lo tanto, que no es posible encontrar en general una placa ortótropa, con las hipótesis del método de Guyon-Massonnet-Rowe, que sea equivalente exactamente, es decir, que simule adecuadamente, la placa ortótropa con nervios disimétricos. Sin embargo, se pueden encontrar para un caso particular unas rigideces ficticias ( $\rho_L^0, \gamma_L^0, \rho_T^0$  y  $\gamma_T^0$ ) obtenidas a partir de las rigideces reales de un tablero con vigas disimétricas ( $\rho_L, \gamma_L, \rho_T$  y  $\gamma_T$ ) que conduzcan mediante el método de distribución GMR o CP, a resultados suficientemente aproximados a los reales deducidos éstos a partir del cálculo exacto, que se acaba de comentar, como tablero con vigas disimétricas.

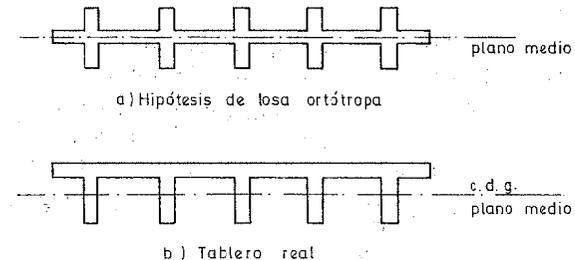


Figura 6.2. Idealización de la losa ortótropa.

Massonnet (1959), ha mostrado un método aproximado para determinar la influencia de la asimetría de las vigas principales y las traviesas

(\*) Esta hipótesis se satisface, por ejemplo, en el caso de sección cajón simétrico con relación al eje horizontal, es decir, los forjados superior e inferior tienen espesor idéntico.

mediante la utilización del principio del mínimo de la energía de deformación. Para ello supone que los movimientos horizontales de la placa,  $u$  y  $v$ , pueden ponerse en función de la flecha normal,  $w$ , en la siguiente forma:

$$u = a_L \frac{\partial w}{\partial x}; \quad v = a_T \frac{\partial w}{\partial y} \quad (6.1)$$

y mediante el principio citado de energía mínima de deformación se deduce la ecuación diferencial de la losa ortótropa equivalente:

$$\rho_L^\circ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H^\circ \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \rho_T^\circ \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y) \quad (6.2)$$

en donde las características ficticias de esta losa son:

$$\begin{aligned} \rho_L^\circ &= \rho_L + (e_L - a_L)^2 E f_L \\ \rho_T^\circ &= \rho_T + (e_T - a_T)^2 E f_T \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} H^\circ &= \rho + \frac{\bar{\gamma}_L + \bar{\gamma}_T}{2} + \frac{Eh}{4(1-\nu)} (a_L + a_T)^2 + \nu \frac{Eh}{1-\nu^2} a_L a_T = \\ &= \frac{\gamma_L + \gamma_T}{2} + \frac{Eh}{4(1-\nu)} (a_L + a_T)^2 + \nu \frac{Eh}{1-\nu^2} a_L a_T \end{aligned}$$

En las anteriores expresiones se ha introducido la siguiente notación (Fig. 6.3):

$$\rho = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \text{ es la rigidez unitaria de la placa del forjado.}$$

$\bar{\gamma}_L$  y  $\bar{\gamma}_T$  son las rigideces respectivas a torsión de las vigas principales y traviesas (sin considerar la placa del forjado).

$e_L$  y  $e_T$  son las excentricidades (distancias del centro de gravedad de la sección completa al plano medio de la losa).

$f_L$  y  $f_T$  son las áreas respectivas de la sección longitudinal y transversal del tablero con relación a la unidad de longitud (ancho o largo según el caso), es decir se tiene que:

$f_L (f_T)$  es la superficie de la viga principal (traviesa) aislada reducida a la unidad de longitud ancho (luz) más la superficie de un metro de losa de forjado dividida por  $1-\nu^2$ .

Las constantes  $a_L$  y  $a_T$  han sido definidas por (6.1) y su determinación exige resolver el sistema siguiente de ecuaciones que depende de la deformada  $w = w(x, y)$  de la placa:

$$\left[ E f_L \alpha_{20} + \frac{Eh}{2(1+\nu)} \alpha_{11} \right] a_L + \frac{Eh}{2(1-\nu)} \alpha_{11} a_T = e_L f_L E \alpha_{20}$$

$$\frac{Eh}{2(1-\nu)} a_L + \left[ E f_T \alpha_{02} + \frac{Eh}{2(1+\nu)} \alpha_{11} \right] a_T = e_T f_T E \alpha_{02} \quad (6.4)$$

con

$$\alpha_{20} = \iint \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx dy, \quad \alpha_{02} = \iint \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 dx dy \quad \text{y} \quad \alpha_{11} = \iint \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy$$

Unos valores aproximados de estas constantes pueden ser obtenidos mediante aproximaciones sucesivas. Barés y Massonnet (1966) deducen el siguiente procedimiento de cálculo aproximado:

Los valores de las constantes  $a_L$  y  $a_T$  se calculan directamente mediante el sistema de ecuaciones que se indica a continuación.

$$\begin{aligned} \left[ (3-2\alpha^\circ) + \frac{h\beta^\circ}{2(1+\nu)f_L} \right] a_L + \frac{h\beta^\circ}{2(1-\nu)f_L} a_T &= e_L (3-2\alpha^\circ) \\ \frac{h}{2\beta^\circ(1-\nu)f_T} a_L + \left[ 1 + \frac{h}{2\beta^\circ(1+\nu)f_T} \right] a_T &= e_T \end{aligned} \quad (6.5)$$

con:

$$\alpha^\circ = \frac{H^\circ}{\sqrt{\rho_L^\circ \rho_T^\circ}} \quad \text{y} \quad \beta^\circ = \sqrt{\frac{\rho_L^\circ}{\rho_T^\circ}}$$

Con los valores de  $a_L$  y  $a_T$  se pueden determinar los valores de  $\rho_L^\circ$ ,  $\rho_T^\circ$  y  $H^\circ$  de la losa ortótropa ficticia, mediante las ecuaciones (6.3). La resolu-

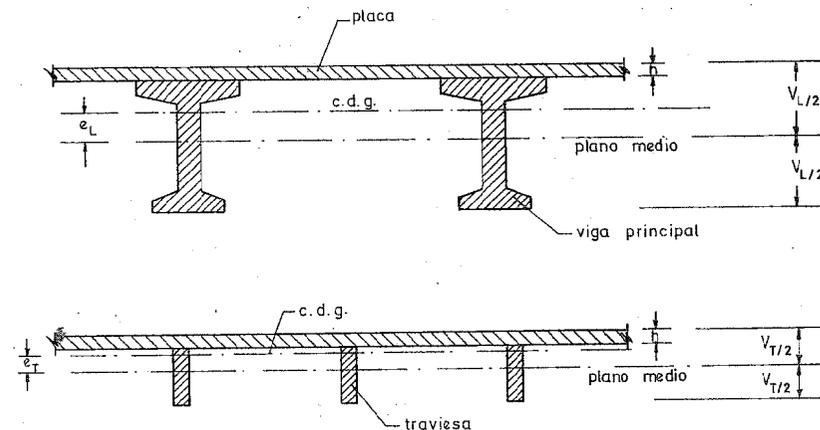


Figura 6.3. Tablero con vigas disimétricas.

ción del sistema anterior (6.5) exige el conocimiento de las constantes  $\alpha^c$  y  $\beta^c$  que son función de los valores anteriores, por lo que se hace preciso un método iterativo de cálculo, comenzando con unos valores iniciales para  $a_L$  y  $a_T$  nulos.

Una vez deducidos los valores de las constantes ficticias de ortotropía se aplica el método de GMR o CP según el procedimiento usual, es decir, se deducen los parámetros de entrecruzamiento  $\theta$  y de torsión  $\alpha$  definidos a partir de las igualdades siguientes:

$$\theta = \frac{b}{2a} \sqrt{\frac{\rho_L^c}{\rho_T^c}} \quad \text{y} \quad \alpha = \frac{H}{\sqrt{\rho_L \rho_T}}$$

Con estos valores de  $\theta$  y  $\alpha$  se entra en los ábacos correspondientes específicos de cada método y se pueden obtener los coeficientes relativos a las flechas, los momentos flectores, etc. Por otra parte, la disimetría de las vigas modifica no sólo las rigideces de la losa, sino la distribución de esfuerzos en la misma. Se pueden deducir las siguientes expresiones de éstos a partir de las ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{aligned} N_x &= E f_L (a_L - e_L) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{Eh}{1-\nu^2} a_T \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ N_y &= E f_T (a_T - e_T) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{Eh}{1-\nu^2} a_L \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ Q_{xy} &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} (a_L + a_T) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ M_x &= -[\rho_L + (e_L^2 - e_L a_L) E f_L] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \nu \rho \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ M_y &= -[\rho_T + (e_T^2 - e_T a_T) E f_T] \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \nu \rho \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ M_{xy} &= [(1-\nu)\rho + \bar{\gamma}_L] \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ M_{yx} &= -[(1-\nu)\rho + \bar{\gamma}_T] \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ Q_x &= -[\rho_L + (e_L^2 - e_L a_L) E f_L] \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (\rho + \bar{\gamma}_T) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \\ Q_y &= -[\rho_T + (e_T^2 - e_T a_T) E f_T] \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - (\rho + \bar{\gamma}_L) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \end{aligned} \quad (6.6)$$

A veces estos esfuerzos pueden deducirse directamente de los coeficientes de las tablas de los métodos de GMR o CP, mediante multiplicación por coeficientes apropiados. Por ejemplo, el momento flector  $M_x$  para  $\nu=0$ , se deduce del obtenido normalmente a partir de los ábacos o tablas introduciendo el factor de corrección.

Como se verá en el capítulo siguiente es posible determinar directamente la flecha  $w=w(x, y)$  que satisface a la ecuación diferencial de la losa ortótropa y de ahí la resolución de la misma obteniéndose todos los esfuerzos en cualquier sección mediante la aplicación de las fórmulas pertinentes. Estas pueden ser extendidas con objeto de captar la situación de tableros con vigas asimétricas, es decir, aplicar directamente las fórmulas (6.6). En este caso las constantes de ortotropía  $D_x, D_y, D_{xy}, D_{yx}, D_1, D_2$  y  $2H=D_1+D_2+D_{xy}+D_{yx}$ , se deducen inmediatamente de las expresiones (6.3) y (6.6) por simple comparación.

### 6.3. Relación entre el ancho real y de cálculo del tablero

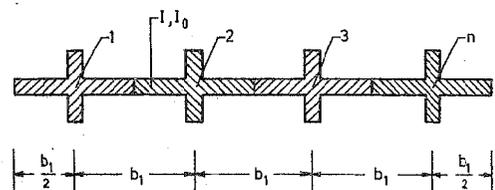
Como se ha estudiado en el capítulo 5, los valores de las rigideces unitarias de flexión y torsión en los dos sentidos longitudinal y transversal son (Fig. 5.3):

$$\begin{aligned} \rho_L &= \frac{EI}{b_1} = Ei & \gamma_L &= \frac{GI_0}{b_1} = Gi_0 \\ \rho_T &= \frac{EJ}{a_1} = Ej & \gamma_T &= \frac{GJ_0}{a_1} = Gj_0 \end{aligned} \quad (6.7)$$

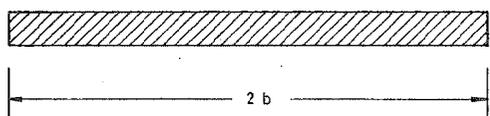
Estas fórmulas implican que en el proceso de sustitución de la estructura real del tablero por una losa ortótropa equivalente, las rigideces de las vigas reales longitudinales y transversales deben de distribuirse uniformemente de un modo que depende de su separación real. Ejemplos de esta distribución se muestran en la figura 6.4. En ella se supone inicialmente que no existe disimetría de las vigas, además todas tienen la misma rigidez y se encuentran separadas entre sí distancias iguales. Si el voladizo de la viga extrema es igual a la semiseparación, el tablero puede ser simulado en la losa ortótropa que se indica en la figura 6.4 b, en donde se observa que el ancho de cálculo ( $2b$ ) del tablero coincide con su ancho real. En otros casos distintos al teórico anterior, el ancho de cálculo ( $2b$ ) del tablero se deduce según la fórmula dada por Rowe (1962) que se plantea en la figura 6.4d, y que expresa el hecho de la igualdad de la rigidez a flexión total del tablero y de la losa ortótropa. En esta última situación, los anchos de cálculo y efectivo son diferentes y las vigas (o las cargas) deben de situarse a las distancias correspondientes al ancho de cálculo y no al ancho real. Así, si  $x_i$  es la distancia real del eje del tablero a una viga (o carga) su posición se referirá al ancho real  $2b'$ , o sea,  $\left(\frac{x_i}{b'}\right) b$ , situándose por lo tanto de un modo acorde entre las nueve posi-

ciones standard  $\pm b, \pm \frac{3}{4}b, \pm \frac{1}{2}b, \pm \frac{1}{4}b, 0$ , de los métodos de GMR y CP.

Si en el tablero real existieran vigas disimétricas —como es usual— las consideraciones anteriores seguirían siendo válidas, debiéndose proceder sin embargo, a la deducción posterior de las rigideces ficticias de la losa ortótropa equivalente más aproximada, de acuerdo con las directrices expuestas en el apartado 6.2 anterior.



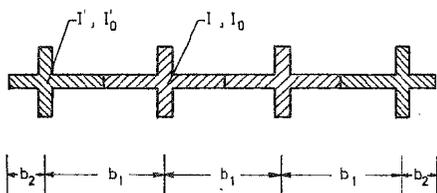
a) Modelo de losa real



b) Losa ortótropa

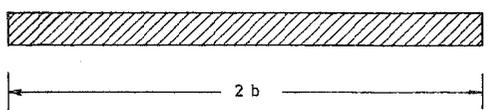
$$i = \frac{I}{b_1}, i_0 = \frac{I_0}{b_1}$$

$$2b = nb_1$$



c) Modelo de losa real

$$b_2 \neq \frac{b_1}{2}$$



d) Losa ortótropa

$$i = \frac{I}{b_1}, i_0 = \frac{I_0}{b_1}$$

$$2b = (n-2)b_1 + 2b_1 \frac{I'}{I}$$

Figura 6.4. Relaciones entre los anchos reales y de cálculo.

6.4. Rigideces a flexión

Las rigideces a flexión  $\rho_L$  y  $\rho_T$  se deducen según las fórmulas (6.7). Sin embargo, en ellas no se tiene en cuenta la influencia del coeficiente de Poisson, que se manifiesta en la zona de la losa formada por el forjado que se supone de espesor constante  $h$ . Entonces se deduce para las rigideces a flexión las siguientes expresiones:

$$\rho_L = \bar{\rho}_L + \frac{\rho_F}{1-\nu^2} \quad \rho_T = \bar{\rho}_T + \frac{\rho_F}{1-\nu^2} \quad (6.8)$$

siendo  $\bar{\rho}_L$  y  $\bar{\rho}_T$  las rigideces a flexión de las vigas principales (longitudina-

les) y traviesas (transversales) de la losa sin considerar el forjado y  $\rho_F$  la rigidez a flexión del forjado común, todas ellas referidas al eje neutro que pasa por el centro de gravedad de la sección total. El valor del coeficiente de Poisson  $\nu$  debe adoptarse  $\nu=0,20$  para el hormigón y  $\nu=0,15$  para el acero. El cálculo de las inercias de flexión puede llevarse a cabo según los procedimientos que se exponen en el apéndice A. En el caso de vigas en T, se debe considerar como ancho efectivo del forjado (ala), que colabora con el alma en la flexión, a la distancia entre ejes de vigas (longitudinales o traviesas) pero no al ancho efectivo que indican las normas usuales.

En el caso de vigas disimétricas se puede tener en cuenta aproximadamente su influencia en el cálculo mediante las fórmulas deducidas en el apartado 6.2, es decir, las rigideces ficticias de flexión son:

$$\rho_L^0 = \rho_L + (e_L - a_d)^2 E_L f_L$$

$$\rho_T^0 = \rho_T + (e_T - a_d)^2 E_T f_T \quad (6.9)$$

con  $E_L$  y  $E_T$  los módulos de elasticidad longitudinal y transversal. Los restantes símbolos han sido definidos anteriormente.

6.5. Rigideces de torsión y acoplamiento

Las expresiones de las rigideces de torsión  $\gamma_L$  y  $\gamma_T$  y de acoplamiento  $D_1$  y  $D_2$  que se deben adoptar en una losa ortótropa de modo que represente del modo más adecuado posible el comportamiento de un tablero real, constituye un problema de difícil solución. Aquí se van a indicar algunos principios generales que deben observarse en su cálculo.

En primer lugar, se deduce en la determinación del coeficiente de la losa ortótropa  $2H$  —y por consiguiente del coeficiente de torsión  $\alpha$ — que si existe un forjado común de espesor  $h$ , módulo de elasticidad  $E$  y coeficiente de Poisson las rigideces de torsión son:

$$\gamma_L = \bar{\gamma}_L + (1-\nu)\rho_F \quad \gamma_T = \bar{\gamma}_T + (1-\nu)\rho_F \quad (6.11)$$

en donde,  $\bar{\gamma}_L$  y  $\bar{\gamma}_T$  son las rigideces unitarias a torsión de las vigas longitudinales (principales) y transversales (traviesas) aisladas sin considerar el forjado y  $\rho_F = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  es la constante del forjado.

En efecto, el coeficiente  $2H$  puede expresarse como sigue:

$$2H = \nu_2 \rho_L + \nu_1 \rho_T + \gamma_L + \gamma_T = D_1 + D_2 + \gamma_L + \gamma_T \quad (6.12)$$

en donde  $D_1$  y  $D_2$  sólo tienen sentido en la losa común del forjado, puesto que sólo en este elemento estructural existe acoplamiento tensional en las dos direcciones de la losa. Esto implica que debe adoptarse la mitad de su rigidez a torsión y por lo tanto se obtiene:

$$\gamma_L = \bar{\gamma}_L + \frac{1}{2} \frac{Gh^3}{3} = \bar{\gamma}_L + (1-\nu)\rho_F$$

y análogamente para:

$$\gamma_T = \bar{\gamma}_T + (1 - \nu)\rho_F$$

Por lo tanto, la expresión (6.12) se convierte en la siguiente:

$$2H = \nu\rho_F + \nu\rho_F + \bar{\gamma}_L + \bar{\gamma}_T + 2(1 - \nu)\rho_F = \bar{\gamma}_L + \bar{\gamma}_T + 2\rho_F$$

Por otra parte, el teorema de reciprocidad o de Betti exige que se cumpla la igualdad de las rigideces de acoplamiento, es decir,  $D_1 = D_2$ , o bien  $\nu_2\rho_L = \nu_1\rho_T$

En realidad  $\nu_1$  y  $\nu_2$  no son verdaderos coeficientes de Poisson del material y se deben considerar como coeficientes que representan la influencia de la tensión longitudinal (o transversal) en la deformación transversal (o longitudinal) debido a la ortotropía de la construcción del tablero, no del material. En efecto, la losa ortótropa corresponde a un modelo matemático ideal y teóricamente podría representar la losa construida con un material ortótropo, definido por las constantes  $D_x, D_y, D_{xy}, D_{yx}, D_1$  y  $D_2$  (ver capítulo siguiente). La ortotropía aparece en las construcciones reales como consecuencia de la distinta forma de las secciones transversales y longitudinales. Por ello, los valores de los coeficientes de Poisson definidos como  $\frac{D_1}{D_x}$  y  $\frac{D_2}{D_y}$  no deben ser interpretados en su sentido estricto.

La determinación de las rigideces a torsión de las secciones puede llevarse a cabo de acuerdo con las indicaciones del apéndice A. Por otra parte si las vigas son disimétricas se debe realizar la corrección expuesta en el apartado 6.2.

A continuación se estudian dos casos extremos de losa ortótropa. El primero correspondiente a una situación de losa maciza con interacción de toda la sección en las dos direcciones de ortotropía y el segundo caso, que considera un emparrillado o ensamblaje de vigas dispuestas ortogonalmente, con intersecciones monolíticas. Se supone en esta última situación para que la modelización en una estructura continua sea adecuada, que la separación entre vigas es pequeña en comparación con la longitud total (luz o ancho del tablero según el caso), así como que las vigas son iguales y equidistantes.

**6.6. Losa maciza**

Constituye este tipo de tablero un ejemplo de aplicación directa de la teoría de la losa ortótropa, que es por lo tanto totalmente válida.

Las características de la losa ortótropa, supuesto el material homogéneo e isotrópico de módulo elástico  $E$  y coeficiente de Poisson  $\nu$ , en este caso, son:

Rigideces de flexión:  $\rho_L = \rho_T = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} = D$ , con  $h$  el espesor de la losa.

Rigideces a torsión:  $\gamma_L = \gamma_T = \frac{1}{2} \frac{Gh^3}{3} = \frac{Eh^3}{12(1 + \nu)} = (1 - \nu)D$

Se comprueba que el coeficiente de torsión es:

$$2H = \nu\rho_L + \nu\rho_T + \gamma_L + \gamma_T = 2D$$

y por lo tanto el parámetro de torsión:  $\alpha = \frac{H}{\sqrt{\rho_L\rho_T}}$ , vale 1.

