DATOS en una RED

Parte 2 : Modelos en una red

Marzo 2019

Modelos en una red: Definiciones

S : red discreta regular (i.e. $\mathbb{Z}^d$)
$Z = \{Z_s, s \in S\}$, coleccion de v.a. reales indexadas por S.

Definicion
$Z = \{Z_s, s \in \mathbb{Z}^d\}$ *es un proceso real de segundo orden, estacionario si tiene una media constante y una funcion de covarianza invariante por translacion i.e.*

- $\forall s \; E(Z_s) = m$
- $\forall (s,t) \; C(s,t) = Cov(Z_s, Z_t) = c(t-s)$

c *es la funcion de covarianza de* Z*.*

Modelos en una red: Definiciones

Propiedad

A cada funcion de covarianza estacionaria c en $\mathbb{Z}^d$ se asocia una medida $F \geq 0$ y acotada

$$c(h) = \int_{\mathbb{T}^d} e^{i<h;u>} F(du)$$

Definicion

Si $\sum_{h \in \mathbb{Z}^d} c(h)^2 < \infty$, F admite una densidad f (la densidad espectral de Z)

$$f(u) = \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{h \in \mathbb{Z}^d} c(h) e^{-i<h;u>}$$

Ejemplos

- ruido blanco fuerte
- ruido blanco debil

Modelos MA

Definicion

$(c_s)_{s\in\mathbb{Z}^d}$ *una secuencia que verifica* $\sum_s c_s^2 < \infty$ *y* $(\varepsilon_s)_{s\in\mathbb{Z}^d}$ *un ruido blanco debil en* $\mathbb{Z}^d$*, de varianza* σ_ε^2*. El modelo*

$$Z_s = \sum_{t\in\mathbb{Z}^d} c_t \varepsilon_{s-t}$$

define un proceso estacionario MA(∞) (Moving Average).

Propiedad

La covarianza de un proceso MA(∞) en $\mathbb{Z}^d$ *es igual a*

$$c(h) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{t\in\mathbb{Z}^d} c_t c_{t+h}$$

su densidad espectral es

$$f(u) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{(2\pi)^d} \left| \sum_{t\in\mathbb{Z}^d} c_t e^{i<t;u>} \right|^2$$

Modelo ARMA

Definicion

ε un ruido blanco, P y Q dos polinomios de la variable $z \in \mathbb{C}^d$, que verifican : si $|z| = 1$, $P(z) \neq 0$, $Q(z) \neq 0$,

$$P(z) = \textstyle\sum_R a_s z^s \quad a_0 = 1 \qquad ; \qquad Q(z) = \textstyle\sum_S b_s z^s \quad b_0 = 1$$

R, S, partes finitas de $\mathbb{Z}^d \ni 0$ la ecuacion

$$P(B) Z_s = Q(B) \varepsilon_s \qquad (B \text{ operador retraso})$$

admite una solucion estacionaria Z en L^2. Z es un proceso ARMA.

Propiedad

La densidad espectral de un proceso ARMA en $\mathbb{Z}^d$ es

$$f(u) = \frac{\sigma^2}{(2\pi)^d} \left| \frac{Q}{P}(e^{iu}) \right|^2$$

Modelo SAR (Simultaneous AR)

Definicion

$R \subset \mathbb{Z}^d$ *finita que no contiene* $\{0\}$, $a = \{a_s, s \in R\}$, $(\varepsilon_s)_{s \in \mathbb{Z}^d}$ *un ruido blanco debil en* $\mathbb{Z}^d$. *El modelo*

$$Z_s = \sum_{t \in R} a_t Z_{s-t} + \varepsilon_s$$

define un proceso estacionario SAR (Simultaneous AR).

Ejemplo Modelo 4 vecinos mas cercanos

$$Z_{s_1,s_2} = \alpha(Z_{s_1-1,s_2} + Z_{s_1+1,s_2} + Z_{s_1,s_2-1} + Z_{s_1,s_2+1}) + \varepsilon_{s_1,s_2}$$

Comentarios Este modelo es

- no causal
- no identifiable
- la estimacion por MCO no es consistente

Modelo CAR (Conditional AR)

Definicion

$L \subset \mathbb{Z}^d$ una parte finita simetrica que no contiene $\{0\}$, $c = \{c_s, s \in L, c_s = c_{-s}\}$, el modelo

$$Z_s = \sum_{t \in L} c_t Z_{s-t} + e_s \qquad E(e_s) = 0 \qquad \mathit{cov}(e_s, Z_t) = 0 \text{ si } s \neq t$$

define un proceso estacionario CAR (Conditional AR).

