Señales y Sistemas

Práctico 2

Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo (SLIT)

2020

Cada ejercicio comienza con un símbolo indicando su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ✦ básico, ★ medio, ✷ avanzado, y ✹ desafiante. Además puede tener un número, como (1.21) que indica el número de ejercicio del libro del curso, *Señales y Sistemas*, Oppenheim/Willsky, 2nd.edition.

Convolución

✦ Ejercicio 1 (2.21)

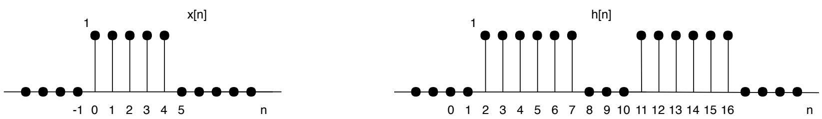
Calcular la convolución $y[n] = x[n] * h[n]$ de los siguientes pares de señales:

(a) $x[n] = \alpha^n u[n]$, $h[n] = \beta^n u[n]$, $\alpha \neq \beta$

(b) $x[n] = h[n] = \alpha^n u[n]$

(c) $x[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n-4]$, $h[n] = 4^n u[2-n]$

(d) $x[n]$ y $h[n]$ son como en la siguiente figura



✦ Ejercicio 2 (2.8)

Determinar y bosquejar la convolución de las siguientes dos señales:

$$x(t) = \begin{cases} t+1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2-t, & 1 < t \leq 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad h(t) = \delta(t+2) + 2\delta(t+1)$$

★ Ejercicio 3

A partir de los pulsos:

$$f(t) = A_1[u(t+\tau) - u(t-\tau)]$$

$$h(t) = A_2[u(t+\tau) - u(t-\tau)]$$

(a) Calcular $f(t) * h(t)$ ¿Cómo cambia el resultado si el ancho de un pulso es más grande que el otro?.

(b) Calcular $h(t) * h(t) * h(t)$.

(c) Calcular $f(t) * (e^{-at}u(t))$.

⋆ Ejercicio 4

Se sabe que la respuesta al impulso de un SLIT es cero excepto en el intervalo $N_0 \leq n \leq N_1$. Se sabe además que la entrada $x[n]$ vale cero excepto en el intervalo $N_2 \leq n \leq N_3$. Como resultado, la salida $y[n]$ está destinada a ser cero excepto en algún intervalo $N_4 \leq n \leq N_5$.

(a) Determinar N_4 y N_5 en función de N_0, N_1, N_2 y N_3.

(b) Si $h[n]$ es cero excepto en M puntos consecutivos y $x[n]$ es cero excepto en N puntos consecutivos, ¿cuál es el máximo número de puntos consecutivos en los cuales $y[n]$ puede tomar valores distintos de cero?

✶ Ejercicio 5 (2.43)

Una de las propiedades más importantes de la convolución, tanto en tiempo continuo como en tiempo discreto, es la asociatividad.

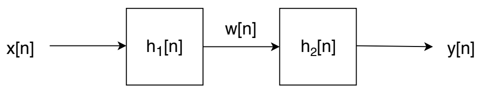
(a) Probar la igualdad

$$(x(t) * h(t)) * g(t) = x(t) * (h(t) * g(t))$$

al mostrar que ambos lados de la igualdad son iguales a

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(\sigma)g(t-\tau-\sigma)d\tau d\sigma.$$

(b) Considerar los SLIT con respuesta al impulso $h_1[n]$ y $h_2[n]$ puestos en cascada como se muestra en la figura



Sea $x[n] = u[n]$, $h_1[n] = (-1/2)^n u[n]$ y $h_2[n] = u[n] + (1/2)u[n-1]$.

1. Calcular $y[n]$ calculando primero $w[n] = x[n] * h_1[n]$ y luego $y[n] = w[n] * h_2[n]$; esto es $y[n] = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]$.
2. Ahora determinar $y[n]$ aplicando la convolución primero a $h_1[n]$ y $h_2[n]$ para obtener $g[n] = h_1[n] * h_2[n]$ y convolucionando $x[n]$ con $g[n]$ para obtener $y[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n])$

Las respuestas a 1 y 2 deben ser idénticas, y deben ilustrar la propiedad asociatividad de la convolución de tiempo discreto.