Este caso estricto de losa isotrópica (Fig. 6.5 a), no es frecuente en la práctica, ya que se suele disponer de unos voladizos (Fig. 6.5 b). En esta situación las fórmulas anteriores no se suelen modificar y se adopta en este caso la losa maciza, constituida por el núcleo (espesor constante) y los efectos de los voladizos se introducen únicamente como elementos transmisores de las cargas situadas sobre ellos. Si los voladizos son importantes, pueden incluirse dentro de las características mecánicas de las secciones del siguiente modo aproximado (Fig. 6.5 c): Se obtiene la inercia total de la sección transversal y se deduce el ancho de la sección equiva-

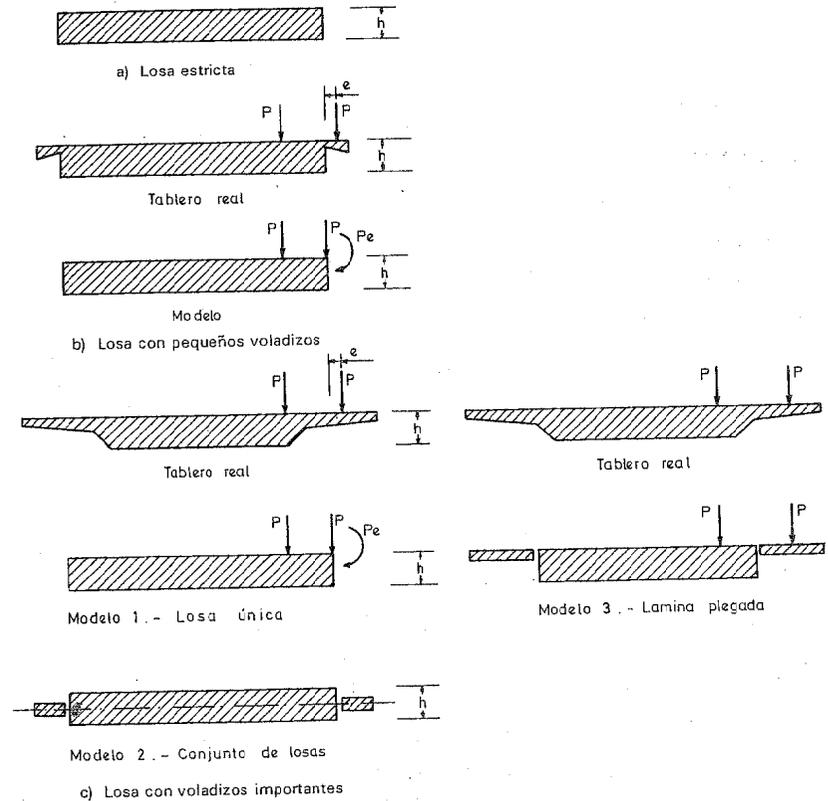


Figura 6.5. Losa maciza.

lente de la losa que presenta la misma inercia total, con el espesor constante  $h$ . Las cargas actuantes se aplican entonces como en la situación anterior. Si los voladizos son importantes pueden existir algunos problemas en la idealización de las cargas, que en algunas posiciones actúan sobre el voladizo de la losa mientras que en el modelo no. En este caso se puede proceder a la modificación del ancho real y de cálculo de acuerdo con el apartado 6.3. También es posible considerar la sección como una serie de varias losas isotropas y ensamblarlas automáticamente en el cálculo, mediante técnicas matriciales que se comentan en el siguiente capítulo. Conviene observar que al existir disimetría de las vigas, deberían introducirse las correcciones expuestas en el apartado 6.2. Sin embargo, en estos casos parece más eficiente tratar el tablero como una lámina plegada con vigas con nudos de dimensión finita, tal como se indica en el capítulo 9, puesto que las acciones de laja (cargas en el plano de las losas) aparecen inmediatamente al no existir coincidencia entre los planos medios de las distintas losas isotropas que componen el tablero. Se debe resaltar que en estos casos de grandes voladizos, el tablero deja de ser una losa maciza única para convertirse en una estructura compuesta de varias losas isotropas.

### 6.7. Emparrillado continuo

Se denominan  $b_1$  y  $b_2$  las equidistancias entre vigas transversales y longitudinales respectivamente, es decir, medidas según los ejes  $x$  e  $y$ , de la planta del emparrillado. Por otra parte, se designan por  $e_1$  y  $e_2$  los anchos de las vigas del emparrillado, como se indica en la figura 6.1. Se supone que estas vigas tienen igual canto  $h$  y que el plano medio de la losa ortótropa, contiene a los centros de gravedad de las secciones de la misma. Las deformaciones medias en las direcciones  $x$  e  $y$  ( $\varepsilon_x$  y  $\varepsilon_y$ ) se modifican por el efecto de interacción del coeficiente de Poisson, en la relación de áreas de contacto y total, es decir,  $\frac{e_1}{b_1}$  y  $\frac{e_2}{b_2}$  con lo que se obtiene:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} \left( \frac{e_1}{b_1} \right) \quad (*)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} \left( \frac{e_2}{b_2} \right)$$

Resultan por consiguiente las relaciones:

$$\sigma_x = E^*(\varepsilon_x + \nu_2 \varepsilon_y)$$

$$\sigma_y = E^*(\varepsilon_y + \nu_1 \varepsilon_x)$$

(\*) Las relaciones  $\frac{e_1}{b_1}$  y  $\frac{e_2}{b_2}$  corresponden a los coeficientes  $f_L$  y  $f_T$ , respectivamente, definidos en la fórmula 6.3.

siendo:

$$E^* = \frac{E}{1 - \nu_1 \nu_2}$$

$$\nu_1 = \nu \frac{e_1}{b_1} \quad \text{y} \quad \nu_2 = \nu \frac{e_2}{b_2}$$

Si se integran estas tensiones a lo largo de la sección de cada viga, se obtienen los momentos flectores resultantes unitarios:

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz \quad \text{y} \quad M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz$$

estando expresadas las deformaciones a la distancia  $z$  del plano medio, según la hipótesis de Kirchoff, por las siguientes relaciones:

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{y} \quad \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

con lo que resulta:

$$M_x = \rho_L \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$M_y = \rho_T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

en donde:

$$\rho_L = \frac{E^* h^3 e_1}{12 b_1}; \quad \rho_T = \frac{E^* h^3 e_2}{12 b_2}$$

$$D_1 = D_2 = \nu \frac{E^* h^3 e_1 e_2}{12 b_1 b_2}$$

De un modo análogo se deduce para los momentos de torsión:

$$M_{xy} = \gamma_L \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$M_{yx} = -\gamma_T \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

con

$$\gamma_L = Gke_1^3 \frac{h}{b_1} \quad (\text{si } e_1 < h); \quad \gamma_T = Gke_1 \frac{h^3}{b_1} \quad (\text{si } e_1 > h)$$

$$\gamma_T = Gk e_2^3 \frac{h}{b_2} \quad (\text{si } e_2 < h); \quad \gamma_T = Gk e_2 \frac{h^3}{b_2} \quad (\text{si } e_2 > h)$$

y  $k$  un coeficiente dependiente de la relación  $h/e_1$  o  $h/e_2$  según el caso (ver apéndice A).

De estas dos soluciones extremas correspondientes a los casos de losa maciza (total interacción en las dos direcciones) y emparrillado continuo (mínimo de interacción) se pueden deducir unos criterios de interpolación, con objeto de tratar situaciones intermedias. A modo orientativo se indica un resumen de los mismos:

Las rigideces unitarias de flexión de la viga son:

$$\rho_L^v = \frac{E\bar{I}}{b_1} \quad \text{y} \quad \rho_T^v = \frac{E\bar{I}}{a_1}$$

y la de las losas de forjado:

$$\rho_L^f = \frac{Ei}{1-\nu^2} \quad \text{y} \quad \rho_T^f = \frac{Ej}{1-\nu^2}$$

La rigidez total en cada dirección se obtiene mediante composición directa, es decir:

$$\rho_L = \rho_L^v + \rho_L^f \quad \text{y} \quad \rho_T = \rho_T^v + \rho_T^f$$

Las rigideces unitarias de torsión de las vigas son:

$$\gamma_L^v = \frac{G\bar{I}_o}{b_1} \quad \text{y} \quad \gamma_T^v = \frac{G\bar{J}_o}{a_1}$$

y las de las losas de forjado:

$$\gamma_L^f = \frac{1}{2} G i_o \quad \text{y} \quad \gamma_T^f = \frac{1}{2} G j_o$$

La rigidez total se obtiene como suma.

Las fórmulas anteriores podrían ser generalizadas para considerar distintos módulos de elasticidad  $E_x$  y  $E_y$  en los sentidos longitudinal y transversal, así como coeficientes de Poisson  $\nu_x$  y  $\nu_y$ .

En las fórmulas anteriores  $\bar{I}$ ,  $\bar{I}_o$ ,  $\bar{J}$  y  $\bar{J}_o$  representan las características elastomecánicas de la viga aislada y los valores  $i$ ,  $i_o$ ,  $j$  y  $j_o$  las correspondientes características unitarias del forjado o losa común.

## 6.8. Comentarios finales

En los apartados anteriores se ha estudiado de un modo general, el difícil problema de la idealización de un tablero real en una losa ortótropa. Este modelo estructural bidimensional es relativamente restringido y

estrictamente sólo debería ser aplicado a estructuras con un solo tipo de trabajo, concretamente de flexión. Por ello, la consideración mediante este modelo de secciones transversales con disimetrías de las vigas, que introducen acciones en el plano de la losa (trabajo de extensión) supone una aproximación. A este respecto, la utilización de la lámina plegada permitiría un tratamiento adecuado de estas situaciones, si bien, a un coste de mayor complicación del análisis.

Otro aspecto que limita el rango de aplicación de la losa ortótropa, corresponde a que las losas consideradas se suponen satisfacen a las hipótesis de Kirchoff de placas. Por ello secciones con una proporción elevada de huecos, que son susceptibles, por lo tanto, de incluir en su modo de trabajo estructural distorsiones, no deberían ser analizadas mediante el modelo de losa ortótropa. Sin embargo, en el excelente texto de Cusens y Pama (1975), se presentan algunos intentos de incluir de un modo aproximados estos efectos en el análisis, mediante la losa ortótropa. Conviene, no obstante, tener en cuenta que estas situaciones caen de un modo natural dentro de un cálculo tridimensional de lámina plegada, que será tratado en detalle en el capítulo 9, por lo que no se comentan aquí los resultados de Cusens y Pama.

Unas palabras de precaución respecto a la obtención de las características de la losa ortótropa, equivalente a un tablero real. En primer lugar, la fisuración de las secciones reales puede disminuir de un modo importante las rigideces de flexión —y torsión fundamentalmente— lo que implicaría una modificación sustancial de los valores de los coeficientes  $\alpha$  y  $\theta$ , y por lo tanto, de los resultados: los coeficientes de excentricidad y los esfuerzos. Por otra parte, la existencia del pretensado en las secciones —longitudinal y a veces transversal— puede conducir a una ortotropía del material que debe ser tenida en cuenta en un análisis de losa ortótropa. En ciertos tipos de secciones —pseudolosas entre otras— las armaduras transversales deben ser tenidas en cuenta en una evaluación correcta de las características mecánicas de las secciones. A este respecto, la citada obra de Cusens y Pama (1975), presenta indicaciones y fórmulas de cálculo (\*).

Por último, se sugiere como fructífero campo de estudio, la deducción de fórmulas que permitan calcular las constantes de ortotropía de una losa real ( $D_x$ ,  $D_y$ ,  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_{xy}$  y  $D_{yx}$ ) en función del tipo de sección y sus parámetros característicos (alturas, espesores, separación entre vigas, etc.). Un método eficiente podría ser recurrir a una técnica empírica de experimentación numérica, es decir, calcular el tablero mediante otro procedimiento más exacto de análisis y contrastar los resultados con los deducidos mediante la losa ortótropa. Las constantes de ortotropía de ésta, deberían elegirse de modo que el error entre ambos tipos de cálculos fuera mínimo. Este problema así planteado, cae dentro de las técnicas usuales de programación matemática (no lineal). Se comprende que de-

(\*) Ver el capítulo VIII correspondiente al emparrillado plano, donde se plantean asimismo estos problemas de idealización y por lo tanto algunos de los resultados allí obtenidos son aplicables.

penden los valores de las constantes de la losa ortótropa, que se deduzcan mediante este procedimiento, de la función objetivo a minimizar-tipo de resultado o resultados y secciones de evaluación de los mismos, así como de la propia funcional objetivo (error medio cuadrático, suma de valores absolutos, etc.). Evidentemente, el rango de variación de los parámetros de la sección constituye otro factor de posible alteración de los valores de estas constantes que se buscan.

En cualquier caso, conviene en este método de análisis de la losa ortótropa, llevar a cabo varios cálculos con distintos valores de los parámetros de torsión ( $\alpha$ ) y entrecruzamiento ( $\theta$ ), y de este modo tener en cuenta las posibles dispersiones originadas por las causas anteriormente reseñadas: inadecuación del modelo, fisuración, pretensado, etc. No obstante, si la importancia de una construcción exigiese este tipo de estudios (análisis de la sensibilidad de las constantes en los resultados), se debería recurrir de un modo alternativo a cálculos tridimensionales más refinados —lámina plegada, por ejemplo— que no exigen el laborioso proceso de la idealización estructural —particularmente si se desea efectuarlo con cierto rigor— del tablero.

#### REFERENCIAS

- BARÉS, R.: «Interaction transversale des constructions a poutres solidaires d'une dalle». Acta Technica, CSAV. Núms. 4 y 5 (1959), y 2 (1960).
- BARÉS, R., y MASSONNET, CH.: «Le calcul des grillages de poutres et dalles orthotropes». Dunod. Paris (1966).
- CUSENS, A. R., y PAMA, R. P.: «Bridge Deck Analysis». John Wiley and Sons (1975).
- MASSONNET, CH.: «Plaques et coques cylindriques orthotropes a nervures dysymetriques». Mémoires, AIPC, 19 (1959).
- ROWE, R. E.: «Concrete Bridge Design». John Wiley and Sons (1962).

7

## El método de la losa ortótropa

### 7.1. Introducción

El modelo de tablero de puente denominado losa ortótropa ha sido objeto de un capítulo anterior. Allí se ha estudiado la losa ortótropa mediante el método de Guyon-Massonet-Rowe (GMR). Ahora se plantea idéntico problema desde otra perspectiva, calculándose exactamente los resultados, esfuerzos y movimientos de la losa, a costa de una pérdida de las posibilidades de tabulación y facilidad computacional. Por otra parte, las aproximaciones del método GMR, algunas de ellas importantes, desaparecen, obteniéndose los resultados de un modo consistente dentro del marco de la teoría elástica lineal. Para ello se resuelve la ecuación diferencial resultante de la placa ortótropa, mediante una solución en serie de Fourier, tipo Levy. Se utilizan en dicha resolución notación y técnicas de cálculo matricial de estructuras, por la facilidad que implica la programación posterior en un computador.

Por otra parte, la idea de la solución directa de la ecuación diferencial de la losa ortótropa permite tratar tipos de tableros distintos al rectangular simplemente apoyado, que es el único que específicamente considera el método de GMR. De este modo, se desarrolla, dentro de este capítulo, el cálculo de tableros rectangulares con condiciones de borde distintas a las de simple apoyo, tableros continuos, tableros de planta circular y oblicuos.

### 7.2. Losa ortótropa rectangular simplemente apoyada.

#### 7.2.1. Ecuación general

Se supone el tablero del puente idealizado según una losa ortótropa rectangular (Fig. 7.1) simplemente apoyada en los bordes  $x=0$  y  $x=2a$ .

Los otros dos bordes, generalmente con condiciones de sustentación, se supone que soportan sendas vigas, que permiten, de esta forma, simular tipos muy generales de condiciones de borde.

Las características elásticas de la placa se expresan mediante las constantes:

$$D_x, D_y, D_{xy}, D_{yx}, D_1, D_2$$

que se relacionan con las propiedades reales del tablero mediante las expresiones:

$$\begin{aligned} D_x &= Ei & D_1 &= \nu_2 D_x & D_{xy} &= Gi_0 \\ D_y &= Ej & D_2 &= \nu_1 D_y & D_{yx} &= Gj_0 \end{aligned}$$

siendo:  $i$  y  $j$  las inercias de flexión longitudinal y transversal, respectivamente, del tablero real por unidad de longitud.

$i_0$  y  $j_0$  las inercias de torsión longitudinal y transversal, respectivamente, del tablero real por unidad de longitud.

$\nu_1$  y  $\nu_2$  coeficientes de Poisson de la losa ortótropa en las direcciones longitudinal ( $x$ ) y transversal ( $y$ ).

$E$  y  $G$  módulos de elasticidad directa y de cortante del material del tablero.

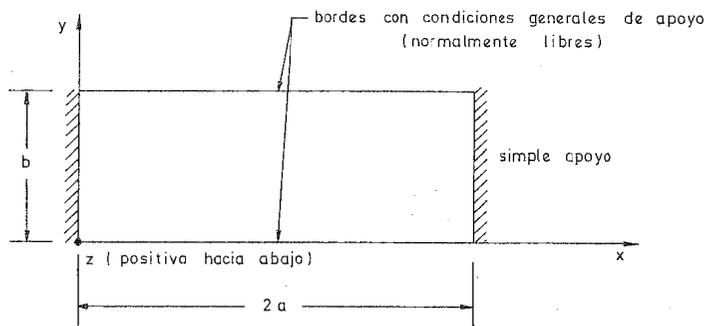


Figura 7.1. Placa ortótropa.

El problema referente a la determinación de las constantes representativas del tablero real, ha sido tratado en el capítulo anterior. Aquí solamente se resalta que, si se desea el cumplimiento del teorema de reciprocidad de Betti (\*), es necesario que las constantes se seleccionen de forma que:  $D_1 = D_2$  o bien  $\nu_2 D_x = \nu_1 D_y$ .

Frecuentemente, si el tablero es de vigas, se supone que

$$\nu_2 D_x = \nu_1 D_y = \nu \frac{Eh^3}{12}$$

(\*) Este teorema, que matemáticamente implica simetría o propiedad de autoadjunto en el problema, es equivalente a la conservación de la energía total de la estructura.

siendo  $h$  el espesor de la losa común de la cabeza superior de las vigas y  $\nu$  su coeficiente de Poisson. En otros tipos de secciones transversales, se suelen escoger  $\nu_1$  y  $\nu_2$ , de modo que

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \nu \\ \nu_2 D_x &= \nu_1 D_y, \text{ es decir } \nu_2 = \nu \frac{D_y}{D_x} \end{aligned}$$

A continuación, se presentan la ecuación general de la losa ortótropa en desplazamientos verticales ( $w$ ) y las relaciones esfuerzos-desplazamientos. La deducción de las mismas puede verse en Timoshenko y Woinowsky-Krieger (1959) o bien Cussens y Pama (1975), por lo que solamente se relacionan aquí los resultados finales:

Ecuación general:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y) \quad (7.1)$$

con  $2H = D_{xy} + D_{yx} + D_1 + D_2$ .

$p(x, y)$  es la fuerza vertical por unidad de área actuando en el punto ( $x, y$ ).

Relaciones esfuerzos-desplazamientos:

$$M_x = - \left( D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) ; \quad M_y = - \left( D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$M_{xy} = - D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} ; \quad M_{yx} = - D_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$Q_y = - \left\{ D_x \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (D_1 + D_{yx}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right\}$$

$$Q_x = - \left\{ D_y \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (D_2 + D_{xy}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right\}$$

Las relaciones de Kirchoff, que representan las reacciones verticales resultantes equivalentes a los esfuerzos cortantes y momentos torsores, se calculan mediante las igualdades:

$$R_x = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} ; \quad R_y = Q_y + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} \quad (7.3)$$

Los esfuerzos con su sentido positivo se definen en la figura (7.2), que corresponde a un elemento diferencial de placa.

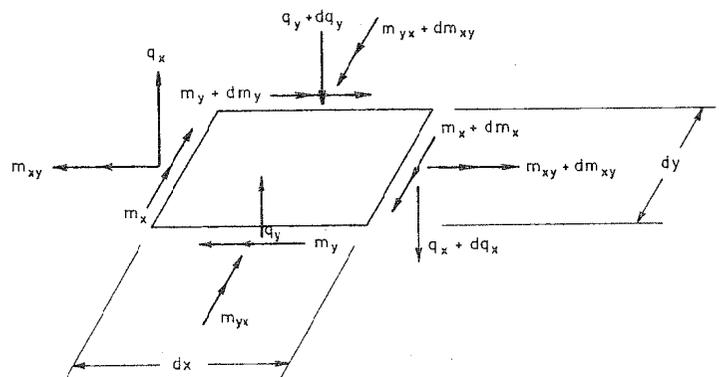


Figura 7.2. Esfuerzos de un elemento diferencial de placa.

La deformada de la placa  $w(x, y)$  se determina de modo que satisfaga la ecuación diferencial (7.1) de la losa y las condiciones de borde en el contorno. Estas últimas, son, en caso de simple apoyo, las siguientes:

$$w=0 \quad M_x=0$$

a lo largo de  $x=0$  y  $x=2a$ .

O bien, teniendo en cuenta las ecuaciones (7.2)

$$w=0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \quad (7.4)$$

a lo largo de  $x=0$  y  $x=2a$ .

Las condiciones de contorno a lo largo de los otros dos lados,  $y=0$  e  $y=b$ , se suponen generales, y no se especifican hasta más avanzada esta exposición (\*).

### 7.2.2. Solución complementaria

Como es sabido, la solución de (7.1), con sus condiciones de contorno, se suele obtener como suma de dos estados: 1) sin cargas en el interior de la placa (solución complementaria), y 2) con cargas dentro de la placa, pero sin considerar todas las condiciones de contorno (solución particular). Detalles de la solución matricial que se expone de un modo resumido a continuación pueden verse en las publicaciones de Samartín (1967), Samartín y Martínez (1974 y 1974a).

(\*) Obsérvese que ahora el eje ( $y$ ) no está situado en el eje del tablero, sino que coincide con un borde libre. Además, se denominaba  $b$  al ancho total del tablero, en lugar del semiancho considerado en el capítulo 5.

La solución complementaria  $w_c = w_c(x, y)$  es, por definición, la solución de la ecuación homogénea:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0$$

Con idénticas condiciones a lo largo de los bordes simplemente apoyados  $x=0$  y  $x=2a$ .

Se puede, por lo tanto, desarrollar  $w_c$  en serie de Fourier según la dirección  $x$ , es decir:

$$w_c = \sum_{n=1}^{\infty} w_{nc}(y) \operatorname{sen} \lambda_n x \quad (7.5)$$

en donde

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{2a}$$

$$w_{nc}(y) = A_1 e^{-r_1 y} + A_2 e^{-r_2 y} + A_3 e^{-r_3 y} + A_4 e^{-r_4 y} \quad (*)$$

siendo:

$A_1, A_2, A_3$  y  $A_4$  constantes arbitrarias.