Comentarios

- Z es L-markoviano, $\sum_{t \in L} c_t Z_{s-t}$ es la mejor prediccion lineal de Z_s dadas las otras variables.
- Los residuos e_s no forman un ruido blanco, son correlacionados.
- Los modelos CAR son identifiables.
- La estimacion por MCO es consistente.

Modelo CAR (Conditional AR)

Propiedad

Si el polinomio $P(u) = (1 - 2\sum_{t\in L^+} c_s \cos(<t; u>))$ *no se cancela para* $\|u\| = 1$, *el CAR(L) es bien definido. Su densidad espectral es igual a*

$$f(u) = \frac{\sigma_e^2}{(2\pi)^d P(e^{iu})}$$

y la covarianza de los residuos condicionales es

$$\mathit{cov}(e_s, e_{s+t}) = \begin{cases} \sigma_e^2 & \textit{si } t = 0 \\ -\sigma_e^2 c_t & \textit{si } t \in L \\ 0 & \textit{sino} \end{cases}$$

Propiedad

- *Cada modelo SAR es un modelo CAR.*
- *En* $\mathbb{Z}$ *los dos modelos coinciden.*
- *Si* $d \geq 2$ *la familia de los CAR es estrictamente mas grande*

Modelos no estacionarios en una red finita

$S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$, $Z = (Z_1, \ldots, Z_n)$ proceso real en S.
$\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ proceso real centrado de cuadrado integrable en S.

Modelos

$$\begin{array}{rll}
\mathrm{MA} & : Z_s = \sum_{t \in S} b_{s,t}\varepsilon_t & Z = B\varepsilon \\
\mathrm{AR} & : Z_s = \sum_{\substack{t \in S \\ s \neq t}} a_{s,t} Z_t + \varepsilon_s & (I-A)Z = \varepsilon \\
\mathrm{ARMA} & : Z_s = \sum_{\substack{t \in S \\ s \neq t}} a_{s,t} Z_t + \sum_{t \in S} b_{s,t}\varepsilon_t & (I-A)Z = B\varepsilon
\end{array}$$

$$\Gamma = \mathsf{cov}(\varepsilon) \quad \Sigma = \mathsf{cov}(Z)$$

$$\begin{array}{rl}
\mathrm{MA} & : \Sigma = B\Gamma B^t \\
\mathrm{AR} & : \Sigma = (I-A)^{-1}\Gamma(I-A)^{-t} \\
\mathrm{ARMA} & : \Sigma = (I-A)^{-1}B\Gamma B^t(I-A)^{-t}
\end{array}$$

Comentario ε ruido blanco, si Z es un proceso centrado, de varianza Σ inversible, entonces Z admite una representacion AR causal relativa a ε.

Modelos CAR

Representacion markoviana CAR

$$Z_s = \sum_{\substack{t \in S \\ s \neq t}} c_{s,t} Z_t + e_s \quad \mathsf{Var}(e_s) = \sigma_s^2 \quad \mathsf{cov}(e_s, Z_t) = 0 \; s \neq t$$

$$C_{s,t} = \begin{cases} c_{s,t} & \text{si } t \neq s \\ 0 & \text{si } t = s \end{cases}, \; D = \mathsf{diag}(\sigma_s^2)$$

$$\Sigma = (I - C)^{-1} D$$

restricciones : $\Sigma = (I - C)^{-1} D$ simetrica definida positiva

Ejemplo $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ en S dotado de un grafo $\mathcal{G}$ simetrico sin bucle. Z es un campo $\mathcal{G}$-markoviano si $Q = \Sigma^{-1}$ verifica $q_{st} = 0$ salvo si $s\mathcal{R}t$. Entonces $Z_s / Z_t, t \neq s$ sigue el modelo CAR

$$E(Z_s | Z_t) = \mu_s - \frac{1}{q_{ss}} \sum_{s\mathcal{R}t} q_{st}(Z_t - \mu_t)$$