(c) Considerar la conexión en cascada de dos SLIT como en la figura anterior, donde en este caso

$$h_1[n] = \sin(8n) \text{ y } h_2[n] = a^n u[n], \quad |a| < 1,$$

donde la entrada es

$$x[n] = \delta[n] - a\delta[n-1].$$

Determinar la salida $y[n]$. (*Sugerencia:* El uso de las propiedades asociativa y conmutativa de la convolución deben facilitar bastante la solución.)

Propiedades de los SLIT

✦ Ejercicio 6 (2.28 y 2.29)

A continuación se muestran las respuestas al impulso de diferentes SLIT de tiempo discreto y tiempo continuo.
Determinar si cada sistema es causal y/o estable. Justificar las respuestas.

(a) $h[n] = \left(\frac{1}{5}\right)^n u[n]$

(b) $h[n] = (0.8)^n u[n+2]$

(c) $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n]$

(d) $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + (1.01)^n u[n-1]$

(e) $h(t) = e^{-4t}u(t-2)$

(f) $h(t) = e^{-6t}u(3-t)$

(g) $h(t) = e^{-2t}u(t+50)$

(h) $h(t) = (2e^{-t} - e^{(t-100)/100})u(t)$

⋆ Ejercicio 7

Considerar un SLIT en tiempo discreto, estable con respuesta al impulso $h[n]$. Mostrar que si la entrada $x[n]$ es periódica con período N (esto es $x[n] = x[n+N]$) entonces la salida $y[n]$ es también una secuencia periódica con período N.

✦ Ejercicio 8 (2.57)

Considerar un SLIT causal T con entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ relacionados por la siguiente ecuación en diferencias:

$$y[n] = -ay[n-1] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1].$$

(a) Verificar que T puede considerarse como la conexión en cascada de dos SLIT causales T_1 y T_2 con las siguientes relaciones entrada-salida:

$$T_1 : y_1[n] = b_0 x_1[n] + b_1 x_1[n-1],$$

$$T_2 : y_2[n] = -ay_2[n-1] + x_2[n].$$

(b) Dibujar un diagrama de bloques representando a T_1.

(c) Dibujar un diagrama de bloques representando a T_2.

(d) Dibujar un diagrama de bloques representando a T como la cascada del diagrama de T_1 seguido del diagrama de T_2.

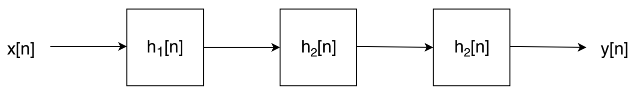
(e) Dibujar un diagrama de bloques representando a T como la cascada del diagrama de T_2 seguido del diagrama de T_1.

(f) Mostrar que la unidades de retardo en el diagrama de bloques de T de la parte (e) se pueden colapsar en un elemento de retardo.

Nota: Los diagramas de la partes (d) y (e) son denominados *Forma Directa I* de T y el diagrama de la parte (f) se denominada *Forma Directa II* de T.

⋆ Ejercicio 9 (2.24)

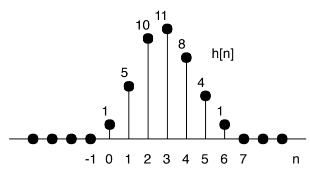
Examinar la interconexión en cascada de los tres SLIT causales ilustrados en la siguiente figura.



La respuesta al impulso $h_2[n]$ es

$$h_2[n] = u[n] - u[n-2]$$

y la respuesta total al impulso es como se muestra en la siguiente figura.



(a) Encuentre la respuesta al impulso $h_1[n]$

(b) Encuentre la respuesta del sistema total a la entrada

$$x[n] = \delta[n] - \delta[n-1].$$

⋆ Ejercicio 10

Se tiene un sistema de acumulación de energía (baterías) que se modelará en tiempo discreto. En cada instante la carga de la batería $y[n]$ se compone de la carga acumulada hasta el instante anterior, con una pérdida por fuga del 5 %, sumada a la energía $x[n]$ que se inyecta al acumulador desde la red eléctrica en cada instante (que será negativa cuando se extraiga energía).

(a) Plantear una ecuación en diferencias que modele el sistema.

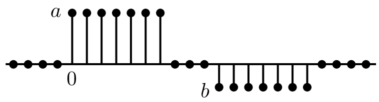
(b) Calcular su repuesta al impulso.

(c) Si la entrada es un pulso de M muestras $x[n] = u[n] - u[n-M]$, calcular la salida $y[n]$.