$r_1, r_2, r_3$  y  $r_4$  raíces de la ecuación característica bicuadrada:

$$D_x \lambda_n^4 - 2H \lambda_n^2 r^2 + D_y r^4 = 0 \quad (7.6)$$

Se pueden distinguir tres casos en el tipo de raíces de la ecuación (7.6), según el signo del discriminante

$$\Delta = H^2 - D_x D_y$$

Caso 1 -  $\Delta < 0$ : Losa ortotropa rígida a flexión y flexible a torsión (típico caso en puentes).

Caso 2 -  $\Delta = 0$ : Si  $H = D_x = D_y$ , la losa es isótropa.

Caso 3 -  $\Delta > 0$ : Losa ortotropa rígida a torsión y flexible a flexión.

Las cuatro raíces  $r_j$  ( $j=1, 2, 3, 4$ ) de la ecuación característica (7.6) pueden expresarse en función de dos únicos parámetros adimensionales  $\theta$  y  $\alpha$ , y de la longitud reducida de la losa,  $\lambda_n$ , correspondiente al armónico  $n$ -simo. Los parámetros  $\theta$  y  $\alpha$  caracterizan la ortotropía de la losa y se definen como sigue:

$$\theta = 4 \sqrt{\frac{D_x}{D_y}} \quad \alpha = \frac{H}{\sqrt{D_x D_y}}$$

(\*) En caso de raíces dobles, se sustituye un término  $e^{-r_j y}$  por  $y e^{-r_j y}$ .

Los valores de las raíces  $r$ , se obtienen de acuerdo con la siguiente tabla 7.1.

TABLA 7.1  
RAICES ECUACION HOMOGENEA

Caso	Raices	Observaciones
1 ( $\alpha < 1$ )	$\pm(r \pm s\sqrt{-1})$	$r = \lambda_n \theta \cos \alpha^*$ $s = \lambda_n \theta \operatorname{sen} \alpha^*$ $\alpha^* = \frac{1}{2} \cos^{-1} \alpha^*$
2 ( $\alpha = 1$ )	$\pm \lambda_n \theta$ (dobles)	
3 ( $\alpha > 1$ )	$\pm(r \pm s)$	$r = \lambda_n \theta \operatorname{Ch} \alpha^*$ $s = \lambda_n \theta \operatorname{Sh} \alpha^*$ $\alpha^* = \frac{1}{2} \operatorname{Ch}^{-1} \alpha$

A partir de la ecuación (7.5) se pueden utilizar las fórmulas (7.2) y (7.3) y obtener los resultados de interés en el cálculo. Estos resultados se pueden recoger, por conveniencia computacional, como elementos de una matriz de resultados  $\mathbf{R}(x, y)$  de dimensión  $(11 \times 1)$ , definida a continuación:

$$\mathbf{R}(x, y) = \left( w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx}, Q_x, Q_y, R_x, R_y \right)^T$$

En el caso de la solución complementaria, esta matriz de resultados se identifica por el subíndice  $c$ , es decir, mediante el símbolo  $\mathbf{R}_c(x, y)$ .

Se puede mostrar que esta matriz  $\mathbf{R}_c(x, y)$  puede expresarse en la siguiente forma:

$$\mathbf{R}_c(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}_n(x) \cdot \mathbf{R}_{cn}(y)$$

siendo

$$\mathbf{E}_n(x) = \operatorname{diag.} (u, v, u, u, v, v, v, u, v, u)$$

con  $u = \operatorname{sen} \lambda_n x$  y  $v = \operatorname{cos} \lambda_n x$

$$\mathbf{R}_{cn}(y) = \mathbf{G} \{ \mathbf{BP}(y), \mathbf{CP}(b-y) \} \mathbf{A}$$

(\*) Se representan las funciones  $\operatorname{arccos} \alpha$  y  $\operatorname{arcCh} \alpha$  por  $\cos^{-1} \alpha$  y  $\operatorname{Ch}^{-1} \alpha$  respectivamente

en donde es:

$\mathbf{G}$  : matriz de dimensión  $(11 \times 4)$ , definida en la tabla 7.2.

$\mathbf{B}$  : matriz de dimensión  $(4 \times 2)$ , definida en la tabla 7.3, según el caso de losa ortótropa considerado.

$\mathbf{P}(y)$  : matriz de dimensión  $(2 \times 2)$ , dependiente de la variable  $y$ . Se define en la tabla 7.3, según el caso de losa ortótropa.

$\mathbf{A}$  : matriz columna, de dimensión  $(4 \times 1)$ , que contiene las cuatro constantes arbitrarias de la solución complementaria.

$$\mathbf{C} = \delta \mathbf{B}$$

$$\delta = \{ \delta_{ij} \} \quad (i, j = 1, 2, 3, 4)$$

en donde

$$\delta_{ij} = (-1)^{i+j} \quad \text{si } i=j$$

$$\delta_{ij} = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

TABLA 7.2

Matriz G

1	0	0	0
$\lambda_n$	0	0	0
0	1	0	0
$D_x \lambda_n^2$	0	$-D_1$	0
$D_y \lambda_n^2$	0	$-D_2$	0
0	$-D_{xy} \lambda_n$	0	0
0	$-D_{yx} \lambda_n$	0	0
$D_x \lambda_n^3$	0	$-(D_1 + D_{yy}) \lambda_n$	0
0	$(D_2 + D_{xx}) \lambda_n^2$	0	$-D_y$
$D_x \lambda_n^3$	0	$-(2H - D_2) \lambda_n$	0
0	$(2H - D_1) \lambda_n^2$	0	$-D_y$

TABLA 7.3

Matrices B y P(y)

Matriz	Caso 1 ( $\alpha < 1$ )	Caso 2 ( $\alpha = 1$ )	Caso 3 ( $\alpha > 1$ )
$\mathbf{B}$	1	0	1
	$-r$	$s$	$-r$
	$r^2 - s^2$	$-2rs$	$r^2 + s^2$
	$-r^3 + 3rs^2$	$-s^3 + 3sr^2$	$-r^3 - 3rs^2$
$\mathbf{P}(y)$	$e^{-ry} \operatorname{cos} sy$	$e^{-ry} \operatorname{sen} sy$	$e^{-ry} \operatorname{Ch} sy$
	$-e^{-ry} \operatorname{sen} sy$	$e^{-ry} \operatorname{cos} sy$	$e^{-ry} \operatorname{Sh} sy$

## 7.2.3. Solución particular

Se define la solución particular como la solución de la ecuación (7.1) pero que no satisface a todas las condiciones de contorno. Se comprende que depende del tipo de carga  $p(x, y)$  actuante sobre la losa, por lo que se determinan aquí únicamente dos casos frecuentes en la práctica:

1. Carga uniforme transversalmente:  $p(x, y) = p(x)$ .
2. Cuchillo de carga longitudinal a lo largo de  $y = \eta$ , es decir,  $p(x, y) = p(x) \delta(y - \eta)$  (\*).

Se supone a continuación la placa simplemente apoyada en  $x=0$  y  $x=2a$ , e infinita transversalmente. La solución correspondiente a este caso es una solución particular de (7.1), y se designa el vector de resultados con el subíndice 0, es decir,  $\mathbf{R}_0(x, y)$ . La solución, para cada uno de los casos citados de carga, es:

1. Carga uniforme transversalmente,  $p(x, y) = p(x)$ :

$$\mathbf{R}_0(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}_n(x) \cdot \mathbf{R}_{0n}(y)$$

con

$$\mathbf{R}_{0n}(y) = \mathbf{G} \mathbf{B}_0 \frac{h_n}{\lambda_n^4 D_x}$$

$$h_n = \frac{1}{a} \int_0^{2a} p(x) \sin \lambda_n x \, dx$$

$\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}$  (con  $r=s=0$  en todos los elementos de  $\mathbf{B}$ ).

2. Cuchillo de carga a lo largo de  $y = \eta$ , de valor  $p(x)$ :

$$\mathbf{R}_0(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}_n(x) \cdot \mathbf{R}_{0n}(y)$$

con

$$\mathbf{R}_{0n}(y) = \mathbf{G} \mathbf{C} \mathbf{P}(\eta - y) \mathbf{A}_0 \quad \text{si } y < \eta$$

$$\mathbf{R}_{0n}(y) = \mathbf{G} \mathbf{B} \mathbf{P}(y - \eta) \mathbf{A}_0 \quad \text{si } y \geq \eta$$

(\*)  $\delta(y - \eta)$  es la distribución delta de Dirac, definida como sigue:

$$\delta(y - \eta) = 0, \text{ para } y \neq \eta$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(y - \eta) dy = 1.$$

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \\ \frac{1}{s} \end{bmatrix} \frac{k_n}{4\lambda_n^2 D_x D_y} \quad \text{si } \alpha \neq 1$$

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \\ 1 \end{bmatrix} \frac{k_n}{4\lambda_n^2 D_x D_y} \quad \text{si } \alpha = 1$$

y  $h_n$  definida como antes.

## 7.2.4. Solución final.

Es la solución de la ecuación (7.1) y de las condiciones reales de borde de la losa que se puede expresar como suma de la solución particular y la complementaria. En esta última se deben elegir las constantes de modo que se cumplan las condiciones de borde no satisfechas por la solución particular; es decir:

$$\mathbf{R}(x, y) = \mathbf{R}_0(x, y) + \mathbf{R}_c(x, y) \quad (7.7)$$

Como ejemplo de determinación de las constantes arbitrarias del vector  $\mathbf{A}$  en la solución complementaria, se presentan dos casos de condiciones de borde:

- a) Condiciones de borde homogéneas.

Estas condiciones de borde se pueden expresar, para cada borde  $i$  ( $i=1, 2$  corresponden a  $y=0$  e  $y=b$ , respectivamente), según la ecuación matricial:

$$\mathbf{k}_{di} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} \\ w \end{bmatrix} + \mathbf{k}_{pi} \begin{bmatrix} M_y \\ R_y \end{bmatrix} = 0 \quad (i=1, 2) \quad (7.8)$$

en donde las matrices diagonales  $\mathbf{k}_{di}$  y  $\mathbf{k}_{pi}$ , de dimensión  $(2 \times 2)$ , satisfacen la condición adicional:

$$\mathbf{k}_{di} + \mathbf{k}_{pi} = \mathbf{I}_2 \text{ (matriz unidad de dimensión 2) } (i=1, 2)$$

Puesto que la solución se obtiene en forma de desarrollo en serie de Fourier, y dado el carácter lineal de la ecuación, la expresión (7.8) es válida para cada término del desarrollo trigonométrico.

El vector incógnita  $\mathbf{A}$ , para cada armónico  $n$ , se obtiene de la ecuación (7.8) particularizando para  $y=0$  e  $y=b$  la expresión (7.7), es decir:

$$\mathbf{A} = -\mathbf{K}^{-1} \mathbf{H}$$

siendo

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{d1} \begin{bmatrix} -g_{1,3} \\ g_{1,1} \end{bmatrix} + \mathbf{k}_{p1} \begin{bmatrix} g_{1,5} \\ g_{1,11} \end{bmatrix} \\ \mathbf{k}_{d2} \begin{bmatrix} -g_{2,2} \\ g_{2,1} \end{bmatrix} + \mathbf{k}_{p2} \begin{bmatrix} g_{2,5} \\ g_{2,11} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{d1} \begin{bmatrix} -g_{1,3}^0 \\ g_{1,11}^0 \end{bmatrix} + \mathbf{k}_{p1} \begin{bmatrix} g_{1,5}^0 \\ g_{1,11}^0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{k}_{d2} \begin{bmatrix} -g_{2,3}^0 \\ g_{2,1}^0 \end{bmatrix} + \mathbf{k}_{p2} \begin{bmatrix} g_{2,5}^0 \\ g_{2,11}^0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

en donde

$g_{1,i}$  es el vector de dimensión  $(1 \times 4)$  correspondiente a la fila  $i$  de  $\{\mathbf{GB}, \mathbf{GCP}(b)\}$

y  $g_{2,i}$  el vector de dimensión  $(1 \times 4)$  correspondiente a la fila  $i$  de  $\{\mathbf{GBP}(b), \mathbf{GC}\}$ .

$g_{1,i}^0$  es el elemento  $i$  de  $\mathbf{R}_{0n}(0)$

$g_{2,i}^0$  es el elemento  $i$  de  $\mathbf{R}_{0n}(b)$

b) Vigas de borde.

Se supone que existen en los bordes  $i=1, 2$  sendas vigas, definidas por sus rigideces de flexión  $(EI_i)$  y torsión  $(GJ_i)$ .

La matriz de rigidez  $\mathbf{R}_i$ , en ejes locales de la viga existente en el borde  $i$ , se puede expresar, para el armónico  $n$ -simo (Fig. 7.3), como sigue:

$$\begin{bmatrix} M_y \\ R_y \end{bmatrix}_{\text{viga } i} = \mathbf{R}_i \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} \\ w \end{bmatrix}_{\text{viga } i} \quad (7.9)$$

con

$$\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} -\lambda_n^2 GJ_i & 0 \\ 0 & \lambda_n^4 EI_i \end{bmatrix}$$

La ecuación (7.9) se puede transformar en ejes generales (de la losa), de acuerdo con las técnicas usuales del cálculo matricial de estructuras, resultando:

$$\begin{bmatrix} M_y \\ R_y \end{bmatrix} = (-1)^i \mathbf{T}_i \mathbf{R}_i \mathbf{T}_i^T \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} \\ w \end{bmatrix} \quad (i=1, 2) \quad (7.10)$$

en donde ahora las componentes  $(M_y, R_y)$  y  $(-\frac{\partial w}{\partial y}, w)$  son las amplitudes del armónico  $n$  de los esfuerzos y movimientos de la losa en el borde  $i(i=1, 2)$ .

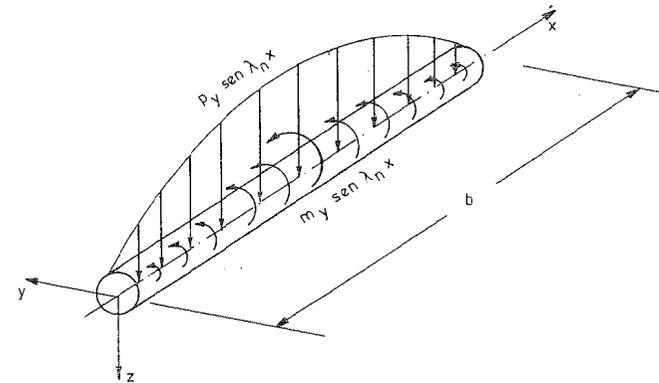


Figura 7.3. Matriz de rigidez de la viga (armónico  $n$ -simo).

La expresión de la matriz de transformación de ejes se obtiene fácilmente tras la inspección de la figura 7.4 (\*):

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} 1 & -a_i \cos \varphi_i + b_i \sin \varphi_i \\ 0 & \cos \varphi_i \end{bmatrix} \quad (i=1, 2)$$

Se comprueba que la ecuación (7.10) tiene la misma estructura matemática que la ecuación (7.8), si se designa por  $\mathbf{k}_{di} = \mathbf{I}_2$  y  $\mathbf{k}_{pi} = (-1)^i \mathbf{T}_i \mathbf{R}_i \mathbf{T}_i^T$ , por lo que se puede utilizar aquí el mismo método de solución que en el caso de condiciones homogéneas de borde.

Una vez calculadas las constantes  $\mathbf{A}$  para cada armónico, la solución complementaria está completamente determinada y por lo tanto mediante (7.7), también lo está la solución final  $\mathbf{R}(x, y)$ .

(\*) Conviene observar que si los centros de gravedad  $O_1$  y  $O_2$  de las vigas no están en el plano medio de la placa, es decir, si  $b_1$  y  $b_2$  son distintos de cero, el estudio bidimensional como placa (sin considerar los esfuerzos de laja) no es estrictamente válido y sería necesario un estudio tridimensional (lámina plegada). Sin embargo, es posible, con ciertas simplificaciones e hipótesis aproximativas llevar a cabo el cálculo anterior (cuando  $b_1$  y  $b_2$  son distintos de cero). Idéntico comentario se podrá hacer con referencia al ángulo  $\varphi_i$  formado por los ejes principales de la viga y el plano medio de la losa. En el capítulo 11 se trata este problema detalladamente, dentro del contexto de los elementos finitos bidimensionales.

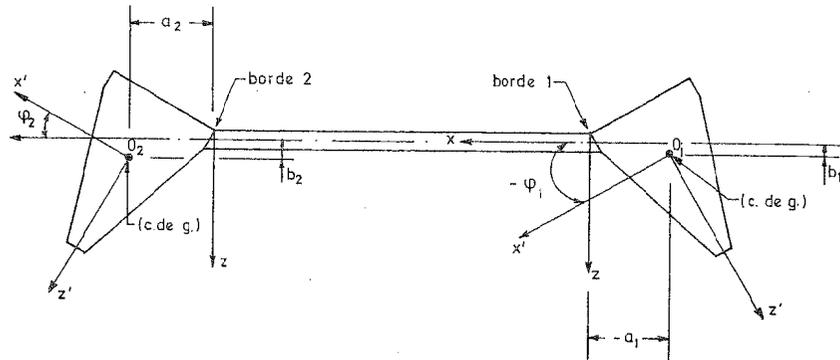


Figura 7.4. Transformación de ejes locales (vigas) a generales (losa).

### 7.2.5. Tableros articulados ( $D_y=0$ )

Es frecuente distinguir dentro del caso 3 de las losas ortótropas ( $\alpha > 1$ ), la situación límite que aparece cuando  $D_y$  tiende a cero, con lo que el valor de  $\alpha$  crece indefinidamente. Desde un punto de vista físico, esta situación tiene lugar cuando se idealiza el tablero como un conjunto de vigas longitudinales articuladas en la dirección transversal. De esta forma se simula la baja rigidez transversal del tablero, y las vigas longitudinales no pueden tener desplazamientos, pero sí rotaciones transversales relativas entre sí.

La técnica de solución de (7.1) se modifica ligeramente en este caso, teniendo en cuenta que la ecuación (7.6) se transforma en una de segundo grado en  $r$ . Las raíces son, entonces:

$$r_j = \infty \text{ (doble)} \quad (j=1, 2)$$

$$r_j = \pm \lambda_n \frac{D_x}{2H} = r \quad (j=3, 4)$$

La tabla 7.2 no se modifica, pero en la tabla 7.3 las matrices  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{P}(y)$  disminuyen su dimensión, resultando:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ -r \\ r^2 \\ -r^3 \end{bmatrix} \quad \text{dimensión } (4 \times 1)$$

$$\mathbf{P}(y) = e^{-ry}$$

$\mathbf{A}$  es ahora una matriz columna de constantes arbitrarias de dimensión  $(2 \times 1)$ .

Con referencia a la solución particular, sólo debe cambiarse la expresi-

sión de las constantes  $\mathbf{A}_0$  del caso 2) de carga, correspondiente al cuchillo a lo largo de  $\eta = \text{cte}$ .

Así, se obtiene, para la constante  $\mathbf{A}_0$

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ r \end{bmatrix} \frac{h_n}{2\lambda_n^2 D_x} \quad \text{dimensión } (1 \times 1)$$

Por último, en la solución final no deben incluirse las condiciones de borde correspondientes al giro  $\left(-\frac{\partial w}{\partial y}\right)$  (y al momento transversal  $M_y$ ), ya que, por la naturaleza física del problema, no existe continuidad en el primero y el segundo es nulo ( $D_y=0$ ).

Por otra parte, se comprueba que matemáticamente sólo existen dos constantes en  $\mathbf{A}$ , que corresponden únicamente a una condición de contorno en cada borde de la placa.

Por lo tanto, la ecuación (7.8) se transforma en:

$$\mathbf{k}_{di}[w] + \mathbf{k}_{pi}[R_y] = 0 \quad (i=1, 2)$$

con  $\mathbf{k}_{di} + \mathbf{k}_{pi} = 1$  (matriz unidad de  $1 \times 1$ ); análogamente el vector de incógnitas  $\mathbf{A}$  es:

$$\mathbf{A} = -\mathbf{K}^{-1} \mathbf{H}$$

con

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{d1} g_{1,1} + k_{p1} g_{1,11} \\ k_{d2} g_{2,1} + k_{p2} g_{2,11} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} k_{d1} g_{1,1}^0 + k_{p1} g_{1,11}^0 \\ k_{d2} g_{2,1}^0 + k_{p2} g_{2,11}^0 \end{bmatrix}$$

De modo similar se procede para la viga de borde, cuya matriz de rigidez en ejes locales, se expresa por la ecuación (7.9) la cual se reduce ahora a la siguiente:

$$\{q_y\}_{\text{viga } i} = R_i \{w\}_{\text{viga } i}$$

siendo la «matriz» de rigidez:

$$R_i = \lambda_n^4 EI_i$$

La matriz de transformación de ejes  $T_i$  es simplemente  $\{\cos \varphi_i\}$  ( $i=1, 2$ ) y la ecuación (7.10) sigue siendo válida.

7.2.6. Aplicación

Utilizando la teoría expuesta anteriormente, se puede escribir directamente un programa de cálculo mediante computador de la losa ortótropa rectangular simplemente apoyada. Un posible diagrama de flujo se representa en la figura 7.5.

La utilización de un cálculo de este tipo, dentro del análisis estructural de un tablero de puente, puede llevarse a cabo de acuerdo con uno de los objetivos siguientes:

- a) Estudio del reparto transversal.
- b) Cálculo directo bidimensional.

A continuación se comentan brevemente las características más importantes de ambos usos del método de la losa ortótropa:

- a) Estudio del reparto transversal:

En este caso el método de la losa ortótropa se puede utilizar de modo análogo al método de GMR. Es decir, el tablero del puente, simplemente apoyado o continuo, se calcula a todo ancho.

A continuación se determina, mediante el método de la losa ortótropa, la distribución transversal de resultados característicos en secciones específicas (vigas central, extrema, en centro de luz o apoyos, etc.).