Modelos con vecindades

W una matriz de vecindad en S

SAR :

$$Z_s = \rho \sum_{\substack{t \in S \\ s \neq t}} w_{s,t} Z_t + \varepsilon_s \quad \text{o } Z = \rho W Z + \varepsilon$$

bien definido en cuanto $(I - \rho W)$ es inversible

CAR :

$$Z_s = \rho \sum_{\substack{t \in S \\ s \neq t}} w_{s,t} Z_t + e_s \quad \mathsf{Var}(e_s) = \sigma_s^2 \quad \mathsf{cov}(e_s, Z_t) = 0 \; s \neq t$$

$(I - \rho W)$ inversible, simetrica definida positiva.

Campos de Gibbs-Markov

S: conjunto discreto de nodos (lugares)
$Z = (Z_i, i \in S)$ con valores en E^S, E espacio de estado general

Objectivo	describir el campo Z con sus distribuciones condicionales.
Restricciones	las distribuciones condicionales necesitan definir una distribucion junta unica

Campos de Gibbs-Markov

Proposicion

Φ *una familia de funciones definida en un conjunto* $\mathcal{A}$ *de partes de* S *que verifica*

1. $$U_\Lambda^\Phi(z) = \sum_{\substack{A \in \mathcal{A} \\ A \cap \Lambda \neq \emptyset}} \phi_A(z) \text{ es finita para } \Lambda \subset S$$

2. $$\int_{E^\Lambda} \exp U_\Lambda^\Phi(z_\Lambda, z^\Lambda) dz_\Lambda < +\infty$$

Entonces la familia de distribuciones condicionales $\{\pi_\Lambda^\Phi(\cdot|z^\Lambda)\}$ *de densidad*

$$\{\pi_\Lambda^\Phi(z_\Lambda|z^\Lambda)\} = \Big(\int_{E^\Lambda} \exp U_\Lambda^\Phi(z_\Lambda, z^\Lambda) dz_\Lambda \Big)^{-1} \exp U_\Lambda^\Phi(z)$$

es coherente.

Ejemplo: modelo de Ising

Definicion

Z un campo definido en S, de distribuciones condicionales $\{\pi_\Lambda^\Phi(z_\Lambda|z^\Lambda)\}$. Z es un campo de Gibbs de potencial Φ y de energia U^Φ.

Modelo de Ising : modelo isotropico con 4-vecinos mas cercanos
$S \subset \mathbb{Z}^2$, $\mathsf{E} = \{-1, +1\}$, $\mathcal{A} = \{\text{conjuntos unitarios, vecinos}\}$

$$\phi_{\{i\}}(z) = \alpha z_i \qquad \phi_{\{i,j\}}(z) = \beta z_i z_j \text{ si } \|i-j\|_1 = 1$$

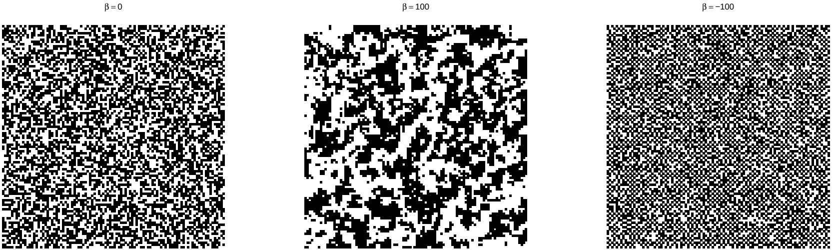
Energia

$$U_\Lambda(z_\Lambda, z^\Lambda) = \alpha \sum_{i\in\Lambda} z_i + \beta \sum_{\substack{i\in\Lambda \\ j \text{ vecino } i}} z_i z_j$$

distribucion condicional

$$\pi_\Lambda(z_\Lambda|z^\Lambda) = \Big(\sum_{z_\Lambda \in E^\Lambda} \exp U_\Lambda(z_\Lambda, z^\Lambda)\Big)^{-1} \exp U_\Lambda(z_\Lambda, z^\Lambda)$$

Ejemplo : modelo de Ising



Ejemplo : modelo de Potts

Generalizacion del modelo de Ising con $E = \{a_0, a_1, \ldots, a_{K-1}\}$

$$\phi_{\{i\}}(z) = \alpha_k \qquad \text{si } z_i = a_k$$
$$\phi_{\{i,j\}}(z) = \beta_{kl} \qquad \text{si } \{z_i, z_j\} = \{a_k, a_l\}\ i,j, \text{ vecinos}$$