(d) Realizar un diagrama de bloques con sumadores, multiplicadores y retardos que modele este sistema.

(e) ¿Qué hipótesis se asumieron para resolver las partes anteriores?

(f) Basado en la respuesta de la parte (c) dar la respuesta a la siguiente entrada



⋆ Ejercicio 11 (2.33)

Considerar un sistema cuya entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ satisfacen la ecuación diferencial de primer

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t).$$

El sistema también satisface la condición de estar en reposo.

(a) Determinar la salida del sistema $y_1(t)$ cuando la entrada es $x_1(t) = e^{3t}u(t)$.

(b) Determinar la salida del sistema $y_2(t)$ cuando la entrada es $x_2(t) = e^{2t}u(t)$.

(c) Determinar la salida del sistema $y_3(t)$ cuando la entrada es $x_3(t) = \alpha e^{3t}u(t) + \beta e^{2t}u(t)$, donde α y β son números reales.

(d) Mostrar que $y_3(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$.

Ahora, sean $x_a(t)$ y $x_b(t)$ señales arbitrarias tales que $x_a(t) = 0, \forall t < t_a$ y $x_b(t) = 0, \forall t < t_b$. Sea $y_a(t)$ la salida del sistema para la entrada $x_a(t)$, $y_b(t)$ la salida del sistema a la entrada $x_b(t)$ y $y_c(t)$ la salida del sistema a la entrada $x_c(t) = \alpha x_a(t) + \beta x_b(t)$.

(e) Mostrar que $y_c(t) = \alpha y_a(t) + \beta y_b(t)$. Por tanto, podemos concluir que el sistema en estudio es lineal.

(f) Determinar la salida del sistema $y_4(t)$ cuando la entrada es $x_4(t) = Ke^{2t}u(t)$.

(g) Determinar la salida del sistema $y_5(t)$ cuando la entrada es $x_5(t-T) = Ke^{2(t-T)}u(t-T)$. Demostrar que $y_5(t) = y_4(t-T)$.

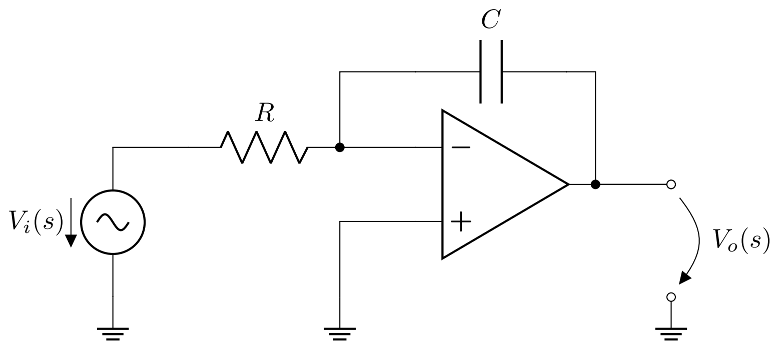
Ahora, sea $x_a(t)$ una señal arbitraria tal que $x_a(t) = 0, \forall t < t_0$, $y_a(t)$ la salida del sistema a la entrada $x_a(t)$ y $y_b(t)$ la salida del sistema a la entrada $x_b(t) = x_a(t-T)$.

(h) Mostrar que $y_b(t) = y_a(t-T)$.

Podemos concluir, por tanto, que el sistema analizado es invariante en el tiempo. Junto con el resultado obtenido en la parte (d), concluimos que el sistema dado es LTI. Y ya que este sistema satisface la condición de reposo inicial, también es causal.

⋆ Ejercicio 12

Sea el integrador de la siguiente figura.



El amplificador es ideal y trabaja en zona lineal.

(a) Calcular la transferencia del sistema $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$.

(b) Determinar la relación entrada salida entre $v_i(t)$ y $v_o(t)$.

(c) Indicar a partir de la parte anterior si el sistema es causal, BIBO-estable, y si tiene memoria.

(d) Calcular la respuesta al impulso y al escalón usando la transformada de Laplace.

(e) Indicar si el sistema es causal, BIBO-estable, y si tiene memoria analizando la respuesta al impulso. Indicar que hipótesis se utilizaron.

(f) Calcular la respuesta al escalón convolucionando con la respuesta al impulso. Indicar que hipótesis se utilizaron.

(g) Repetir las partes anteriores para el amplificador inversor de la siguiente figura.