Esta distribución transversal se utiliza de dos formas diferentes según los resultados que se consideren: Coeficiente de excentricidad ( $w$ ,  $M_x$ ,  $Q_x$ ,  $V_x$ , etc.) y envolvente transversales de valores máximos y mínimos ( $M_y$ ,  $Q_y$ , etcétera).

En ambos casos, es necesaria la determinación previa de las líneas de influencia, bien del carro de 60 t, bien de cargas puntuales o cuchillos de carga. Para ello se supone conocida longitudinalmente la posición del tren, es decir, las secciones  $x$  de actuación de las cargas. A continuación se determinan, para un conjunto discreto de valores de  $y$  (ver figura 7.6), los resultados  $R(x', y')$  cuya distribución se desea conocer y que constituyen las líneas de influencia de  $R(x', y')$  en función de  $y$  (posición transversal del eje longitudinal del tren).

Si  $\rho(y)$  es una de estas líneas de influencia, el coeficiente de excentricidad máximo,  $k_{\text{máx}}$ , es, por definición (Fig. 7.7):

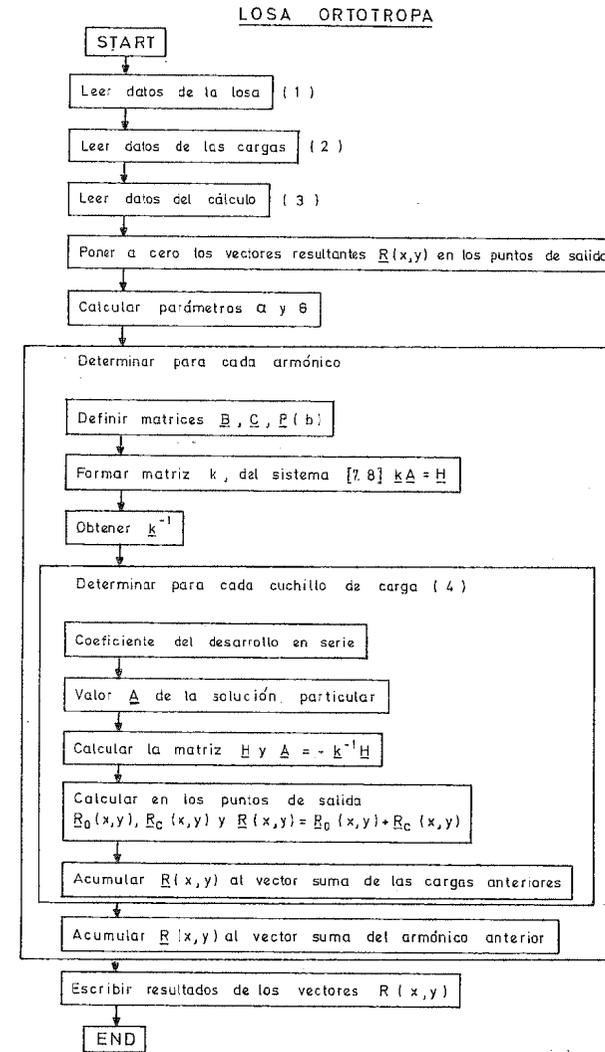
$$k_{\text{máx}} = \frac{\text{máx}_y \sum_{i=1}^N \lambda_i \rho(y + d_i)}{\left( \sum_{i=1}^N \lambda_i \right) \int_0^b \rho(y) dy} \quad (7.11)$$

siendo

$N$  = el número de ejes del tren.

$\lambda_i$  = la proporción entre la carga total en el eje  $i$  y la carga total por eje introducida en el cálculo de la línea de influencia  $\rho(y)$ .

$d_i$  = es la separación entre el eje  $i$  y el eje 1 elegido como referencia. Evidentemente  $d_1 = 0$ .



Comentarios:

(1)  $a, b, D_x, D_y, D_{xy}, D_{yx}, D_1, D_2$ . Condiciones en cada borde o características de la viga de borde:  $EI_i, GJ_i, a_i, b_i, \phi_i$ .

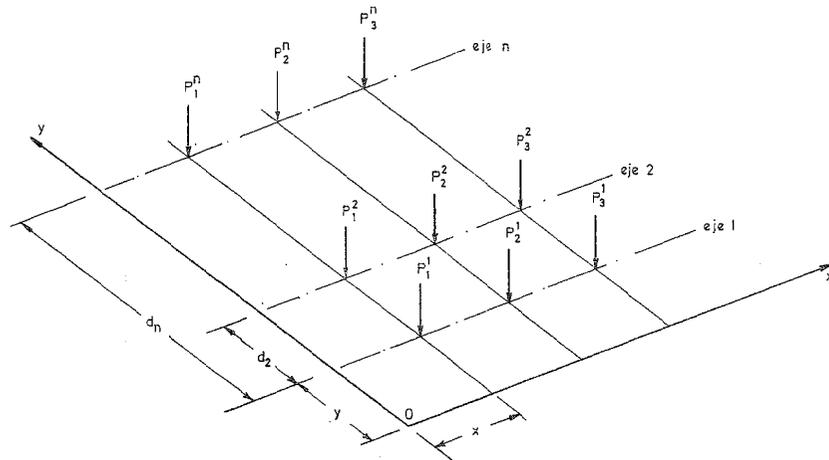
(2) Carga puntual (punto de aplicación  $x_i, y_i$ ),  $P_i$ . Carga uniforme (rectángulo de lados  $a'_i, b'_i$  y centro  $x_i, y_i$ ),  $P_i$ .

(3) Datos referentes al número de armónicos, número de puntos de salida de resultados ( $m$  transversales y  $n$  longitudinales equidistantes, o bien sus coordenadas  $x_i, y_i$  en caso de puntos arbitrarios).

(4) Cuchillo de carga se define como el conjunto de fuerzas con puntos de aplicación con idéntica abscisa ( $x_i$ ) y ancho transversal ( $a'_i$  en el caso de carga repartida). Es posible, entonces, determinar el coeficiente de la serie armónica suma de las cargas componentes del cuchillo y tratar el resultado como un único cuchillo de carga.

Figura 7.5.

$y$  = define la posición transversal del primer eje del tren  $y$ , por lo tanto a éste. Su valor puede variar como máximo entre 0 y  $b$ , o bien, si existen aceras u otros impedimentos en la calzada, entre los límites pertinentes.



$$\lambda_1 = \frac{P_1^1 + P_2^1 + P_3^1}{P_1 + P_2 + P_3}, \quad \lambda_2 = \frac{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2}{P_1 + P_2 + P_3}, \quad \dots, \quad \lambda_n = \frac{P_1^n + P_2^n + P_3^n}{P_1 + P_2 + P_3}$$

se supone que  $\frac{P_1^1}{P_2^1} = \frac{P_1^2}{P_2^2} = \dots = \frac{P_1^n}{P_2^n}$   
 $\frac{P_1^1}{P_3^1} = \frac{P_1^2}{P_3^2} = \dots = \frac{P_1^n}{P_3^n}$  etc...

Figura 7.6. Cálculo de líneas de influencia.

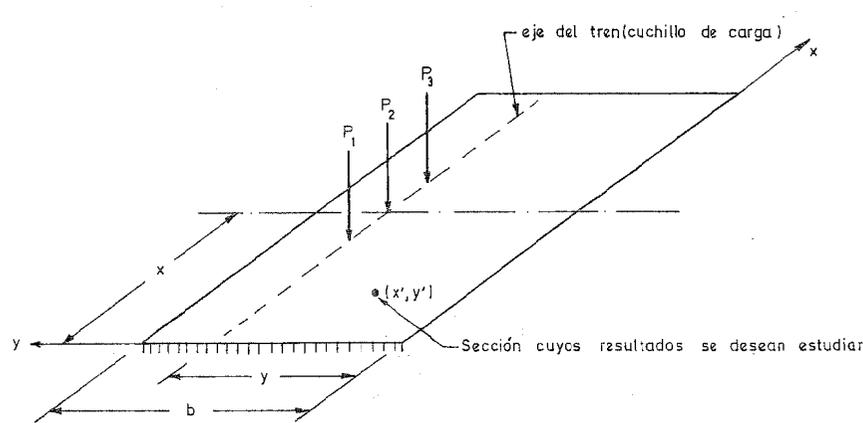


Figura 7.7. Definición del tren de cálculo.

Este valor de  $k_{\text{máx}}$  se aplica a los resultados a todo ancho del tipo ( $w$ ,  $M_x$ ,  $Q_x$  y  $R_x$ ), y estrictamente los resultados obtenidos de esta forma son válidos únicamente para la posición longitudinal definida por la abscisa  $x$ , supuesta para el tren en el cálculo de las líneas de influencia. Sin embargo, es práctica común su aplicación a otras posiciones del tren (en particular a las que producen los resultados a todo ancho más desfavorables), siempre que la diferencia entre ambas posiciones no sea excesiva.

A veces, el tren de cálculo se compone de un vehículo con cargas aisladas importantes y una sobrecarga uniforme. En este caso, se deben de componer los coeficientes de excentricidad de cada tipo de carga (ejes puntuales y cuchillo de sobrecarga uniforme), de modo que se obtenga el coeficiente de excentricidad global según el procedimiento indicado en el método de GMR, y cuya implementación en un programa puede verse en el apéndice B.

Análogamente las envolventes transversales de los esfuerzos máximos ( $M_y$  y  $Q_y$ , principalmente) se pueden deducir a partir de las anteriores líneas de influencia, como se indica a continuación:

Sea  $\rho(y, y')$  la línea de influencia del resultado  $R(x', y')$ , correspondiente al eje del tren situado longitudinalmente según la abscisa  $x$  (Figura 7.6) y definido transversalmente por  $y$ .

Utilizando la notación de la figura 7.6, se tiene, entonces:

$$\rho_{\text{máx}}(y') = \max_y \sum_{i=1}^N \lambda_i \rho(y + d_i, y')$$

$$\rho_{\text{mín}}(y') = \min_y \sum_{i=1}^N \lambda_i \rho(y + d_i, y')$$

Las curvas  $\rho_{\text{máx}}(y')$  y  $\rho_{\text{mín}}(y')$  constituyen las envolventes de los resultados máximos. Se comprende que dependen de las abscisas implícitas  $x$  y  $x'$ , si bien la influencia respecto a  $x$  es menor si se prevé una adecuada posición longitudinal del tren. La importancia de  $x'$  ha sido comentada en el estudio del método de GMR, con referencia especial a la variación de los momentos transversales  $M_y$ .

**Ejemplo 7.1**

Determinar las líneas de influencia en una losa ortótropa rectangular de la flecha vertical  $w$  y del momento flector longitudinal  $M_x$  en la sección centro de luz  $x=a$ , cuando actúa un cuchillo de carga uniforme  $p(x, y) = 1 \text{ tm}^{-2}$  a lo largo de  $y=\text{constante}$ .

La losa ortótropa que se considera, presenta las siguientes características:

$$\text{luz} = 2a = 18,29 \text{ m}; \text{ ancho} = b = 15,24 \text{ m}; E = 2,3 \times 10^6 \text{ tm}^{-2}$$

$$\nu_1 = \nu_2 = \nu = 0,15.$$

Las inercias de flexión son:

$$i = 0,033711468 \text{ m}^4/\text{m} \quad j = 0,006915341 \text{ m}^4/\text{m}$$

y las inercias de torsión tienen los valores:

$$i_0 = 0,003103710 \text{ m}^4/\text{m} \quad j_0 = 0,000855405 \text{ m}^4/\text{m}$$

Los parámetros de la losa ortótropa cumplen la condición de simetría:  $D_1 = D_2 = \nu D_y$ .

En la tabla 7.4 se presentan los resultados de las líneas de influencia, utilizando 1 y 5 términos de la serie armónica del desarrollo de la carga. A efectos comparativos, se presentan también los obtenidos mediante el método de GMR. La figura 7.8 muestra estos resultados.

El coeficiente de excentricidad se ha definido por el cociente entre el resultado obtenido mediante la teoría como placa ortótropa y el mismo calculado según la teoría como viga (flexión cilíndrica), correspondiente a las mismas condiciones de carga. Por lo tanto, los valores reales de los resultados,  $w$  y  $M_x$  se obtienen a partir de los coeficientes de las tablas, multiplicando por los valores

$$\frac{5 (2a)^4}{384 E_i} \text{ y } \frac{(2a)^2}{8}$$

respectivamente. Por otra parte, en el método de GMR (no así en Cusens y Pama) se introduce la simplificación  $k_m = 1, 1 k_w$ .

TABLA 7.4(a)

Líneas de influencia del coeficiente de reparto de  $w$  en  $x=a$

		Sección cargada $y/2a$									Método
		0	0,125	0,250	0,375	0,500	0,625	0,750	0,875	1,000	
Sección de estudio $y/2a$	0	4,80	3,46	2,01	1,02	0,37	-0,04	-0,30	-0,52	-0,69	GMR
		5,35	3,61	2,17	1,12	0,41	-0,05	-0,35	-0,57	-0,77	1 armónico
		5,30	3,59	2,18	1,12	0,41	-0,05	-0,35	-0,57	-0,77	5 armónicos
	0,125	3,45	2,65	1,92	1,26	0,71	0,31	-0,02	-0,26	-0,51	GMR
		3,61	2,81	2,00	1,28	0,71	0,28	-0,05	-0,32	-0,57	1 armónico
		3,59	2,79	1,99	1,28	0,71	0,28	-0,05	-0,32	-0,57	5 armónicos
	0,250	2,01	1,92	1,77	1,43	1,02	0,66	0,30	-0,02	-0,30	GMR
		2,17	2,00	1,79	1,43	1,01	0,62	0,27	-0,05	-0,35	1 armónico
		2,18	1,99	1,78	1,42	1,01	0,62	0,27	-0,05	-0,35	5 armónicos
	0,375	1,02	1,26	1,44	1,48	1,32	1,01	0,66	0,31	-0,04	GMR
		1,12	1,28	1,43	1,47	1,28	0,96	0,58	0,28	-0,05	1 armónico
		1,12	1,28	1,42	1,45	1,27	0,96	0,62	0,28	-0,05	5 armónicos
	0,500	0,37	0,71	1,02	1,32	1,45	1,32	1,02	0,71	0,37	GMR
		0,41	0,71	1,01	1,28	1,40	1,28	1,01	0,71	0,41	1 armónico
		0,41	0,71	1,01	1,27	1,39	1,27	1,01	0,71	0,41	5 armónicos

TABLA 7.4(b)

Líneas de influencia del coeficiente de reparto de  $M_x$  en  $x=a$

		Sección cargada $y/2a$									Método
		0	0,125	0,250	0,375	0,500	0,625	0,750	0,875	1,000	
Sección de estudio $y/2a$	0	5,28	3,81	2,21	1,12	0,41	-0,04	-0,33	-0,57	-0,76	GMR
		5,48	3,69	2,23	1,15	0,42	-0,05	-0,36	-0,58	-0,78	1 armónico
		5,10	3,57	2,24	1,17	0,42	-0,05	-0,36	-0,58	-0,78	5 armónicos
	0,125	3,80	2,92	2,11	1,39	0,78	0,34	-0,02	-0,29	-0,56	GMR
		3,61	2,91	2,07	1,32	0,72	0,28	-0,05	-0,33	-0,59	1 armónico
		3,50	2,80	2,00	1,31	0,72	0,28	-0,05	-0,33	-0,59	5 armónicos
	0,250	2,21	2,11	1,95	1,57	1,12	0,73	0,33	-0,02	-0,33	GMR
		2,13	2,03	1,90	1,50	1,05	0,63	0,26	-0,07	-0,38	1 armónico
		2,14	1,97	1,80	1,44	1,04	0,64	0,27	-0,07	-0,38	5 armónicos
	0,375	2,12	1,39	1,58	1,63	1,45	1,11	0,73	0,34	-0,04	GMR
		1,05	1,27	1,49	1,59	1,35	1,00	0,62	0,25	-0,10	1 armónico
		1,07	1,26	1,42	1,49	1,29	0,99	0,63	0,26	-0,10	5 armónicos
	0,500	0,41	0,78	1,12	1,45	1,60	1,45	1,12	0,78	0,41	GMR
		0,34	0,69	1,03	1,35	1,53	1,35	1,03	0,69	0,34	1 armónico
		0,35	0,69	1,02	1,29	1,53	1,29	1,02	0,69	0,35	5 armónicos

Conviene observar que en el cálculo automatizado de las líneas de influencia en una losa ortótropa no se suelen obtener los coeficientes de reparto, sino operar con los resultados reales y pasar transversalmente el tren, como se ha indicado anteriormente. Los coeficientes de excentricidad de magnitudes «longitudinales» ( $w, M_x, Q_x$  y  $R_x$ ) se deducen de forma idéntica (ya que constituyen coeficientes adimensionales) a como se describe en el método de GMR. En cambio, el cálculo de la envolvente de magnitudes transversales ( $M_y, Q_y$  y  $R_y$ ) representa una tarea computacional importante, ya que es preciso el tratamiento sucesivo de diferentes líneas de influencia. Cada una corresponde a la sección transversal cuya ordenada (máximo o mínimo) en la curva envolvente se desea determinar. En el apéndice B se muestra un ejemplo de este tipo de cálculo mecanizado. Ahora se presentan, a efectos ilustrativos solamente, todas las líneas de influencia que se obtienen en un cálculo por computador, en una sección ( $x', y'$ ) determinada de una losa ortótropa.

**Ejemplo 7.2**

Determinar con tres armónicos significativos todas las líneas de influencia en los puntos (8,50; 5,00) y (8,50; 10,00) de la losa ortótropa siguiente:

$$2a = 17,00 \quad b = 20,00 \quad ; \quad E = 3,5 \times 10^6 \text{ tm}^{-2} \quad \nu = 0,20$$

$$i = 0,06902 \text{ m}^4/\text{m} \quad ; \quad j = 0,08333 \text{ m}^4/\text{m}$$

$$i_0 = 0,16667 \text{ m}^4/\text{m} \quad ; \quad j_0 = 0,16667 \text{ m}^4/\text{m}$$

Se supone la actuación de un cuchillo uniforme de carga de  $1 \text{ tm}^{-1}$  actuando en toda la luz del puente.

En la tabla 7.5 se reproducen los resultados obtenidos mediante el computador. Para otro tipo de cuchillo de carga (tres ruedas de  $10 \text{ t}$  en el caso del tren de la Instrucción española) sería necesario definir la posición longitudinal del tren, que, según el tipo de esfuerzo a estudiar es, en general, diferente.

TABLA 7.5

Líneas de influencia. Tren cuchillo de carga uniforme extendido en toda la luz

TREN  $D1=0,000$ ;  $D2=0,000$ ;  $D3=0,000$ ;  $D4=0,000$ ;  $P1=0,000$ ;  $P2=0,000$ ;  $P3=0,000$   
SITUACION DEL TREN 0,00  
LINEA DE INFLUENCIA EN SECCION  $X=8,50$ ;  $Y=5,00$

Secciones de aplicación de la carga $y/a$												
Función	0,000	0,100	0,200	0,300	0,400	0,500	0,600	0,700	0,800	0,900	1,000	$\Sigma$
$w$	0,310	0,294	0,280	0,259	0,230	0,199	0,171	0,148	0,129	0,116	0,108	4,080
$\frac{\partial w}{\partial x}$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$\frac{\partial w}{\partial y}$	-0,034	-0,026	-0,016	-0,004	0,002	0,006	0,008	0,008	0,009	0,009	0,009	-0,029
$M_x$	2,542	2,531	2,538	2,384	2,065	1,759	1,490	1,269	1,110	0,978	0,894	35,708
$M_y$	-0,496	0,258	1,131	1,256	0,662	0,275	0,045	-0,085	-0,162	-0,213	-0,257	5,857
$M_{xy}$	0,000	0,000	0,000	0,060	-0,000	-0,000	-0,000	-0,000	-0,000	-0,000	-0,000	0,000
$Q_x$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$Q_y$	-0,313	-0,406	-0,484	0,707	0,269	0,199	0,145	0,106	0,079	0,059	0,044	0,329
$R_x$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$R_y$	-0,603	-0,615	-0,609	0,270	0,270	0,246	0,215	0,185	0,161	0,142	0,129	0,061

LINEA DE INFLUENCIA EN SECCION  $X=8,50$   $Y=10,00$

Secciones de aplicación de la carga $y/a$												
Función	0,00	0,100	0,200	0,300	0,400	0,500	0,600	0,700	0,800	0,900	1,000	$\Sigma$
$w$	0,177	0,182	0,193	0,206	0,219	0,225	0,219	0,206	0,193	0,182	0,177	4,011
$\frac{\partial w}{\partial x}$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$\frac{\partial w}{\partial y}$	-0,019	-0,017	-0,016	-0,013	-0,008	0,000	0,008	0,013	0,016	0,017	0,019	0,000
$M_x$	1,455	1,539	1,667	1,830	2,009	2,179	2,009	1,830	1,667	1,539	1,455	35,422
$M_y$	-0,435	-0,224	0,033	0,407	0,976	1,763	0,976	0,407	0,033	-0,224	-0,435	7,208
$M_{xy}$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	-0,000	-0,000	-0,000	-0,000	-0,000	-0,000	0,000
$Q_x$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$Q_y$	-0,143	-0,184	-0,236	-0,303	-0,379	0,424	0,379	0,303	0,236	0,184	0,143	0,000
$R_x$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$R_y$	-0,317	-0,342	-0,373	-0,406	-0,429	0,424	0,429	0,406	0,373	0,342	0,317	-0,000

### b) Cálculo directo bidimensional.

Otra posibilidad de utilización del método de la losa ortótropa al cálculo de tableros de puentes, alternativa a la que se acaba de describir, consiste en el análisis directo como estructuras bidimensionales. En este caso, ya no es necesario realizar la separación del análisis en dos fases: cálculo global a todo ancho y cálculo transversal. Ahora se determinan en un conjunto de secciones especificadas por sus coordenadas ( $x'$ ,  $y'$ ), utilizando directamente la teoría de la losa ortótropa, los resultados de interés cuando la sobrecarga actúa en una posición prefijada. Mediante sucesivas modificaciones en la posición de la sobrecarga (paseo del tren), se pueden obtener los resultados —movimientos y esfuerzos— máximos y mínimos, directamente, sin necesidad de la utilización de las líneas de influencia anteriormente comentadas.