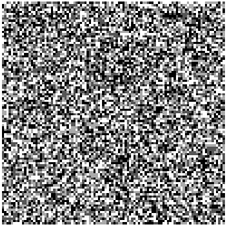
Energia

$$U_\Lambda(z) = \sum_k \alpha_k n_k + \sum_{k<l} \beta_{kl} n_{kl}$$

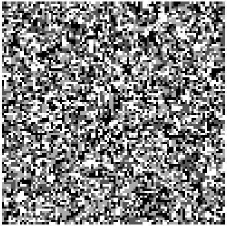
n_k numero de nodos con valor a_k en Λ
n_{kl} numero de nodos vecinos con valor $\{a_k, a_l\}$ en Λ

Ejemplo : modelo de Potts

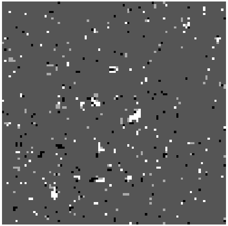
$\beta = 0$



$\beta = 0.5$



$\beta = 1.2$



Campo de Markov

Definicion

- *Z es un campo de Markov en S para el grafo $\mathcal{G}$ si la distribucion de Z en Λ condicional a z^{Λ} solo depende de su frontera*
$$\pi_{\Lambda}(z_{\Lambda}|z^{\Lambda}) = \pi_{\Lambda}(z_{\Lambda}|z_{\partial\Lambda})$$
- *Una parte de S es un clique del grafo $\mathcal{G}$ si es un conjunto unitario o si sus elementos son vecinos de dos en dos en $\mathcal{G}$.*

Teorema *(Hammersley-Clifford)*

π la distribucion de un campo de Markov que verifica $\pi_{\Lambda}(z_{\Lambda}|z^{\Lambda}) > 0$. Entonces existe una familia Φ definida en los cliques de $\mathcal{G}$ que verifica : π es la distribucion de un campo de Gibbs de potencial Φ.
Si $\mathcal{C}$ es una familia que contiene todos los conjuntos unitarios, entonces un campo de Gibbs de potenciales definidos en $\mathcal{C}$ es un campo de Markov para el grafo de vecindad $\mathcal{C}$.

Auto-modelos markovianos

Teorema

Una familia de distribuciones conditionales $\pi(\cdot|z^i)$ *de un campo de Markov de distribucion* π*, que pertenecen a la familia exponencial*

$$\log \pi(z_i|z^i) = A_i(z^i)B_i(z_i) + C_i(z_i) + D(z^i)$$

entonces existe α_i *y* $\beta_{ij} = \beta_{ji}$ *que verifican*

$$A_i(z^i) = \alpha_i + \sum_{j \neq i} \beta_{ij} B_j(z_j)$$

y

$$\phi_i(z_i) = \alpha_i B_i(z_i) + C_i(z_i) \qquad \phi_{ij}(z_i, z_j) = \beta_{ij} B_i(z_i) B_j(z_j)$$

A la inversa, las distribuciones condicionales exponenciales que verifican $A_i(z^i) = \alpha_i + \sum_{i \neq j} \beta_{ij} B_j(z_j)$ *se reunen en una distribucion junta que es un campo de Markov de potencial la familia* $\Phi = \{\phi_i, \phi_{ij}\}$*.*
Si $\phi_{ij} = z_i z_j$*, y* $\beta_{ij} = \beta_{ji}$ *entonces* Z *de distribucion* π *es un auto-modelo markoviano.*

Auto-modelos markovianos

Ejemplos:

1. Auto-logistica $E = \{0, 1\}$

$$U(z) = \sum_i \alpha_i z_i + \sum_{i \text{ vecino } j} \beta_{ij} z_i z_j$$

2. Poissoniano $E = \mathbb{N}$

$$U(z) = \sum_i (\alpha_i z_i + \log(z_i!)) + \sum_{i \text{ vecino } j} \beta_{ij} z_i z_j$$

3. Exponencial $E = \mathbb{R}$

$$U(z) = -\sum_i \alpha_i z_i - \sum_{i \text{ vecino } j} \beta_{ij} z_i z_j$$

4. Gaussiano $E = \mathbb{R}$

$$U(z) = -(1/2)^t (x - \mu) Q (x - \mu)$$

$Q = \Sigma^{-1}$ matriz de precision.

