Universidad de la República **Cálculo I**

Facultad de Ingeniería - IMERL **Curso anual 2018**

EXAMEN - 18 de diciembre.

Número de Examen	Apellido, Nombre	CI

- La duración del examen es de cuatro horas, y no se permite usar ni calculadora ni material de consulta.
- La comprensión de las preguntas es parte de la prueba.
- En este parcial deberá elegir 4 de los 5 ejercicios. Marque los 4 ejercicios que realizará en la tabla correspondient.
- Se aprueba con 50.

1	2	3	4	5

Ejercicio de Desarrollo 1. (25 puntos) Considere el siguiente conjunto de números reales

$$A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \right\}$$

1. Definir cota inferior e ínfimo de un conjunto $B \subset \mathbb{R}$ no vacío.
2. Probar que A está acotado inferiormente. Notemos α al ínfimo de A.
3. Verificar que $\alpha \geq 0$.
4. Deducir que $\alpha = 0$.

Ejercicio de Desarrollo 2. (25 puntos)

1. Defina primitiva de una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y enuncie la regla de Barrow .
2. Calcular

$$\int_0^1 e^x \sin \frac{\pi x}{2} dx \qquad \text{y} \qquad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x}{\cos x} dx$$

Ejercicio de Desarrollo 3. (25 puntos)

1. Enunciar el teorema de Bolzano.
2. Demostrar que existe un número $c \in \mathbb{R}$ tal que es solución de la ecuación:

$$2cos(x) = x - 1$$

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Considere la siguiente afirmación:
Si existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ entonces f tiene máximo o mínimo.
Probar o dar un contraejemplo.

Ejercicio de Desarrollo 4. (25 puntos)

1. Demuestre que si f es derivable en (a, b) y tiene un mínimo relativo en $c \in (a, b)$ entonces $f'(c) = 0$.
2. Considere $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Sea $c \in [a, b]$; Demuestre o de un contraejemplo de:
   a) *Si f no es derivable en c entonces c no puede ser un extremo relativo.*
   b) *Si $f'(c) = 0$ entonces c es un extremo relativo.*
3. Hallar el rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un semicírculo de radio 1, teniendo la base inferior en el diámetro.

Ejercicio de Desarrollo 5. (25 puntos) Considere la función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_{2x}^{0} e^{-t^2}\,dt$$

1. Justificar la derivabilidad de F y calcular $F'(x)$.
2. Calcular el polinomio de Taylor de grado 3 de F alrededor del 0.
3. Calcular el siguiente límite justificando cada una de las propiedades utilizadas:

$$\lim_{x \to 0} \frac{3F(x) + 6x + x^3}{2x^3}$$