Esta posibilidad es atractiva y puede ampliarse en la práctica del cálculo de tableros de puentes. Sin embargo, adolece de las siguientes desventajas, en comparación con el anterior cálculo tradicional de la losa ortótropa: 1) Sólo es aplicable a tableros de puentes rectangulares simplemente apoyados. Es decir, los casos de puentes ligeramente esviados, de variación suave del ancho, o continuos, no pueden ser tratados de esta forma. Por el contrario, en el método del apartado a), como el coeficiente de excentricidad corresponde a un número relativo entre un resultado y su valor medio, el error que implica en el cálculo está acotado, incluso en los tipos de tableros citados, que por su geometría o condiciones de sustentación, sean distintos a la losa rectangular simplemente apoyada. En efecto, en todos ellos el valor global del resultado se calcula correctamente y sólo su distribución transversal es susceptible de error (\*). 2) En general, es un procedimiento caro en comparación a la utilización tradicional, ya que exige un paseo del tren en las dos direcciones —longitudinal y transversal—, elevando de un modo importante el número de casos de carga a considerar. Por el contrario en el procedimiento tradicional, la posición longitudinal del tren se deduce de un modo inmediato del cálculo global a todo ancho, y sólo exige el paseo transversal del tren.

### 7.3. Losa ortótropa rectangular con condiciones de borde distintas de las de simple apoyo

El análisis anterior puede ser llevado a cabo de un modo completamente paralelo como se acaba de indicar considerando desarrollos de Fourier generalizados, es decir, con funciones ortogonales distintas de las trigonométricas  $\text{sen } \lambda_n x = \text{sen } \frac{n\pi}{2a} x$ . De esta forma, se pueden contemplar otras condiciones de borde para la losa ortótropa, distintas de las de simple apoyo, que implican los desarrollos trigonométricos. Sin embargo, como se verá a continuación, este estudio sólo será aplicable a las losas con baja rigidez torsional, o sea, a las losas con un valor de  $H$  tal que

(\*) Con respecto a los esfuerzos locales, éstos suelen ser, a partir de ciertas luces mínimas, independientes de las condiciones de sustentación en los apoyos del tablero e incluso de las ligeras variaciones de geometría.

$$2H = D_{xy} + D_{yx} + D_1 + D_2 \approx 0$$

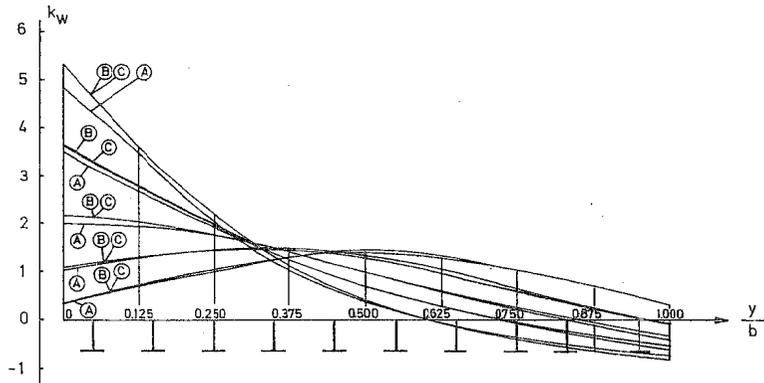
Para ello se introduce un nuevo conjunto de funciones deducidas por Lord Rayleigh (1877) en el estudio de las vibraciones de la viga y utilizadas en el cálculo de tableros de puentes por Inglis (1944).

7.3.1. Funciones de Rayleigh

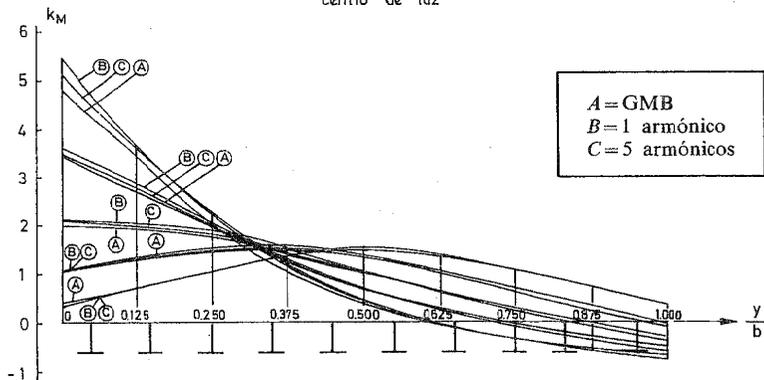
Se denomina función de Rayleigh en el rango (0, l) a una función cualquiera F(x), del tipo

$$F(x) = A_1 \operatorname{Ch} \lambda x + A_2 \operatorname{Sh} \lambda x + A_3 \cos \lambda x + A_4 \operatorname{sen} \lambda x$$

que satisface, en cada uno de los bordes x=0 y x=l, una pareja cualquiera entre las siguientes cuatro clases de condiciones de apoyo homogéneas:



a) Coeficiente de excentricidad de flechas en la sección centro de luz



b) Coeficiente de excentricidad de momentos en la sección centro de luz

Figura 7.8. Resultados del ejemplo 7.1.

1. Apoyo simple:  $F = \frac{d^2 F}{dx^2} = 0$ .
2. Empotramiento:  $F = \frac{dF}{dx} = 0$ .
3. Libre:  $\frac{d^2 F}{dx^2} = \frac{d^3 F}{dx^3} = 0$ .
4. Deslizamiento normal:  $\frac{dF}{dx} = \frac{d^3 F}{dx^3} = 0$ .

En cada uno de los dos extremos de una viga puede existir una pareja de estas condiciones. Las funciones trigonométricas  $\operatorname{sen} \lambda_n x$  constituyen un caso particular de las funciones de Rayleigh (apoyo simple-apoyo simple) con  $\lambda = \frac{n\pi}{l}$  (n=1, 2, ...).

Las expresiones de algunas funciones de Rayleigh se indican en la tabla 7.6.

TABLA 7.6

Funciones de Rayleigh

Caso	Función de Rayleigh	Valores de $\lambda_m$	Valores de $A_m$
Biempotrado	$A_m(\operatorname{Ch} \lambda_m x - \cos \lambda_m x) - (\operatorname{Sh} \lambda_m x - \operatorname{sen} \lambda_m x)$	$\operatorname{Ch} \lambda_m l = 1$ $\lambda_1 l = 4,7300$ $\lambda_2 l = 7,8540$ $\lambda_3 l = 10,9956$	$A_m = \frac{\operatorname{Ch} \lambda_m l - \cos \lambda_m l}{\operatorname{Sh} \lambda_m l + \operatorname{sen} \lambda_m l}$ $A_1 = 1,0178$ $A_2 = 0,9992$ $A_3 = 1,0000$
Voladizo	$A_m(\operatorname{Ch} \lambda_m x - \cos \lambda_m x) - (\operatorname{Sh} \lambda_m x - \operatorname{sen} \lambda_m x)$	$\operatorname{Ch} \lambda_m l \cos \lambda_m l = -1$ $\lambda_1 l = 1,8751$ $\lambda_2 l = 4,6949$ $\lambda_3 l = 7,8540$	$A_m = \frac{\operatorname{Ch} \lambda_m l + \cos \lambda_m l}{\operatorname{Sh} \lambda_m l - \operatorname{sen} \lambda_m l}$ $A_1 = 1,3622$ $A_2 = 0,9819$ $A_3 = 1,0008$
Empotrado-apoyado	$A_m(\operatorname{Ch} \lambda_m x - \cos \lambda_m x) - (\operatorname{Sh} \lambda_m x - \operatorname{sen} \lambda_m x)$	$\operatorname{th} \lambda_m l = \operatorname{tg} \lambda_m l$ $\lambda_1 l = 3,9270$ $\lambda_2 l = 7,0686$ $\lambda_3 l = 10,2102$	$A_m = 1$ $A_1 = 1$ $A_2 = 1$ $A_3 = 1$
Biapoyado	$A_m \operatorname{sen} \lambda_m x$	$\operatorname{sen} \lambda_m l = 0$ $\lambda_1 l = \pi$ $\lambda_2 l = 2\pi$ $\lambda_3 l = 3\pi$	$A_m = 1$ $A_1 = 1$ $A_2 = 1$ $A_3 = 1$

Las propiedades más importantes de estas funciones se resumen a continuación:

1.  $\frac{d^4 F}{dx^4} = \lambda^4 F$  (se reproducen, salvo un factor, al derivarlas cuatro veces).

2. Para cada pareja de condiciones de apoyo en los bordes  $x=0$  y  $x=l$ , existe un conjunto infinito de funciones de Rayleigh  $F_n(x)$  que se ordenan según un índice  $n$ . Los valores de  $\lambda_n$  son crecientes con  $n$  y se denominan autovalores:  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_n < \dots$ . Cada autovalor  $\lambda_n$  y sus correspondientes constantes  $A_1^{(n)}$ ,  $A_2^{(n)}$ ,  $A_3^{(n)}$  y  $A_4^{(n)}$ , definen la función de Rayleigh  $F_n(x)$  o autofunción.

**Ejemplo 7.3**

Las funciones de Rayleigh correspondientes a una viga empotrada (en  $x=0$ ) y apoyada (en  $x=l$ ) son:

$$F_1(x) = A_1^{(1)}(Ch \lambda_1 x - \cos \lambda_1 x) - (Sh \lambda_1 x - \sen \lambda_1 x)$$

$$F_2(x) = A_1^{(2)}(Ch \lambda_2 x - \cos \lambda_2 x) - (Sh \lambda_2 x - \sen \lambda_2 x)$$

$$F_3(x) = A_1^{(3)}(Ch \lambda_3 x - \cos \lambda_3 x) - (Sh \lambda_3 x - \sen \lambda_3 x)$$

$$F_n(x) = A_1^{(n)}(Ch \lambda_n x - \cos \lambda_n x) - (Sh \lambda_n x - \sen \lambda_n x)$$

Los valores correspondientes de las constantes son:

$$A_1^{(n)} = \frac{Ch \lambda l + \cos \lambda l}{Sh \lambda l - \sen \lambda l}; \quad y \quad A_2^{(n)} = -1; \quad A_3^{(n)} = -A_1 \quad y \quad A_4^{(n)} = 1$$

siendo

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  las sucesivas soluciones de la ecuación:

$$Ch \lambda l \cos \lambda l = -1$$

Así:

$$\lambda_1 l = 1,87507 \quad A_1^{(1)} = 1,36221$$

$$\lambda_2 l = 4,69694 \quad A_1^{(2)} = 0,98187$$

$$\lambda_3 l = 7,85398 \quad A_1^{(3)} = 1,00078$$

$$\lambda_n l \approx \frac{2n+1}{2} \pi \quad A_1^{(n)} \approx 1,00000$$

En la figura 7.9 se representan las tres primeras de estas funciones y los correspondientes valores en la tabla 7.7.

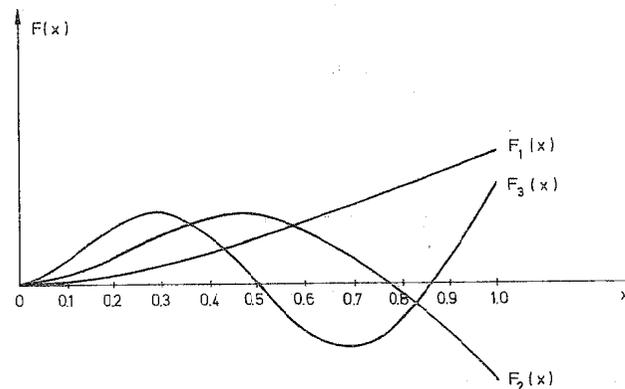


Figura 7.9. Funciones de Rayleigh del caso empotramiento-libre.

TABLA 7.7

Valores de las funciones de Rayleigh correspondientes a empotramiento-simple apoyo

$\frac{x}{l}$	0	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
$F_1$	0	0,0459	0,1739	0,3719	0,6258	0,9250	1,2568	1,6097	1,9766	2,3494	2,7244
$F_2$	0	0,1820	0,5914	1,0330	1,3423	1,4014	1,1578	0,6234	-0,1372	-1,0284	-1,9637
$F_3$	0	0,4564	1,2098	1,5137	1,0530	0,0389	-0,9486	-1,3159	-0,7902	-0,4575	2,0016

3. Las funciones de Rayleigh correspondientes a una determinada pareja de condiciones de apoyo constituyen una base ortogonal. Esta propiedad significa que son linealmente independientes, y que, prácticamente, cualquier función de interés en el cálculo estructural puede expresarse como combinación lineal de las  $F_n(x)$ . Además, si  $F_n(x)$  y  $F_m(x)$  son dos funciones de Rayleigh distintas pero correspondientes al mismo caso de condiciones de apoyo, se cumple la condición de ortogonalidad siguiente:

$$\int_0^1 F_n(x) F_m(x) dx = 0 \quad \text{si } (m \neq n) \quad (7.12)$$

Por lo tanto, si  $p(x)$  es una función, que cumpla ciertas condiciones muy generales, puede expresarse en serie de Fourier generalizada como sigue:

$$p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n F_n(x) \tag{7.13}$$

con

$$h_n = \frac{\int_0^l p(x) F_n(x) dx}{\int_0^l F_n^2(x) dx}$$

**Ejemplo 7.4**

Desarrollo de la carga uniforme,  $p(x)=p$ , mediante funciones de Rayleigh (empotramiento-libre):

$$p = \sum_{n=1}^{\infty} h_n F_n(x)$$

Las funciones  $F_n(x)$  han sido deducidas anteriormente, y se tiene entonces:

$$h_n = \frac{\int_0^1 F_n(x) dx}{\int_0^1 F_n^2(x) dx} p = \frac{2}{\lambda_n l} \{A_1^{(n)}\}^2 p$$

con lo que resulta:

$$h_1 = 0,575 p \quad ; \quad h_2 = 0,442 p \quad ; \quad h_3 = 0,255 p$$

$$h_4 = 0,182 p \quad ; \quad h_5 = 0,139 p$$

4. Es útil conocer la siguiente fórmula del módulo de las funciones de Rayleigh:

$$\int_0^l F_n^2(x) dx = \frac{1}{4} \{F_n^2 - F_n' F_n''' + F_n''^2\}_{x=l} \tag{7.14}$$

siendo

$$F_n' = \frac{1}{\lambda_n} \frac{dF_n}{dx}, \quad F_n'' = \frac{1}{\lambda_n^2} \frac{d^2 F_n}{dx^2} \quad \text{y} \quad F_n''' = \frac{1}{\lambda_n^3} \frac{d^3 F_n}{dx^3}$$

Si existe un borde empotrado y se adopta como origen  $x=0$  el empotramiento, la fórmula (7.14) se transforma en la siguiente:

Borde $x=0$	Borde $x=l$	Valor de $\frac{4}{l} \int_0^l F_n^2(x) dx$
empotrado	libre	$F_n(l)^2 = F_n''(0)^2$
empotrado	empotrado	$F_n''(l)^2 = F_n''(0)^2$

5. Se puede mostrar que la condición de ortogonalidad (7.12) vale para las funciones de Rayleigh cuyas condiciones de contorno satisfagan la siguiente relación:

$$[F_m F_n''' - F_m' F_n'' - F_n F_m''' + F_n' F_m'']_0^l = 0$$

En donde esta expresión representa la diferencia entre los valores del corchete particularizadas para  $x=l$  y  $x=0$ .

Esta condición se deduce al considerar las igualdades:

$$\frac{d^4 F_n}{dx^4} = \lambda_n^4 F_n \quad \text{y} \quad \frac{d^4 F_m}{dx^4} = \lambda_m^4 F_m$$

y multiplicarlas por  $F_m$  y  $F_n$ , respectivamente, procediendo a su integración por partes entre los límites 0 y  $l$ .

Por lo tanto, es posible ampliar las funciones de Rayleigh introduciendo entre las condiciones de contorno el caso de coacción apoyo elástico simétrico en ambos bordes de la viga. Es decir, funciones  $F_m(x)$  que satisfacen:

$$\frac{d^4 F_m}{dx^4} = \lambda_m^4 F_m$$

y las condiciones de apoyo elástico:

$$\left. \begin{aligned} F_m &= 0 \\ \frac{d^2 F_m}{dx^2} &= \frac{k}{l} \frac{dF_m}{dx} \end{aligned} \right\} \text{para } x=0$$

$$\left. \begin{aligned} F_m &= 0 \\ \frac{d^2 F_m}{dx^2} &= -\frac{k}{l} \frac{dF_m}{dx} \end{aligned} \right\} \text{para } x=l$$

Carmichael obtuvo en (1959) las expresiones en este caso de las funciones  $F_m$ , que son:

$$F_m = A_m (Ch \lambda_m x - \cos \lambda_m x) + B_m \text{Sh } \lambda_m x + \text{sen } \lambda_m x$$

con

$$\lambda_m l = -\frac{k}{2} \left( \text{th } \frac{\lambda_m l}{2} + \text{tg } \frac{\lambda_m l}{2} \right) \quad \text{si } m \text{ impar}$$

$$\lambda_m l = -\frac{k}{2} \left( \text{coth } \frac{\lambda_m l}{2} - \text{cotg } \frac{\lambda_m l}{2} \right) \quad \text{si } m \text{ par}$$

$$A_m = -\text{cotg } \frac{\lambda_m l}{2}; B_m = \text{cot } \frac{\lambda_m l}{2} \text{th } \frac{\lambda_m l}{2} \quad \text{si } m \text{ impar}$$

$$A_m = \text{tg } \frac{\lambda_m l}{2}; B_m = -\text{tg } \frac{\lambda_m l}{2} \text{coth } \frac{\lambda_m l}{2} \quad \text{si } m \text{ par}$$

Para  $k=0$  y  $k=\infty$  resultan los casos extremos de biapoyo y biempotramiento, respectivamente.

### 7.3.2. Aplicación a la losa ortótropa

Si se considera la losa ortótropa con rigidez torsional despreciable ( $D_{xy}=D_{yx}=0$ ), y coeficiente de Poisson nulo ( $D_1=D_2=0$ ), se puede escribir  $H=0$ , y, por lo tanto, la ecuación general (7.1) se convierte en:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y) \quad (7.15)$$

Se supone que las condiciones de apoyo en  $x=0$  y  $x=2a$  son del tipo comentado en el apartado anterior. Sea  $F_m(x)$  la función de Rayleigh correspondiente a dichas condiciones de contorno, en donde aquí, la variable  $l$  se sustituye por la luz  $2a$  de la losa. Las condiciones de contorno a lo largo de los bordes  $y=0$  y  $y=b$  son, en principio, arbitrarias, como en el caso de simple apoyo.

La solución complementaria es formalmente idéntica a la (7.5), sustituyendo  $\text{sen } \lambda_n x$  por la correspondiente función de Rayleigh  $F_n(x)$ , siendo  $\lambda_n$  el autovalor de dicha función.

Dicha solución complementaria es, por lo tanto:

$$w_c = \sum_{n=1}^{\infty} w_{nc}(y) F_n(x)$$

La matriz diagonal  $E_n(x)$  se convierte ahora en la siguiente:

$$E_n(x) = \text{diag}(F_n, F'_n, F''_n, F'''_n, F_n, F'_n, F''_n, F'''_n, F_n, F'_n, F''_n, F'''_n)$$

Por otra parte, la solución particular sigue idénticos pasos que en el caso de la losa simplemente apoyada.

Aquí, el valor  $h_n$  tiene, de acuerdo con la igualdad (7.14), la siguiente expresión:

$$h_n = \frac{\int_0^{2a} p(x) F_n(x) dx}{\int_0^{2a} F_n^2(x) dx} \quad (*)$$

En general conviene recordar que la solución Levy produce resultados muy rápidamente convergentes para las flechas. A medida que se derivan éstas, se introducen «ruidos numéricos» que deterioran esta convergencia. Así, los momentos flectores convergen más lentamente que las flechas, y el cálculo de los esfuerzos cortantes exige, en general, un elevado número de términos de la serie.

En relación con las funciones de Rayleigh (distintas de la trigonométrica sinusoidal) hay que precisar que deben utilizarse con un número pequeño de términos debido a que existe un problema de aproximación numérica que aparece en las funciones de orden elevado.

El cálculo de la solución final es, entonces, idéntico al que se ha descrito para la situación de simple apoyo, siendo, por lo tanto, válido el mismo programa de computador, con ligeras modificaciones.

## 7.4. Losa ortótropa circular

### 7.4.1. Introducción

La diferencia de comportamiento estructural entre un tablero con planta curva y otro recto es importante. Ello es debido a la mayor flexibilidad que presenta el borde externo con respecto al interno, ya que su longitud es mayor.

El cálculo de estos tableros curvos puede llevarse a cabo mediante un modelo monodimensional (viga curva) como se ha indicado en un capítulo anterior. Sin embargo, a medida que decrece el radio de curvatura y aumenta la relación ancho/luz, el cálculo monodimensional es menos adecuado.

De análoga manera a los tableros de puente recto, es posible analizar los de planta curva, en ciertos casos, mediante un análisis bidimensional y, en particular, usando el modelo losa ortótropa. Como entonces, la máxima dificultad estriba en traducir las propiedades reales de la sección del tablero, en las características de ortotropía adecuadas. Sin embargo, y en contraste con el caso recto, relativamente muy pocos esfuerzos se han llevado a cabo para utilizar esta teoría de la losa ortótropa, en el análisis y proyecto de los puentes curvos. Es interesante destacar aquí, no obstante,

(\*) Este desarrollo en serie de Fourier generalizada converge para cargas uniformes extendidas en un rectángulo, si bien la velocidad de la convergencia decrece cuando el lado longitudinal del rectángulo disminuye. En el caso de carga puntual, la serie no es convergente, pero la solución  $w$  sí lo es.

de la losa ortótropa. Este último procedimiento, en el estado actual del análisis, parece preferible por varios motivos. He aquí algunos:

a) Permite una generalización al análisis de losas continuas sin dificultad.

b) Análisis exacto, dentro de la teoría lineal, sin las aproximaciones de fórmulas de interpolación, coeficiente de Poisson, número de armónicos, etc.

c) Calcula sin dificultad, dentro de un mismo programa, esfuerzos generalmente más difíciles de obtener en los procedimientos tabulados, tales como reacciones, cortantes, giros en apoyos, etc., que pueden ser de interés en el proyecto.

d) Con una formulación matricial es posible incluir sin dificultad, todo el rango de variación de los parámetros de la losa, sin necesidad de distinguir entre los valores del coeficiente de torsión  $\alpha$  con respecto a la unidad.