Estimacion de los parametros

Maxima de verosimilitud $Z \sim \mathcal{N}(0, \Sigma(\theta))$

$$\log L_n(\theta) = -\frac{1}{2}\log|\Sigma(\theta)|\sigma^2 + \frac{1}{2}Z^t\Sigma(\theta)^{-1}Z$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{SAR}\ :\ & Z^t\Sigma(\theta)^{-1}Z = \sigma_\varepsilon^{-2}\|(I - A(\theta))Z\|^2 \\
& \widehat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{n}\|(I - A(\theta))Z\|^2 \\
& \widehat{\theta} \text{ minimiza } -\tfrac{2}{n}\log|I - A(\theta)| + \log(\sigma_\varepsilon^2(\theta))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{CAR}\ :\ & Z^t\Sigma(\theta)^{-1}Z = \sigma_e^{-2}Z^t(I - C(\theta)Z) \\
& \widehat{\sigma}_e^2 = \frac{1}{n}Z^t(I - C(\theta))Z \\
& \widehat{\theta} \text{ minimiza } -\tfrac{2}{n}\log|I - C(\theta)| + \log(\sigma_e^2(\theta))
\end{aligned}$$

Estimacion de los parametros

Campo de Markov

- estimacion por maxima verosimilitud consistente bajo ciertas restricciones
  - distribuciones condicionales invariantes por translacion
  - potenciales medibles y acotados
  - dificultad para calcular la constante de normalizacion

- Pseudo verosimilitud condicional

$$l^{PVC}(\theta) = \sum_i \log \pi_i(z_i | z_{\partial i}, \theta) \qquad \widehat{\theta}^{PVC} = \mathsf{argmax}_\theta l^{PVC}(\theta)$$

  - buena eficacia si correlacion espacial moderada,
  - no se necesita el calculo de la constante de normalizacion.

Regresion espacial

X variables explicativas.

Modelo lineal estandar

$$Z_s = \beta_0 + \sum_{i=1}^{k} \beta_i X_{is} + \varepsilon_s \quad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad \mathsf{cov}(\varepsilon) = \sigma^2 I$$

Estimacion

$$\widehat{\beta} = (X^t X)^{-1} X^t Y \quad \mathsf{E}(\widehat{\beta}) = \beta \quad \mathsf{Var}(\widehat{\beta}) = \sigma^2 (X X^t)^{-1}$$

$$\widehat{\varepsilon} = Y - X\widehat{\beta} \quad \widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-k-1} \sum_i \widehat{\varepsilon}_i^2$$

Si $\mathsf{cov}(\varepsilon) = \sigma^2 A$

$$\mathsf{E}(\widehat{\beta}) = \beta \quad \mathsf{Var}(\widehat{\beta}) = \sigma^2 (X X^t)^{-1} X^t A X (X X^t)^{-1}$$

$$\mathsf{E}(\widehat{\sigma}^2) = \sigma^2 \frac{1}{n-k-1} \left[\mathsf{tr}(A) - \mathsf{tr}[(X^t X)^{-1} X^t A X] \right] \neq \sigma^2$$

Consecuencia pruebas de Student y Fisher son falsas.

Regresion espacial

$$Z_s = \beta_0 + \sum_{i=1}^{k} \beta_i X_{is} + \varepsilon_s$$

- Modelos para ε
  - SAR $\varepsilon_i = \rho \sum_j w_{ij}\varepsilon_j + \eta_i \quad \eta_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$
  - CAR $\mathsf{E}(\varepsilon_i/\varepsilon_j) = \rho \sum_j w_{ij}\varepsilon_j \quad \mathsf{Var}(\varepsilon_i/\varepsilon_j) = \sigma^2$

- Modelos para $\mathsf{Var}(\varepsilon) = \sigma^2 A$
  - Modelo disco
    si $d(i,j) < 2c$ $A_{ij} = \frac{2}{\pi}\left(\mathsf{arcos}\left(\frac{d(i,j)}{2c}\right) - \frac{d(i,j)}{2c}\sqrt{1 - \frac{d^2(i,j)}{4c^2}}\right)$
    si $d(i,j) > 2c$ $A_{ij} = 0$
  - Modelo exponencial
    Si $d(i,j) \neq 0$ $A_{ij} = c_1 e^{-c_2 d(i,j)}$, $A_{ii} = 1$