Se han realizado modelos más o menos sofisticados de losa ortótropa, que incluyen la deformabilidad por distorsión, con objeto de ampliar el campo de aplicación del modelo losa ortótropa a un mayor número de tipos de secciones transversales. Si bien teóricamente tales modelos, ampliados de la losa ortótropa, son de gran interés, desde un punto de vista práctico parece más aconsejable abandonar, en esas situaciones, los modelos bidimensionales de losa, e intentar modelar el tablero mediante esquemas estructurales 3-D, como la lámina plegada. En efecto, el grado de aproximaciones y de idealizaciones inherentes a la teoría de losas ortótropas con rigidez de cortante, influencia del alabeo y la distorsión, por ejemplo, unido a las dificultades que aparecen en la interpretación de los resultados que se obtienen son desventajas ante la claridad conceptual (si bien mayor esfuerzo computacional) que representa un modelo 3-D como la lámina plegada. Esta situación se hace más patente cuando se desean deducir los efectos de los cortantes en el plano de la losa, en donde el modelo 3-D se hace imprescindible.

#### REFERENCIAS

- BALAS, J., y HAMISKA, A.: «Influence Surfaces of Skew Plates». *Vydaratelstvo Slovenskij Akademii Vied, Bratislava* (1964).
- BASAR, y YÜKSEL, F.: «Zur Berechnung schiefwinkliger orthotroper und isotroper Platten. Beton und Stahlbeton» (1960).
- CARMICHAEL, T. E.: «The vibration of a rectangular plate with edges elastically restrained against rotation». *Quarterly Journ. of Mech. and Applied Maths.* Vol. XII. Febrero (1959).
- COULL, A., y ERGIN, A. S.: «Analysis of Bridge Slabs Curved in Plan». *Civil Engineering and Public Works Review.* Vol. 60. Diciembre (1963).
- CUSENS, A. R., y PAMA, R. P.: «Bridge Deck Analysis» *John Wiley and Sons* (1965).
- GAVARINI, C.: «Teoria della piastra ad ortotropia polare con rigidzze variabili secondo il raggio». *Giornale del Genio Civile*, núms. 10 y 11 (1965).

- GAVARINI, C.: «Teoria del ponte in curva a travi multiple». *Costruzioni Metalliche*, núms. 3 y 6, 1965 y núm. 4 (1966).
- INGLIS, C.E.: «The determination of critical speeds, natural frequencies and modes of vibration by means of basic functions». *Trans. of the North East Coast Inst. of Engrs. and Ship-builders.* Vol. 61 (1944).
- NARUOKA, M., y OHMURA, H.: «On the analysis of a skew girder bridge by the theory of orthotropic parallelogram plates». *Proc. IABSE* 19 (1959).
- OTTER, J. R. H.; CASSELL, A. C., y HOBBS, R. E.: «Dynamic relaxation». *Proc. ICE* 35. Diciembre (1966).
- RAYLEIGH, LORD: «Theory of Sound». *Royal Academic Society.* Londres (1877).
- ROBINSON, K. E.: «Behaviour of simply supported skew slabs under concentrated loads». *Research Report* núm. 8. C. A. C. A. Londres (1959).
- RUSH, H., y HERGENRODER, A.: «Influence Surfaces for Moments in Skew Slabs». Munich. Universidad Tecnológica (1961). Traducción de C. A. C. A. Londres.
- SAMARTÍN, A.; JARIA, V., y CASTILLO, E.: «Losa ortótropa circular». *Hormigón y Acero*, núm. 118 (1976).
- SAMARTÍN, A.: «Placa ortótropa rectangular». *Revista de Obras Públicas.* Junio (1967).
- SAMARTÍN, A., y MARTÍNEZ, J.: «Reparto transversal de la sobrecarga en tableros de puentes». *Hormigón y Acero*, núm. 113 (1974).
- SAMARTÍN, A., y MARTÍNEZ, J.: «Transversal load distribution on bridge decks». I. A. S. S. Symposium. Udine, Italia (1974a).
- TIMOSHENKO, S., y WOINOWSKY-KRIEGER, S.: «Theory of Plates and Shells». *Mc Graw Hill* (1959).
- YOSHIMURA, J.: «The bending of a curvilinear orthotropic circular ring sector plate». *Japan Society of Civil Engineers.* Trans. Núm. 82, mayo (1962).
- YOSHIMURA, J.: «The bending of a curvilinear orthotropic circular ring sector plate with varying thickness». *Japan Society of Civil Engineers Trans.* Núms. 86 y 89, septiembre (1962) y enero (1963).

las contribuciones de Yoshimura (1962 y 1963), Coull (1963) y Ceradini (1965 y 1966), entre otros.

Los tableros curvos cuya sección transversal es susceptible de ser modelada mediante una losa ortótropa, pueden ser calculados introduciendo un sistema adecuado de coordenadas. Se supone que los extremos del tablero son normales a la directriz del puente, es decir, son radios de la planta circular y además éste, se encuentra simplemente apoyado en los mismos.

A continuación se estudia el caso general de una losa ortótropa circular, cuya planta se representa en la figura 7.10. Se darán aquí únicamente los resultados más importantes del análisis. Los detalles de la exposición pueden verse en Samartín y otros (1976). Se utilizará como técnica de solución el procedimiento en serie trigonométrica (solución Levy) y se considerará una formulación matricial, que permite una descripción compacta y además adecuada para una programación directa en computador.

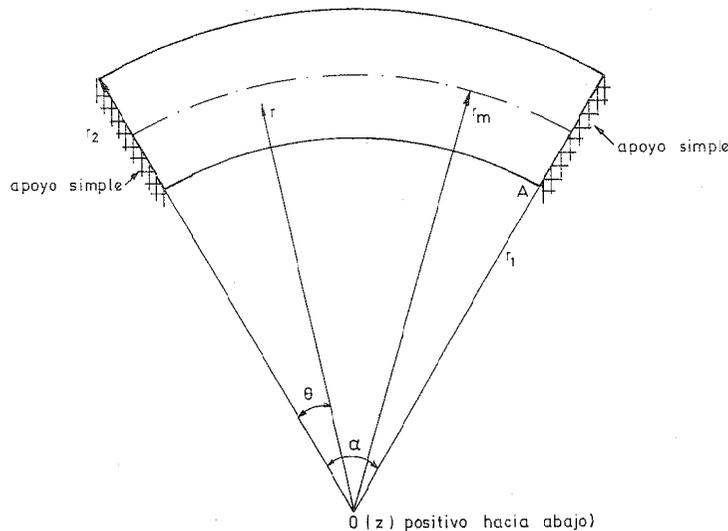


Figura 7.10. Planta de la placa ortótropa.

#### 7.4.2. Ecuación general

Se adoptan coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$ , como se indica en la figura 7.10, la superficie media corresponde al plano  $z=0$ .

La ecuación general de la losa circular homogénea y ortótropa es:

$$\frac{1}{r^4} \left\{ k_{\theta} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + 2(k_{\theta} + k) \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right\} + \frac{1}{r^3} \left\{ -2k \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^2 \partial r} + k_{\theta} \frac{\partial w}{\partial r} \right\} +$$

$$+ \frac{1}{r^2} \left\{ 2k \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial r^2} - k_{\theta} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right\} + \frac{2}{r} k_r \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + k_r \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} = p(r, \theta) \quad (7.16)$$

siendo:

$$2k = d_r + d_{\theta} + k_{r\theta} + k_{\theta r}$$

$$k_r = \frac{h^3}{12} \frac{E_r}{1 - \nu_{\theta} \nu_r}$$

$$d_{\theta} = \nu_r k_{\theta}$$

$$k_{\theta} = \frac{h^3}{12} \frac{E_{\theta}}{1 - \nu_{\theta} \nu_r}$$

$$d_r = \nu_{\theta} k_r$$

$$k_{r\theta} = \frac{h^3}{12} E_{r\theta}$$

$$k_{\theta r} = \frac{h^3}{12} E_{\theta r}$$

Estas constantes, son la contrapartida de ortotropía de las correspondientes en coordenadas rectangulares.

Si se supone que existe conservación de la energía, se debe cumplir:  $d_r = d_{\theta} = d$ .

Los esfuerzos en un punto genérico de la placa están relacionados con los movimientos de acuerdo con las siguientes fórmulas:

$$M_{\theta} = - \left\{ k_{\theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + d_{\theta} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right\}$$

$$M_r = - \left\{ k_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + d_r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right\}$$

$$M_{\theta r} = -k_{\theta r} \frac{1}{r} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)$$

$$m_{r\theta} = -k_{r\theta} \frac{1}{r} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \quad (7.17)$$

$$Q_{\theta} = - \left\{ k_{\theta} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial r} + \frac{k}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta \partial r^2} \right\}$$

$$Q_r = - \left\{ -\frac{k_{\theta} + k}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \left( k \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^2 \partial r} - k_{\theta} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{k_r}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + k_r \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} \right\}$$

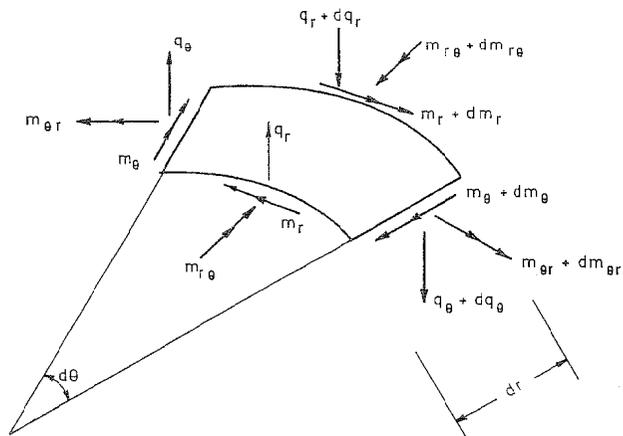


Figura 7.11. Esfuerzos en un elemento diferencial de placa.

Las relaciones de Kirchoff se definen por las igualdades:

$$S_r = Q_r + \frac{l}{r} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} \quad \text{y} \quad S_\theta = Q_\theta + \frac{\partial M_{\theta r}}{\partial r}$$

es decir

$$S_r = - \left\{ \frac{k_\theta + k + k_{r\theta}}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} (k + k_{r\theta}) \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^2 \partial r} - k_\theta \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{k_r}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + k_r \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} \right\} \quad (7.18)$$

$$S_\theta = - \left\{ \frac{1}{r^3} \left( k_\theta \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + 2k_{\theta r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2} (k_\theta - 2k_{\theta r}) \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial r} + \frac{k + k_{\theta r}}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta \partial r^2} \right\}$$

Las condiciones de contorno a lo largo de los apoyos  $\theta=0$  y  $\theta=\alpha$  son:  $w=0$  y  $M_\theta=0$ . Los otros bordes  $r=r_1$  y  $r=r_2$ , presentan condiciones generales de contorno.

### 7.4.3. Solución complementaria

Se procede con pasos idénticos al caso rectangular.

La solución de la ecuación (7.16) homogénea, es decir, con el segundo miembro nulo, se denomina solución complementaria:  $w_c(\theta, r)$ .

Esta función desarrollada en serie de Fourier es:

$$w_c = \sum_{n=1}^{\infty} w_{cn}(r) \text{ sen } \lambda_n \theta \quad (7.19)$$

con

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{\alpha} > 0$$

$$w_{cn}(r) = C_1 \beta^{t_1} + C_2 \beta^{t_2} + C_3 \beta^{t_3} + C_4 \beta^{t_4} (*)$$

$$\beta = \frac{r}{r_m} \left( r_m = \frac{r_1 + r_2}{2} \right)$$

$t_1, t_2, t_3$  y  $t_4$  son las raíces de la ecuación característica:

$$(t-1)^4 - 2\gamma_1(t-1)^2 + \gamma_2^4 = 0 \quad (7.20)$$

Los parámetros  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  definen las características de ortotropía de la losa, y sus expresiones son:

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} \left( 1 + 2 \lambda_n^2 \frac{k}{k_r} + \frac{k_\theta}{k_r} \right) \geq \frac{1}{2}$$

$$\gamma_2 = \sqrt[4]{\frac{k_\theta}{k_r}} \sqrt{\lambda_n^2 - 1} \geq 0$$

Según los valores relativos de estos parámetros se pueden distinguir varios casos, a los que corresponden las raíces  $t_j = (j=1, 2, 3, 4)$ , que se indican en la tabla 7.8.

TABLA 7.8

Raíces de la ecuación característica

Caso	Raíces $t_j$	Observaciones
1. $\gamma_2^2 > \gamma_1$	$1 \pm (s_1 \pm s_2 \sqrt{-1})$	$s_1 = \gamma_2 \cos \varphi$ $s_2 = \gamma_2 \text{ sen } \varphi$ $\varphi = \frac{1}{2} \cos^{-1} (\gamma_1 \gamma_2^{-2})$
3. $\gamma_2^2 = \gamma_1$	$1 \pm s$ (dobles)	$s = \gamma_2$
3.1. $\gamma_2^2 < \gamma_1$ $\gamma_2 \neq 0$	$1 \pm (s_1 \pm s_2)$	$s_1 = \gamma_2 \text{ Ch } \varphi$ $s_2 = \gamma_2 \text{ Ch } \varphi$ $\varphi = \frac{1}{2} \text{Ch}^{-1} (\gamma_1 \gamma_2^{-1})$
3.2. $\gamma_2^2 < \gamma_1$ $\gamma_2 = 0$	$1$ (doble) $1 \pm s_2$	$s_2 = (2\gamma_1)^{1/2}$

(\*) Si existen raíces dobles el término  $\beta^{t_i}$  debe sustituirse por  $\beta^{t_i} \ln \beta$ .

A partir de la expresión (7.19) se pueden utilizar las fórmulas (7.17) y (7.18) y obtener los resultados de interés en el cálculo. Estos se pueden coleccionar en un vector  $\mathbf{R}(\theta, r)$  de resultados, de dimensión  $(11 \times 1)$ , definido como sigue:

$$\mathbf{R}(\theta, r) = \left\{ w, \frac{\partial w}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}, M_r, M_\theta, M_{r\theta}, M_{\theta r}, Q_r, Q_\theta, S_r, S_\theta \right\}^T$$

La solución complementaria da origen a la siguiente matriz de resultados:

$$\mathbf{R}_c(\theta, r) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}_n(\theta) \mathbf{R}_{cn}(r)$$

siendo:

$$\mathbf{E}_n(\theta) = \text{diag}(a, a, b, a, a, b, b, a, b, a, b)$$

con

$$a = \text{sen } \lambda_n \theta \quad \text{y} \quad b = \text{cos } \lambda_n \theta$$

$$\mathbf{R}_{cn}(r) = \mathbf{GD} \{ \beta^{1+s_1}, \mathbf{B}(1+s_1) \mathbf{P}(\beta), \beta^{1-s_1}, \mathbf{B}(1-s_1) \mathbf{P}(\beta) \} \mathbf{A} = \mathbf{F}_n \mathbf{A} \quad (7.20)$$

siendo

$\mathbf{G}$  la matriz de dimensión  $(11 \times 4)$  definida en la tabla 7.9.

$\mathbf{B}(s_1)$ : matriz de dimensión  $(4 \times 2)$  definida en la tabla 7.10, según el caso de ortotropía de la losa.

$\mathbf{P}(\beta)$ : matriz de dimensión  $(2 \times 2)$  dependiente de la variable  $r$ . Se define, asimismo, en la tabla 7.10, según el tipo de losa ortótropa.

$\mathbf{A}$ : matriz columna de dimensión  $(4 \times 1)$  que contiene las cuatro constantes arbitrarias de la solución complementaria.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -\beta^{-2} & \beta^{-2} & 0 \\ 0 & 2\beta^{-3} & -3\beta^{-3} & \beta^{-3} \end{bmatrix}$$

$$\beta = \frac{r}{r_m}$$

TABLA 7.9

Matriz  $\mathbf{G}$

1	0	0	0
0	$1/r_m$	0	0
$\lambda/\beta r_m$	0	0	0
$\frac{\lambda_n^2 d}{\beta^2 r_m^2}$	$\frac{d}{\beta r_m^2}$	$\frac{k_r}{r_m^2}$	0
$\frac{k_\theta \lambda_n^2}{\beta^2 r_m^2}$	$\frac{k_\theta}{\beta r_m^2}$	$\frac{d}{r_m^2}$	0
$\frac{k_{r\theta} \lambda_n}{\beta^2 r_m^2}$	$\frac{\lambda_n k_{r\theta}}{\beta r_m^2}$	0	0
$\frac{k_\theta \lambda_n}{\beta^2 r_m^2}$	$\frac{k_\theta \lambda_n}{\beta r_m^2}$	0	0
$\frac{\lambda_n^2 (k_\theta + k)}{\beta^3 r_m^3}$	$\frac{(\lambda_n^2 k + k_\theta)}{\beta^2 r_m^3}$	$\frac{k_r}{\beta r_m^3}$	$\frac{k_r}{r_m^3}$
$\frac{\lambda_n^3 k_\theta}{\beta^3 r_m^3}$	$\frac{\lambda_n k_\theta}{\beta^2 r_m^3}$	$\frac{\lambda_n k}{\beta r_m^3}$	0
$\frac{(k_\theta + k + k_{r\theta}) \lambda_n^2}{\beta^3 r_m^3}$	$\frac{\lambda_n^2 (k_{r\theta} + k) + k_\theta}{\beta^2 r_m^3}$	$\frac{k_r}{\beta r_m^3}$	$\frac{k_r}{r_m^3}$
$\frac{\lambda_n^3 k_\theta - 2 \lambda_n k_{\theta r}}{\beta^3 r_m^3}$	$\frac{\lambda_n (k_\theta - 2 k_{\theta r})}{\beta^2 r_m^3}$	$\frac{\lambda_n (k + k_{\theta r})}{\beta r_m^3}$	0

El caso 3.2. es ligeramente diferente. En efecto se tiene entonces que la expresión (7.20) se convierte en la siguiente:

$$\mathbf{R}_{cn}(r) = \mathbf{GD} \{ \beta \mathbf{B}_2(1) \mathbf{P}_2(\beta), \beta \mathbf{B}_3(1) \mathbf{P}_3(\beta) \} \mathbf{A} = \mathbf{F}_n \mathbf{A} \quad (7.20a)$$

siendo  $\mathbf{B}_i(1)$  la matriz  $\mathbf{B}(s_1)$  del caso  $i$  particularizada para  $s_1 = 1$  ( $i = 2$  y  $3$  corresponden a los casos 2 y 3.1, respectivamente).  $\mathbf{P}_i(\beta)$  es la matriz  $\mathbf{P}(\beta)$  del caso  $i$ .

7.4.4. Solución particular

Se desarrolla la solución particular asimismo en serie de Fourier, obteniendo el vector de resultados  $\mathbf{R}_0(\theta, r)$ :

$$R_o(\theta, r) = \sum_{n=1}^{\infty} R_{on}(\beta) \text{sen } \lambda_n \theta$$

con:  $\beta = \frac{r}{r_m}$  y  $\lambda_n = \frac{n\pi}{\alpha}$

TABLA 7.10

Matrices B(s<sub>1</sub>) y P(β)

Caso	Matriz B(s <sub>1</sub> )		Matriz P(β)	
1	1	0	cos(s <sub>2</sub> ln β)	sen(s <sub>2</sub> ln β)
	s <sub>1</sub>	s <sub>2</sub>		
	s <sub>1</sub> <sup>2</sup> - s <sub>2</sub> <sup>2</sup>	2s <sub>1</sub> s <sub>2</sub>	-sen(s <sub>2</sub> ln β)	cos(s <sub>2</sub> ln β)
	s <sub>1</sub> <sup>3</sup> - 3s <sub>1</sub> s <sub>2</sub> <sup>2</sup>	-s <sub>2</sub> <sup>3</sup> + 3s <sub>2</sub> s <sub>1</sub> <sup>2</sup>		
2	1	0	1	ln β
	1	1		
	s <sup>2</sup>	2 s	0	1
	s <sup>3</sup>	3s <sup>2</sup>		
3.1.	1	0	$\frac{1}{2}(\beta^{s_2} + \beta^{-s_2})$	$\frac{1}{2}(\beta^{s_2} - \beta^{-s_2})$
	s <sub>1</sub>	s <sub>2</sub>		
	s <sub>1</sub> <sup>2</sup> + s <sub>2</sub>	2s <sub>1</sub> s <sub>2</sub>	$\frac{1}{2}(\beta^{s_2} - \beta^{-s_2})$	$\frac{1}{2}(\beta^{s_2} + \beta^{-s_2})$
	s <sub>1</sub> <sup>3</sup> + 3s <sub>1</sub> s <sub>2</sub> <sup>2</sup>	s <sub>2</sub> <sup>3</sup> + 3s <sub>2</sub> s <sub>1</sub> <sup>2</sup>		

El tipo de solución particular R<sub>on</sub>(β) depende de la carga actuante. A efectos de esta exposición sólo se describen dos tipos de carga:

1. Carga uniforme extendida a toda la placa, es decir:

$$p(r, \theta) = p_0$$

En esta situación llamando  $\mu_1 = (\mu'_1 + \mu'_2)^{\frac{1}{2}}$  y  $\mu_2 = (\mu' - \mu'_2)^{\frac{1}{2}}$ , con

$$\mu'_1 = \frac{k_\theta + 9k}{k_\theta}$$

$$\mu'_2 = \frac{3(k_\theta^2 + 9k^2 + 2kk_\theta - 8k_r k_\theta)^{\frac{1}{2}}}{k_\theta}$$

se pueden distinguir tres casos, para definir la expresión de R<sub>on</sub>(β).