Regresion espacial

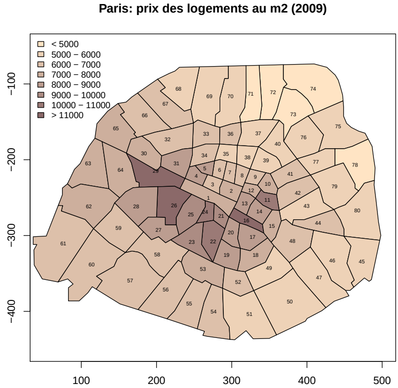
Estimacion

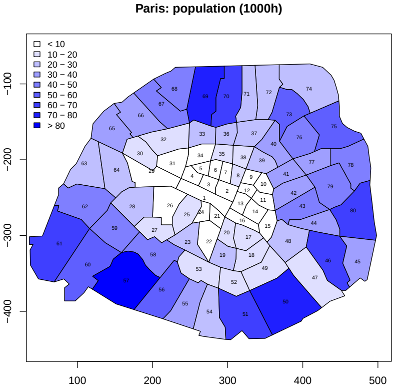
1. estimar β con MCO
2. calcular los residuos $\widehat{\varepsilon} = Z - X\widehat{\beta}$
3. prueba de la autocorrelacion de los residuos
4. si positivo estimacion de los parametros de dependencia (MCO ou MV)

Eleccion del modelo

- Criterios tipo AIC
- Pruebas basadas en la verosimilitud (modelos encajados)
- Validacion cruzada

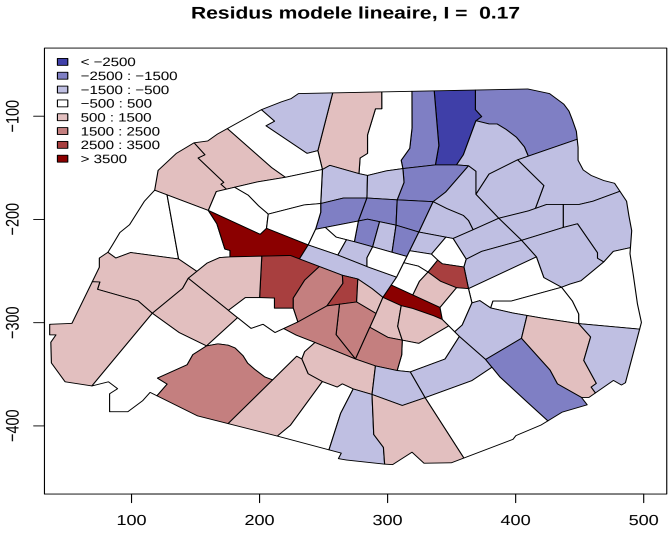
Regresion espacial





Explica la poblacion los precios ?

Regresion espacial



$$Y = X\beta + \varepsilon$$

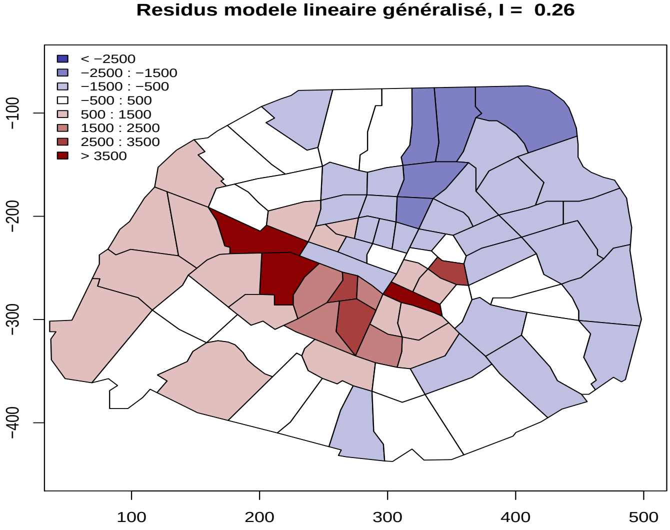
Modelo lineal

```
Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  8.137e+03  2.547e+02  31.950  < 2e-16 ***
popu        -4.374e-02  7.397e-03  -5.913 8.42e-08 ***

Residual standard error: 1378 on 78 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.3095,     Adjusted R-squared: 0.3006
F-statistic: 34.96 on 1 and 78 DF,  p-value: 8.417e-08

Moran I statistic standard deviate = 2.855, p-value = 0.002152
sample estimates:
Moran I statistic       Expectation          Variance
      0.172829269      -0.012658228       0.004221085
```

Modelo Lineal General



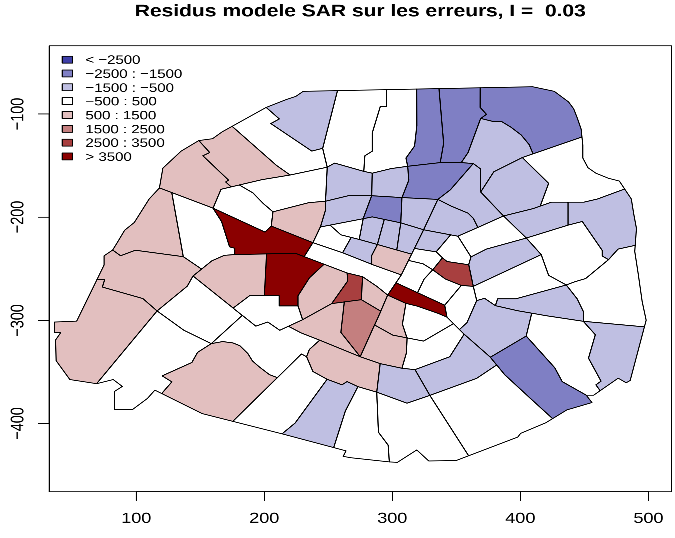
$$Y = X\beta + \varepsilon \qquad cov(\varepsilon_s, \varepsilon_{s+h}) = ce^{-|h|/a}$$

Modelo Lineal General

```
       AIC      BIC    logLik
  1377.579 1389.362 -683.7893
Correlation Structure: Exponential spatial correlation
 Parameter estimate(s):
       range       nugget
2.991497e+01 5.254981e-08
Coefficients:
               Value Std.Error   t-value p-value
(Intercept) 7602.034  381.6749 19.917560   0.000
popu          -0.028    0.0082 -3.405607   0.001
Residual standard error: 1457.662

Moran I statistic standard deviate = 4.2642, p-value = 1.003e-05
sample estimates:
Moran I statistic       Expectation          Variance
      0.263173949      -0.012658228       0.004184189
```

Modelo con errores SAR



$$Y = X\beta + \varepsilon \qquad \varepsilon = \lambda W\varepsilon + \eta$$

Modelo con errores SAR

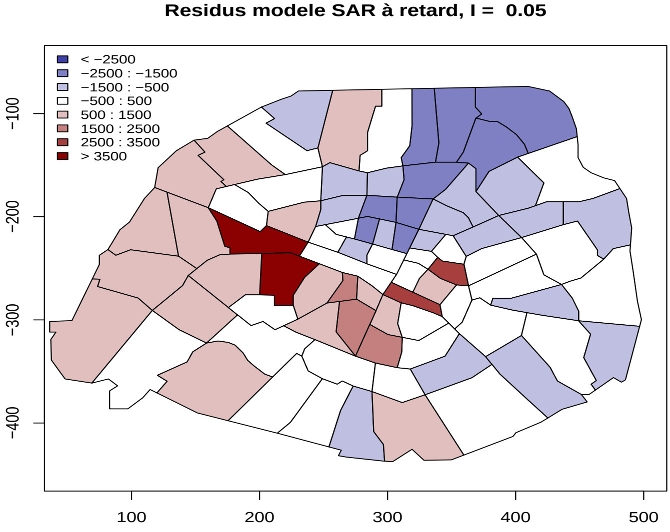
```
Coefficients: (asymptotic standard errors)
               Estimate  Std. Error z value  Pr(>|z|)
(Intercept)  7.7114e+03  3.8817e+02 19.8658 < 2.2e-16
popu        -2.8557e-02  8.4861e-03 -3.3651 0.0007651

Lambda: 0.55716, LR test value: 8.9876, p-value: 0.0027181

Log likelihood: -686.2933 for error model
ML residual variance (sigma squared): 1543100, (sigma: 1242.2)
AIC: 1380.6, (AIC for lm: 1387.6)

Moran I statistic standard deviate = 0.6913, p-value = 0.2447
sample estimates:
Moran I statistic       Expectation          Variance
      0.031895387      -0.012658228       0.004153078
```