Caso a:

$$\lambda_n \neq \mu_1 \quad \text{y} \quad \lambda_n \neq \mu_2$$

$$R_{on}(\beta) = GDB_2(4) P_2(\beta) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{w_0^A}{\beta^4}$$

Caso b:

$$\lambda_n = \mu_1 \quad \text{ó} \quad \lambda_n = \mu_2 \quad \text{pero} \quad \mu_1 \neq \mu_2$$

$$R_{on}(\beta) = GDB_2(4) P_2(\beta) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{w_0^B}{\beta^4 \ln \beta}$$

Caso c:

$$\lambda_n = \mu_1 = \mu_2$$

$$R_{on}(\beta) = G\{DB_2(4) P_2(\beta) \begin{bmatrix} 0 \\ \ln \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\beta^2 \\ 18\beta \end{bmatrix}\} \frac{w_0^C}{\beta^4 (\ln \beta)^2}$$

siendo B<sub>2</sub>(4) la expresión de la matriz B(s<sub>1</sub>) correspondiente al caso i=2 y con s<sub>1</sub>=4.

$$w_0^A = p_0 \frac{\beta^4 r_m^4}{\lambda_n^4 k_\theta - \lambda_n^2 (2k_\theta + 18k) + 72k_r - 8k_\theta}$$

$$w_0^B = p_0 \frac{\beta^4 \ln \beta r_m^4}{-6(2k\lambda_n^2 + k_\theta) + 102k_r}$$

$$w_0^C = p_0 \frac{\beta^4 (\ln \beta)^2 r_m^4}{-2(2k\lambda_n^2 + k_\theta) + 106k_r}$$

2. Cuchillo de carga p(θ) a lo largo del radio.

$$r = r_k = \beta_k r_m$$

En este caso, la solución particular es:

$$R_{on}(\beta) = GDB(1 + s_1) P(\beta) A_{12}^0 \quad \text{si} \quad \beta_k \geq \beta \geq \beta_1$$

$$R_{on}(\beta) = GDB(1 - s_1) P(\beta) A_{34}^0 \quad \text{si} \quad \beta_2 \geq \beta \geq \beta_k$$

Las expresiones de G, B(s<sub>1</sub>) y P(β) para cada caso de ortotropía han

sido dadas anteriormente. Los vectores columna  $A_{12}^0$  y  $A_{34}^0$ , de dimensión  $(2 \times 1)$ , se muestran en la tabla 7.11.

El caso 3.2., es especial y tiene como expresión:

$$R_{0n}(\beta) = GDB_2(1) P_2(\beta) A_{12}^0 \quad \text{si} \quad \beta_k \geq \beta \geq \beta_1$$

$$R_{0n}(\beta) = GDB_3(1) P_3(\beta) A_{34}^0 \quad \text{si} \quad \beta_2 \geq \beta \geq \beta_k$$

y los valores de los vectores  $A_{12}^0$  y  $A_{34}^0$  vienen dados, para este caso, por las igualdades:

$$A_{12}^0 = \beta_k^2 P_2^{-1}(\beta) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{p_{0n} r_m^4}{2\gamma_1 k_r}$$

$$A_{34}^0 = \beta_k^2 P_3^{-1}(\beta) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{p_{0n} r_m^4}{2\gamma_1 k_r}$$

TABLA 7.11

Solución particular

Caso	$A_{12}^0$	$A_{34}^0$	$P^{-1}(\beta)$	
1	$\beta_k^{-s_1} P^{-1}(\beta) \begin{bmatrix} \frac{1}{s_1} \\ 1 \\ -s_2 \end{bmatrix} h_n$	$\beta^{2+s_1} P^{-1}(\beta) \begin{bmatrix} \frac{1}{s_1} \\ \frac{1}{s_2} \end{bmatrix} h_n$	$\cos(s_2 \ln \beta_k)$	$-\text{sen}(s_2 \ln \beta_k)$
			$-\text{sen}(s_2 \ln \beta_k)$	$\cos(s_2 \ln \beta_k)$
2	$\beta_k^{-s} P^{-1}(\beta) \begin{bmatrix} \frac{1}{s} \\ -1 \end{bmatrix} h_n$	$\beta^{2+s} P^{-1}(\beta) \begin{bmatrix} \frac{1}{s} \\ 1 \end{bmatrix} h_n$	1	$-\ln \beta_k$
			0	1
3.1	$\beta_k^{-s_1} P^{-1}(\beta) \begin{bmatrix} \frac{1}{s_1} \\ 1 \\ -s_2 \end{bmatrix} h_n$	$\beta^{2+s_1} P^{-1}(\beta) \begin{bmatrix} \frac{1}{s_1} \\ \frac{1}{s_2} \end{bmatrix} h_n$	$\frac{1}{2}(\beta_k^{s_2} + \beta_k^{-s_2})$	$\frac{1}{2}(-\beta_k^{s_2} + \beta_k^{-s_2})$
			$\frac{1}{2}(-\beta_k^{s_2} + \beta_k^{-s_2})$	$\frac{1}{2}(\beta_k^{s_2} + \beta_k^{-s_2})$
con $h_n = \frac{p_{0n} r_m^4}{4\gamma_2^2 k_r}$ $p_{0n} = \frac{2}{\alpha r_m} \int_0^\alpha p(\theta) \text{sen } \lambda_n \theta d\theta.$				

7.4.5. Solución final

Se procede, para la determinación de la solución final, de un modo totalmente análogo al caso de placa ortótropa rectangular.

La solución final  $R(\theta, r)$  es, entonces:

$$R(\theta, r) = R_c(\theta, r) + R_o(\theta, r) \tag{7.21}$$

Las constantes A se obtienen al imponer las condiciones de contorno. Se estudian dos clases de condiciones:

a) Condiciones homogéneas de borde.

Todas las condiciones de bordes libres, apoyados, empotrados, etc., de la placa pueden formularse de un modo general mediante la siguiente ecuación matricial, para cada borde  $j$  ( $j=1, 2$ ):

$$k_{dj} \begin{bmatrix} -\frac{\partial w}{\partial r} \\ w \end{bmatrix} + k_{pj} \begin{bmatrix} M_r \\ S_r \end{bmatrix} = 0 \tag{7.22}$$

El borde  $j$  se refiere al radio  $r_j = \beta r_m$ . Las matrices  $k_{dj}$  y  $k_{pj}$  están formadas por ceros y unos exclusivamente, de modo que  $k_{dj} + k_{pj} = I_2$  (matriz unidad de dimensión  $2 \times 2$ ). Esto implica que al imponer una coacción (1 en la diagonal de la  $k_{dj}$ ), la reacción es desconocida y no puede ser especificada (es decir, el correspondiente elemento de  $k_{dj}$  es nulo).

Para cada armónico  $n$ , se obtiene el vector de constantes A de la solución complementaria mediante la resolución del sistema de ecuaciones siguiente:

$$KA = -H$$

con

$$K = \begin{bmatrix} k_{d1} \begin{bmatrix} -g_{12} \\ g_{11} \end{bmatrix} + k_{p1} \begin{bmatrix} g_{14} \\ g_{110} \end{bmatrix} \\ k_{d2} \begin{bmatrix} -g_{22} \\ g_{21} \end{bmatrix} + k_{p2} \begin{bmatrix} g_{24} \\ g_{210} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} k_{d1} \begin{bmatrix} -g_{12}^0 \\ g_{11}^0 \end{bmatrix} + k_{p1} \begin{bmatrix} g_{14}^0 \\ g_{110}^0 \end{bmatrix} \\ k_{d2} \begin{bmatrix} -g_{22}^0 \\ g_{210}^0 \end{bmatrix} + k_{p2} \begin{bmatrix} g_{24}^0 \\ g_{210}^0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

siendo

$g_{jk}$  el vector de dimensión  $1 \times 4$  correspondiente a la fila  $k$  de  $F_n$  para  $\beta = \beta_j (j=1, 2, 3, 4)$  y  $k=1, 2, 4, 10$   
 $g_{jk}^0$  es el elemento  $k$  de  $R_{0n}$  para  $\beta = \beta_j$ .

Determinado  $A$  para cada armónico, se calcula  $R_{cn}(r)$  mediante las fórmulas (7.20) y, por último, la solución final, usando la (7.21).

b) Vigas de borde.

Se supone que existen en los bordes  $j=1, 2$  sendas vigas definidas por sus rigideces de flexión ( $EI_j$ ) y torsión ( $GJ_j$ ).

La matriz de rigidez,  $R_j$ , en ejes locales de la viga existente en el borde  $j$ , se puede expresar, para el armónico  $n$ -ésimo, según la figura 7.12, como sigue:

$$\begin{bmatrix} G_{ij} \\ Z_{1j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r_j^2} (\lambda^2 GJ_j + EI_j) & \frac{\lambda^2}{r_j^3} (EI_j + GJ_j) \\ \frac{\lambda^2}{r_j^3} (EI_j + GJ_j) & \frac{\lambda^2}{r_j^3} (\lambda^2 EI_j + GJ_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_j \\ w_j \end{bmatrix}$$

o en forma más compacta:

$$\begin{bmatrix} G_{ij} \\ Z_{1j} \end{bmatrix} = R_j \begin{bmatrix} \phi_j \\ w_j \end{bmatrix} \tag{7.23}$$

Suponiendo que la viga de borde presenta un eje principal de inercia perpendicular al eje de coordenadas  $r$ , y su centro de gravedad está situado en el plano de la placa (\*), la transformación de ejes de la viga a ejes de la placa es, para el borde  $j$ :

$$\begin{bmatrix} M_r \\ S_r \end{bmatrix}_j = (-1)^j T_j \cdot R_j \cdot T_j^T \begin{bmatrix} -\frac{\partial w}{\partial r} \\ w \end{bmatrix}_j \tag{7.24}$$

en donde, ahora,  $(M_r, S_r)$  y  $(-\frac{\partial w}{\partial r}, w)$  son las amplitudes del armónico  $n$  de los esfuerzos y movimientos de la losa en el borde  $j (j=1, 2)$ .

La expresión de la matriz de transformación de ejes se obtiene análogamente al caso de la placa ortótropa rectangular, alcanzándose el resultado:

$$T_j = \begin{bmatrix} 1 & d_j \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(\*) Estas hipótesis son necesarias para no considerar la compatibilidad de movimientos en el plano de la placa y, por tanto, la necesidad del estudio simultáneo de la laja circular.

con  $d_j$ =distancia del centro de gravedad de la viga al borde de  $j$  de la losa.

La ecuación (7.24) presenta la misma estructura matemática que la (7.22) considerando:

$$k_{pj} = I_2 \quad \text{y} \quad k_{dj} = (-1)^j T_j R_j T_j$$

Por lo tanto, se puede realizar el cálculo de forma análoga al caso anterior, correspondiente a las condiciones homogéneas.

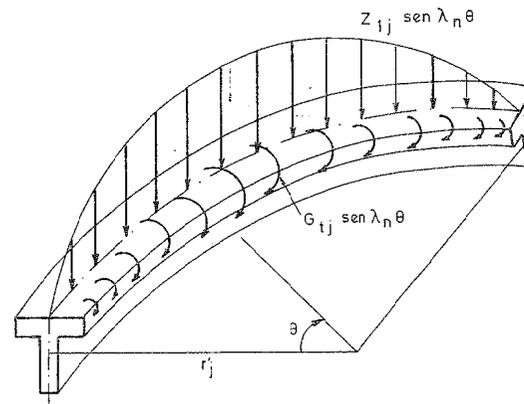


Figura 7.12. Matriz de rigidez de la viga  $j$ . Armónico  $n$ -ésimo.

7.4.6. Aplicación

La teoría de la losa ortótropa circular expuesta anteriormente puede aplicarse al cálculo de tableros de puentes, siguiendo la misma pauta que en el caso de losa rectangular. Es decir, puede realizarse el análisis de acuerdo con uno de los dos objetivos siguientes:

- a) Estudio del reparto transversal.
- b) Cálculo directo bidimensional.

En el primer caso, se deberían determinar los esfuerzos a todo ancho, considerando el tablero como una barra curva (circular). Se comprende que normalmente este cálculo representa mayor dificultad que en el caso de barra recta. Por ello, en general, parece más adecuado un cálculo directo bidimensional del tablero, abandonando intentos —que han sido escasos debido a la anterior dificultad— de tabulaciones del tipo de Guyon-Massonet-Rowe. Por otra parte, este cálculo directo puede programarse de un modo sencillo, siendo válido, con ligeras modificaciones, el diagrama de flujo lógico (flow-chart) que se ha indicado, para el tablero recto, en la figura 7.5.

Se ha escrito un programa general en lenguaje Basic, para un compu-

tador digital de 16 k bytes de memoria central. La reducida capacidad del computador certifica la bondad y fácil implementación del programa basado en la teoría expuesta anteriormente.

A título de ejemplo, se estudia un tablero de puente curvo en planta, simplemente apoyado en sus bordes rectos, y libre en los curvos, y de sección radial constante.

El material de la losa es un hormigón de módulo de elasticidad  $E = 3 \times 10^6 \text{ tm}^{-2}$  y coeficiente de Poisson  $\nu = 0,20$ .

Una posible losa (\*) ortótropa equivalente presenta las siguientes características:

- $E_r = 2200000 \text{ tm}^{-2}$
- $E_\theta = 2400000 \text{ tm}^{-2}$
- $\nu_r = 0,20$
- $\nu_\theta = 0,18$
- $E_{r\theta} = 115000 \text{ tm}^{-2}$
- $E_{\theta r} = 2600000 \text{ tm}^{-2}$
- $h = 1,40 \text{ m}$
- $r_1 = 73,75 \text{ m}$
- $r_2 = 86,50 \text{ m}$
- $\alpha = 0,375 \text{ radianes}$

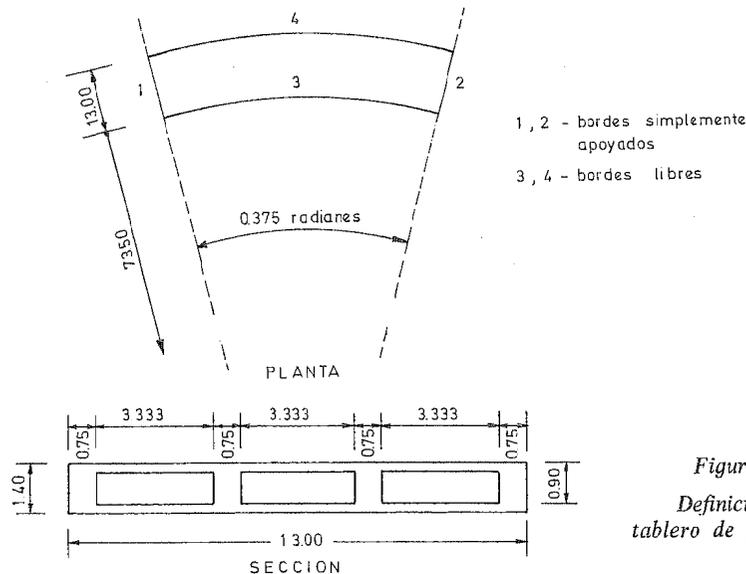


Figura 7.13. Definición del tablero de puente.

(\*) El objetivo de este ejemplo es ilustrativo de la solución de la losa ortótropa circular y no trata el problema de la bondad de la idealización estructural de la losa real indicada.

Las acciones a que está sometido, son las recomendadas por la Instrucción Española-72; y se calculan las reacciones de apoyo y derivadas circunferenciales en los puntos  $A_1, A_2, A_3$ , en el borde recto; y las flechas y momentos en los puntos  $C_1, C_2, C_3$  del centro del vano (Fig. 7.14).

Supuesto un peso específico del material de  $2,5 \text{ tm}^{-3}$ ; además del peso propio, el tablero está sometido a una sobrecarga uniforme de  $0,400 \text{ tm}^{-2}$  y a la acción del vehículo de 60 t, de acuerdo con la Instrucción Española-72.

Todos los resultados de interés, desde el punto de vista del proyecto —en los puntos  $A_1, A_2, A_3, C_1, C_2, C_3$ , cuya situación se indica en la figura 7.14 con la posición del vehículo de 60 t en la posición de la figura 7.15—, se muestran en la tabla 7.12.

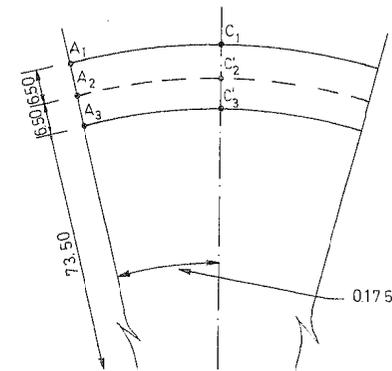


Figura 7.14. Puntos de cálculo.

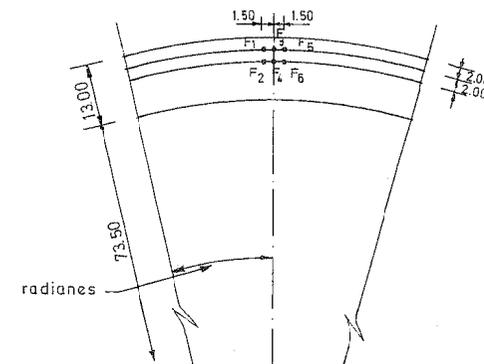


Figura 7.15. Posición del vehículo de 60 Tm.

TABLA 7.12

Resultados del cálculo

PUNTO DE ESTUDIO	ACCIONES			
	Peso propio	Sobrecarga uniforme	Vehículo de 60 t	Total
$A_1$ — $S_\theta$ (en t/m)	21,46	4,85	2,39	28,70
$Q_\theta$ (en t/m)	25,73	5,81	2,35	33,89
$\frac{l}{r} w_\theta (\times 10^4)$	50,37	11,38	7,80	69,55
$M_{r,\theta}$ (en tm/m)	- 3,87	- 0,87	- 1,14	- 5,88
$M_{\theta}$ (en tm/m)	- 87,64	- 19,81	- 25,93	- 113,38
$A_2$ — $S_\theta$ (en t/m)	22,27	5,03	2,20	29,50
$Q_\theta$ (en t/m)	25,47	5,76	2,17	33,40
$\frac{l}{r} w_\theta (\times 10^4)$	42,16	9,53	5,66	57,35
$M_{r,\theta}$ (en tm/m)	- 2,82	- 0,64	- 1,04	- 4,50
$M_{\theta}$ (en tm/m)	- 63,87	- 14,44	- 23,37	- 101,68
$A_3$ — $S_\theta$ (en t/m)	20,63	4,66	2,04	27,33
$Q_\theta$ (en t/m)	26,01	5,88	1,93	33,82
$\frac{l}{r} w_\theta (\times 10^4)$	36,74	8,31	3,61	48,66
$M_{r,\theta}$ (en tm/m)	- 1,55	- 0,35	0,91	- 2,81
$M_{\theta}$ (en tm/m)	- 35,27	- 7,97	- 20,99	- 64,23
$C_1$ — $w$ (en mm)	51,01	11,51	8,59	71,11
$M_{\theta\theta}$ (en tm/m)	222,58	50,32	45,15	318,05
$C_2$ — $w$ (en mm)	39,62	8,90	5,64	54,16
$M_{r,\theta}$ (en tm/m)	3,89	0,82	- 1,38	3,39
$M_{\theta\theta}$ (en tm/m)	204,91	46,32	31,41	282,67
$C_3$ — $w$ (en mm)	31,71	7,21	3,19	42,11
$M_{\theta\theta}$ (en tm/m)	195,33	44,16	18,38	257,87

### 7.5. Losa ortótropa oblicua

La importancia de este tipo estructural procede del hecho de que, en la actualidad, el número de puentes oblicuos se ha incrementado extraordinariamente, debido a la preponderancia que ha adquirido el trazado geométrico de la vía frente a la obra de fábrica. Esta, por lo tanto, se proyecta de acuerdo con las exigencias de dicho trazado.

Sin embargo la oblicuidad representa una complicación extraordinaria, no sólo de diseño, sino también de cálculo. Sus efectos, como se ha indicado en un capítulo anterior, dependen no sólo del ángulo de esviaje

—ángulo formado por el lado de apoyo con la perpendicular a los lados libres de la losa sino también de la relación ancho/luz y, particularmente, de las condiciones de borde. Este último aspecto corresponde al hecho de que la losa sea continua o no. En el primer supuesto, la influencia de la oblicuidad es menor. La existencia de vigas de rigidización de los bordes libres supone una aminoración de los efectos del esviaje. La elasticidad de los soportes de apoyo tiene una importancia decisiva en los resultados de los esfuerzos de una losa oblicua.

Los efectos más característicos de la oblicuidad se relacionan a continuación:

a) Las líneas isostáticas no son paralelas entre sí a través del ancho, ya que en la zona cercana al borde libre son paralelas a éste, y en la zona central tienden a ser perpendiculares a los bordes apoyados.

b) Aparecen esfuerzos considerables a torsión, y momentos negativos en el borde obtuso.

c) A lo largo del apoyo la variación de las reacciones es muy fuerte, desde un máximo valor en el vértice obtuso hasta un mínimo (a veces negativo, es decir, con tendencia a levantarse la losa) en el ángulo agudo. Este hecho explica que si la losa es flexible y los apoyos elásticos, la anterior distribución de reacciones se suavice. Si la losa posee una elevada rigidez torsional (caso de sección multicelular) aparecen en el proceso de esta redistribución de reacciones momentos flectores importantes a lo largo de la línea entre apoyos.

Una intuición estructural posible (muy grosera) corresponde a la indicada en la figura 7.16, que sustituye la losa continua por una viga de luces AB - BC - CD.

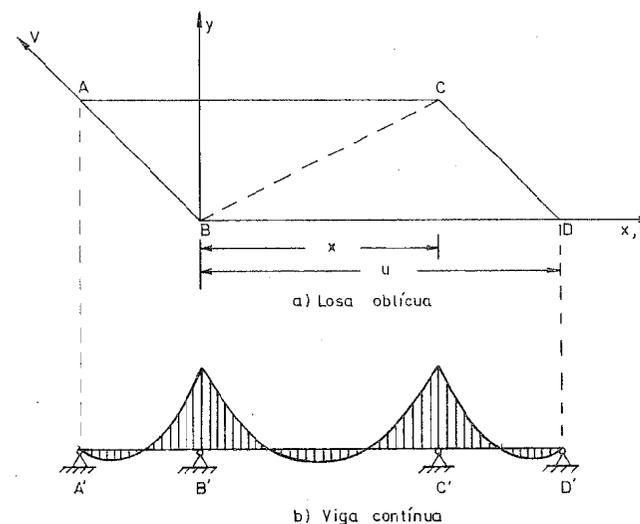


Figura 7.16. Comportamiento de la losa oblicua.