Modelo con retrasos SAR



$$Y = \rho WY + X\beta + \varepsilon$$

Modelo con retrasos SAR

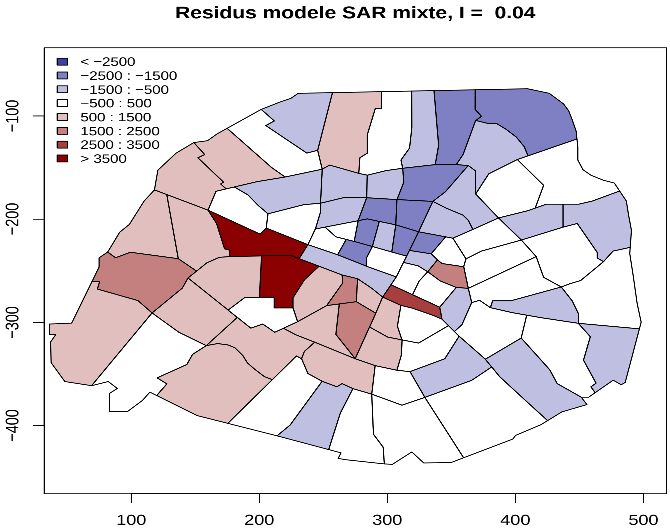
```
Coefficients: (numerical Hessian approximate standard errors)
              Estimate  Std. Error z value  Pr(>|z|)
(Intercept) 5389.732779  905.044418  5.9552 2.597e-09
popu          -0.032487    0.007707 -4.2152 2.496e-05

Rho: 0.35137, LR test value: 8.8233, p-value: 0.0029741

Log likelihood: -686.3755 for lag model
ML residual variance (sigma squared): 1617400, (sigma: 1271.8)
AIC: 1380.8, (AIC for lm: 1387.6)

Moran I statistic standard deviate = 0.9095, p-value = 0.1816
sample estimates:
Moran I statistic       Expectation          Variance
      0.046236758      -0.012658228       0.004193694
```

Modelo con retrasos en los errores y las covariables



$$Y = \rho_1 WY + X\beta + \rho_2 WX\beta + \varepsilon \quad \varepsilon = \lambda W\varepsilon + \eta$$

Modelo con retrasos en los errores y las covariables

```
Coefficients: (numerical Hessian approximate standard errors)
                  Estimate  Std. Error z value  Pr(>|z|)
(Intercept)      7.3754e+03  1.3556e+03  5.4408 5.305e-08
popu            -2.3686e-02  8.8749e-03 -2.6688  0.007612
lag.(Intercept) -2.5480e+03  1.9173e+03 -1.3289  0.183874
lag.popu        -1.1588e-02  1.4143e-02 -0.8193  0.412600

Rho: 0.4434, LR test value: 6.5523, p-value: 0.010475
Log likelihood: -684.0203 for mixed model
ML residual variance (sigma squared): 1499800, (sigma: 1224.7)
AIC: 1380, (AIC for lm: 1384.6)

Moran I statistic standard deviate = 0.7665, p-value = 0.2217
sample estimates:
Moran I statistic       Expectation          Variance
      0.036897881      -0.012658228       0.004180066
```

Comparacion de los modelos

	Model	df	AIC	logLik	Test	L.Ratio	p-value
prixm2.mixte	1	6	1380.0	-684.02	1		
prixm2.errorsarlm	2	4	1380.6	-686.29	2	4.5460	0.103002
prixm2.lm	3	3	1387.6	-690.79	3	8.9876	0.002718

	Model	df	AIC	logLik	Test	L.Ratio	p-value
prixm2.mixte	1	6	1380.0	-684.02	1		
prixm2.lagsarlm	2	4	1380.8	-686.38	2	4.7103	0.094878
prixm2.lm	3	3	1387.6	-690.79	3	8.8233	0.002974