La ecuación diferencial que rige el comportamiento estructural de la losa oblicua se obtiene, simplemente, mediante la aplicación, en la ecuación diferencial (7.1), del cambio de coordenadas siguiente:

$$\begin{aligned} u &= x + y \operatorname{tg} \varphi \\ v &= \frac{y}{\cos \varphi} \end{aligned} \quad (7.24)$$

con lo que se deduce la ecuación general:

$$\begin{aligned} (D_x + 2H \operatorname{tg}^2 \varphi + D_y \operatorname{tg}^4 \varphi) \frac{\partial^4 w}{\partial u^4} + \left( 4H \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \varphi} + 4D_y \frac{\operatorname{tg}^3 \varphi}{\cos^3 \varphi} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial u^3 \partial v} + \\ + \left( 2H \frac{1}{\cos^2 \varphi} + 6D_y \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial u^2 \partial v^2} + \left( 4D_y \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos^3 \varphi} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial u \partial v^3} + \\ + D_y \frac{1}{\cos^4 \varphi} \frac{\partial^4 w}{\partial v^4} = p(x, y) \end{aligned} \quad (7.25)$$

y los esfuerzos se obtienen asimismo mediante el cambio (7.24), es decir:

$$\begin{aligned} M_x &= - \left\{ D_x \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + D_1 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \operatorname{tg}^2 \varphi + 2 \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \varphi} \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \right) \right\} \\ M_y &= - \left\{ D_y \left( \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \operatorname{tg}^2 \varphi + 2 \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \varphi} \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \right) + D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \right\} \\ M_{xy} &= - D_{xy} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \operatorname{tg} \varphi + \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} \frac{1}{\cos \varphi} \right\} \\ Q_x &= - \left\{ D_x \frac{\partial^3 w}{\partial u^3} + (D_{xx} + D_1) \left( \frac{\partial^3 w}{\partial u^3} \operatorname{tg}^2 \varphi + 2 \frac{\partial^3 w}{\partial u^2 \partial v} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \varphi} + \frac{\partial^3 w}{\partial u \partial v^2} \frac{1}{\cos^2 \varphi} \right) \right\} \\ Q_y &= - \left\{ D_y \left( \frac{\partial^3 w}{\partial u^3} \operatorname{tg}^3 \varphi + 3 \frac{\partial^3 w}{\partial u^2 \partial v} \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{\cos \varphi} + 3 \frac{\partial^3 w}{\partial u \partial v^2} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos^2 \varphi} + \frac{\partial^3 w}{\partial v^3} \frac{1}{\cos^3 \varphi} \right) + \right. \\ &\quad \left. (D_{xy} + D_2) \left( \frac{\partial^3 w}{\partial u^3} \operatorname{tg} \varphi + \frac{\partial^3 w}{\partial u^2 \partial v} \frac{1}{\cos \varphi} \right) \right\} \end{aligned} \quad (7.26)$$

A pesar de su evidente sencillez geométrica (no así analítica, como se puede observar de las expresiones anteriores), la losa oblicua, al contrario de las losas rectangulares y de planta circular, no puede ser resuelta de un modo analítico general. Soluciones tales como el método de las reflexiones biarmónicas de Lerais no pueden ser incluidas dentro de esta categoría. Existen ábacos para ciertos resultados y ángulos de esviaje, como

los realizados por Rüş y Hergenroder (1961), o Balas y Hamska (1964), pero su utilidad es cuestionable.

Sólo es posible, en general, el recurso a los métodos numéricos para calcular la losa ortótropa oblicua: diferencias finitas, emparrillado, elementos finitos, colocación, Galerkin, etc.

En los capítulos posteriores se describirán algunos de estos métodos, tales como elementos finitos y emparillado, que constituyen potentes recursos de cálculo de losas oblicuas ortótropas.

No obstante, el método de las diferencias finitas ha sido utilizado muy frecuentemente en el cálculo de la losa ortótropa. La mayoría de las soluciones —como la de Robinson (1959)— se refieren a la losa isótropa. Naruoka y Ohmura (1959) han presentado el análisis de la losa ortótropa general considerando coordenadas oblicuas ( $u, v$ ), en lugar de las rectangulares ( $x, y$ ), como hizo Robinson. Sin embargo, suponen, en el cálculo, que el coeficiente de Poisson es cero y dan resultados para dos casos límites de losa ortótropa: losa sin torsión ( $H=0$ ), y losa isótropa con torsión ( $H=D_x=D_y$ ), si bien su planteamiento es general. Una fórmula de interpolación entre ambas situaciones extremas, para el cálculo de una losa genérica, no ha podido ser deducida por los citados autores.

El planteamiento en diferencias finitas de la ecuación (7.25) es complejo y engorroso. Estos inconvenientes crecen en la deducción del esquema en diferencias finitas en los puntos cercanos a los bordes y en el planteamiento de las condiciones de sustentación. Por ello, y a pesar de las distintas técnicas —algunas de ellas muy populares (\*)— de resolución de las ecuaciones en diferencias finitas, el método se utiliza raramente en los problemas de contorno, como es el caso del cálculo de la placa ortótropa.

A efectos ilustrativos, se indica la formulación en diferencias finitas de la losa ortótropa de Basar y Yüksel, únicamente para un punto interior. Detalles pueden verse en la referencia correspondiente. Se comprueba que no se despreja, en principio, ningún término, y constituye una formulación general.

Se parte de la ecuación de la losa ortótropa en coordenadas rectangulares ( $x, y$ ):

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p$$

que puede escribirse, por conveniencia, como sigue:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + (2H - D_x - D_y) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = p$$

Si se denomina

(\*) Como el procedimiento de relajación dinámica de Otter (1966)

$$U = D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad X = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad Y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \text{y} \quad D = 2H - D_x - D_y$$

se obtiene:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + D \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = p \tag{7.27}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + D \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = p$$

$$U = X D_x + Y D_y$$

Para cada punto (x, y) interior de la losa, se considera la malla (molécula) que se indica en la figura 7.17.

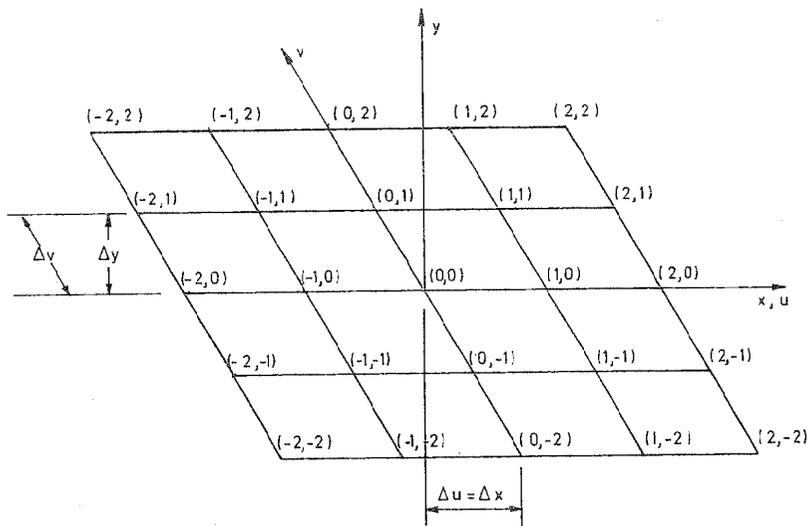


Figura 7.17. Molécula de cálculo. Punto interior. Definición.

Si se denomina por simplicidad  $(i, j) = w(i, j)$ , las derivadas en el punto interior  $0(0, 0)$  se aproximan como sigue:

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\right)_0 = \frac{1}{\Delta u^2} \{(1, 0) + (-1, 0) - 2(0, 0)\}$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}\right)_0 = \frac{1}{\Delta u \Delta v} \{(1, 1) + (-1, -1) - (1, -1) - (-1, 1)\} \tag{7.28}$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right)_0 = \frac{1}{\Delta v^2} \{(0, 1) + (0, -1) - 2(0, 0)\}$$

Con estas expresiones (7.28) se procede, mediante las ecuaciones de cambio de coordenadas (7.24), a la determinación de

$$X = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad Y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \text{y} \quad U$$

en el punto (0, 0). Por último, la ecuación (7.25) de la losa ortótropa se discretiza, para el punto  $0(0, 0)$ , en otra algebraica del siguiente tipo, supuesto el convenio de índices repetidos:

$$a_{ijo}(i, j) = \bar{p}_0 \Delta_y^4 \tag{7.29}$$

$$(i, j) = 2, 1, 0, -1, -2$$

La ecuación (7.29) se representa en forma esquemática en la figura 7.18.

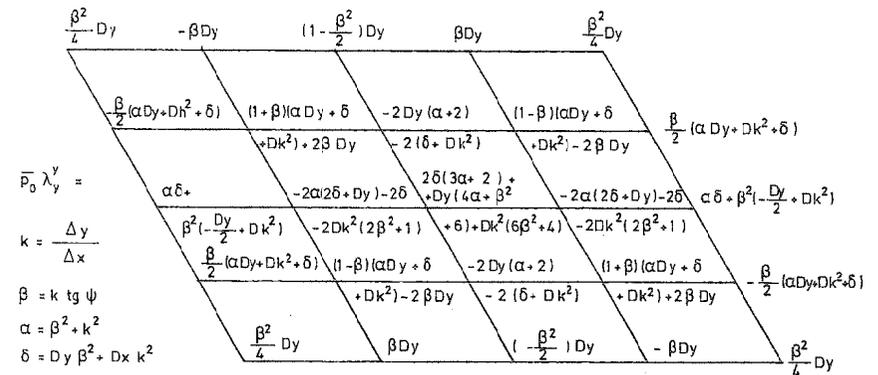
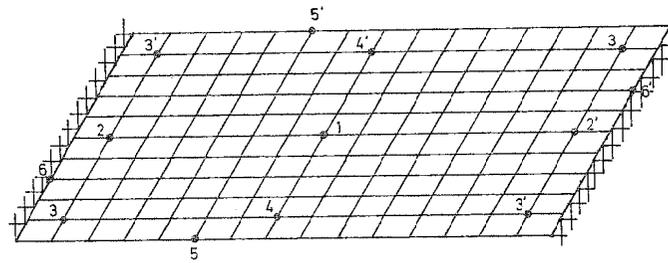


Figura 7.18. Molécula de cálculo. Punto interior. Discretización.

De un modo análogo, se procedería para obtener los esquemas en otros puntos, así como las condiciones de borde, como se indica en la figura 7.19. Se obtiene, así, una ecuación algebraica que, resuelta, permite conocer los valores de las flechas  $w(i, j)$  en todos los nudos de la malla. Las expresiones de los esfuerzos (7.26) se discretizan de modo análogo para cada punto, y permiten su cálculo una vez conocidos los valores de las flechas en todos los puntos de la malla.

Se comprende, al comprobar los esquemas anteriores, la complejidad computacional que representa un análisis mediante diferencias finitas. Por ello, se recurre normalmente a otros métodos alternativos de formulación,



- 1-Nudo interior
- 2 y 2' - Nudos cercanos a un borde apoyado
- 3 y 3' - " " a una esquina
- 4 y 4' - " " a un borde libre
- 5 y 5' - Condiciones de borde libre
- 6 y 6' - " " " apoyado

Figura 7.19. Tipos de nudos en la malla de diferencias finitas.

más simples y eficientes, tales como emparrillado plano y elementos finitos. De ellos se tratará más adelante.

Antes de finalizar este apartado, conviene indicar las posibilidades, todavía no completamente explotadas en el cálculo de puentes, de los métodos de colocación o de mínimos cuadrados, así como de la integral de contorno. Como corresponden a técnicas todavía en fase de desarrollo, no se comentan con detalle aquí; solamente se indica en la figura 7.20 la idea principal del método de colocación.

Un ejemplo de aplicación de este método consiste en estudiar una placa rectangular, o circular simplemente apoyada, con una solución armónica (o de Levy) con  $n$  términos.

A lo largo de los bordes libres (o con otras condiciones de apoyo) que son, en general curvas de ecuaciones paramétricas del tipo siguiente:

$$\begin{matrix} x = x(s) & \text{ó} & r = r(s) \\ y = y(s) & & \theta = \theta(s) \end{matrix}$$

se plantean las correspondientes condiciones de contorno que dependerán de la solución particular y de  $4n$  constantes ( $n$  vectores  $A$ ) de la solución complementaria. Si  $\epsilon_i(s)$  representa el error de cada una de las condiciones de contorno (momento y reacción), es decir, la diferencia entre el valor que se obtiene en el punto  $(x, y)$  del contorno  $i$  de la solución Levy y el especificado (momento y reacción nulos en el caso de borde libre), se determinan las  $4n$  constantes  $A_i$  al imponer la condición de minimizar el error total:

$$E = \int_{C_1 U C_2} E_1^2 k_1 ds + \int_{C_1 U C_2} \epsilon_2^2 k_2 ds \quad (7.30)$$

siendo:  $C_1 U C_2$ , los bordes (libres) de la losa;  $k_1$  y  $k_2$ , pesos arbitrarios pero especificados, que pueden variar con el parámetro  $s$  que define un punto de cada uno de los dos bordes  $C_1$  y  $C_2$ , y  $ds$  la diferencial del arco de la curva de borde.

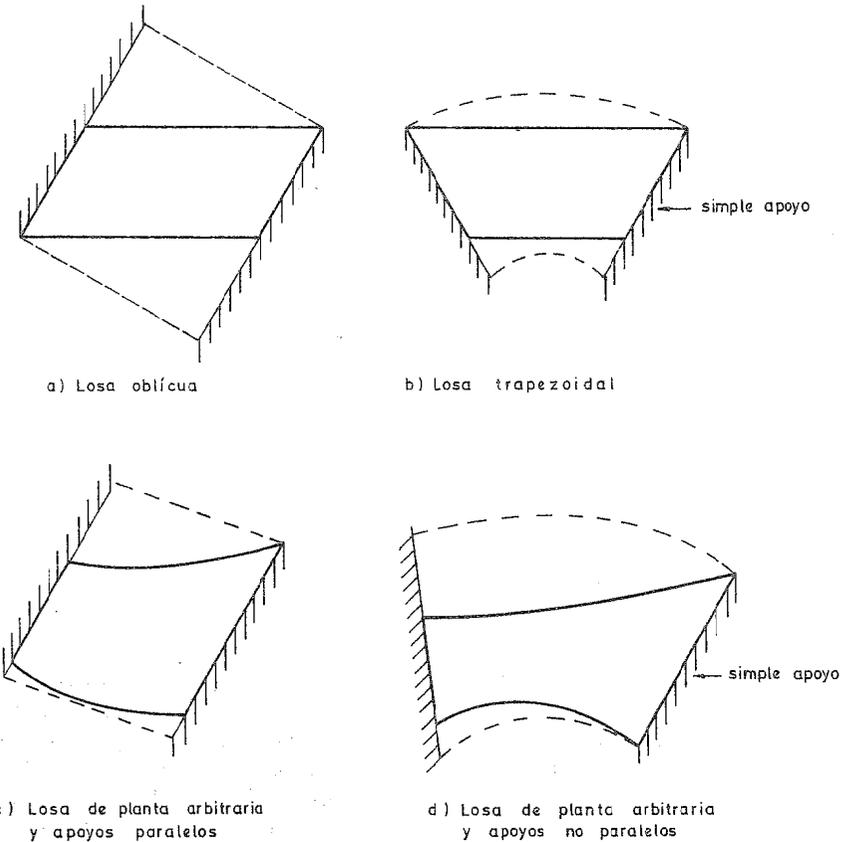


Figura 7.20. Posibilidades del método de colocación.

Las integrales de (7.30) pueden efectuarse numéricamente. Las incógnitas  $A_i$  se deducen al imponer las condiciones  $\frac{\partial E}{\partial A_i} = 0$ , que constituyen un sistema de  $4n$  ecuaciones. Resuelto este sistema se deduce la solución final como suma de las soluciones complementarias y particulares de los  $n$  armónicos.



$$\begin{bmatrix} f_{11} + \delta_1 & f_{21} & f_{31} \dots & f_{n1} \\ f_{12} & f_{22} + \delta_2 & f_{32} \dots & f_{n2} \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} + \delta_3 \dots & f_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{1n} & f_{2n} & f_{3n} \dots & f_{nn} + \delta_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{10} \\ f_{20} \\ f_{30} \\ \vdots \\ f_{n0} \end{bmatrix} \quad (7.31)$$

Este sistema de ecuaciones lineales permite obtener las reacciones hiperestáticas  $R_i$ . Por superposición de éstas, una vez calculadas las  $R_i$ , se pueden deducir los movimientos y esfuerzos finales:

$$\text{resultado final} = \text{resultado}_0 + \sum_{i=1}^n R_i \cdot \text{resultado}_i$$

El método de cálculo presentado es muy efectivo y generalmente, cuando el número de soportes intermedios es reducido, puede realizarse con un programa de computador de losa ortótropa, y resolver el sistema 7.31 manualmente, no exigiendo, por lo tanto, programación adicional. En el caso de que el número de reacciones a calcular fuera elevado, se aconseja proceder a la automatización total del análisis.

Existe un inconveniente en este cálculo, precisamente cuando el número de soportes intermedios es grande y existen varios vanos. En ese caso, el condicionamiento numérico del sistema (7.31) puede ser muy pobre, ya que los coeficientes  $f_{ij}$  son muy elevados y parecidos unos a otros. Se aconseja utilizar la máxima precisión en el computador para la resolución de (7.31), con objeto de evitar este grave inconveniente, que puede hacer inútil este tipo de análisis.

Si existen apoyos continuos (no puntuales) transversales intermedios, se pueden discretizar en una serie de apoyos puntuales, separados entre sí una distancia aproximada de dos veces el canto de la losa. Esto implica que se supone un reparto de estas reacciones de los soportes del orden de 45°.

A veces, se puede recurrir a ingeniosos esquemas de cálculo con objeto de extrapolar el procedimiento de análisis anterior a situaciones diferentes a las de simple apoyo en los bordes extremos. Por ejemplo, si el tablero presenta un borde apoyado y otro empotrado, se puede estudiar la losa de luz doble con tres apoyos y carga simétrica (Fig. 7.24), procediendo a su cálculo conforme se ha indicado anteriormente.

Otras veces, en vanos intermedios de puentes losa con muchos vanos, se pueden sustituir las condiciones reales de apoyo en los soportes extremos por las de apoyo empotrado, puesto que no es de esperar una influencia importante de esta modificación en los resultados finales.

También, si el puente losa presenta una baja rigidez torsional, es posible utilizar el proceso de cálculo que se acaba de describir en el tratamiento de tableros con otras condiciones en los bordes extremos, distintas de las que se han mencionado. Para ello se recurre a la solución generalizada de

Levy, es decir, considerando las pertinentes funciones de Rayleigh de la losa sin soportes intermedios.

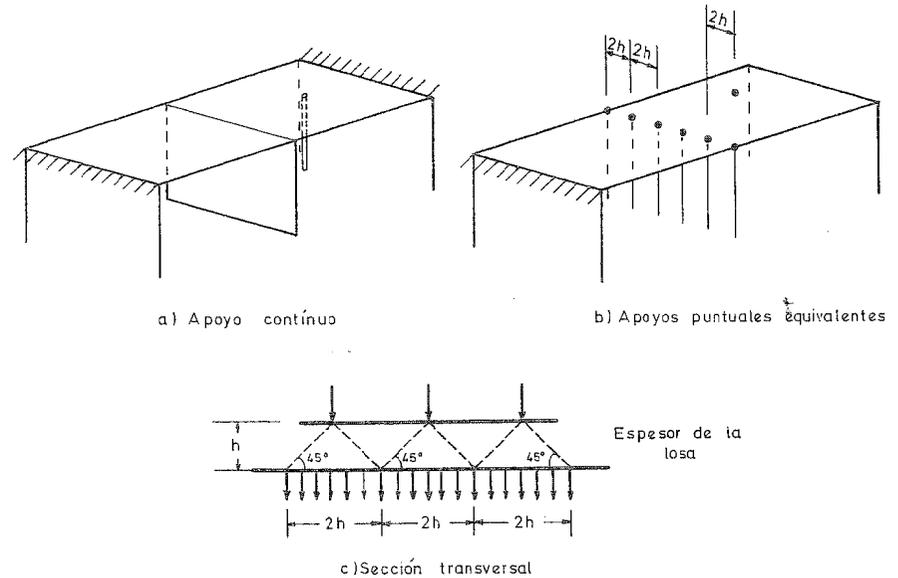


Figura 7.23. Discretización de un soporte continuo.

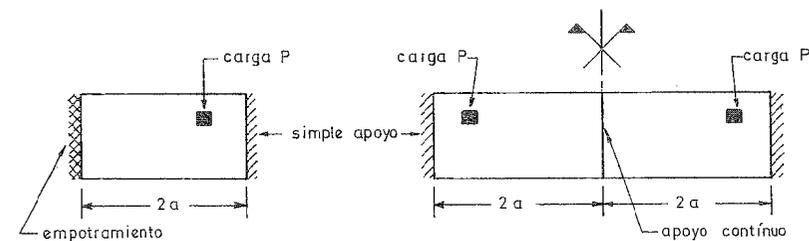


Figura 7.24. Análisis de una losa empotrada-apoyada.

7.7. Comentarios finales

Una vez considerado como válido el modelo losa ortótropa para representar el comportamiento estructural del tablero de un puente, existen varios procedimientos de análisis. Todos ellos son adecuados. Guyon-Massonet-Rowe, Cusens-Pama pueden ser considerados como métodos de tabulación o de resolución directa (mediante un pequeño computador)