# Señales y Sistemas
# Transformada de Fourier de Tiempo Discreto

Juan Bazerque

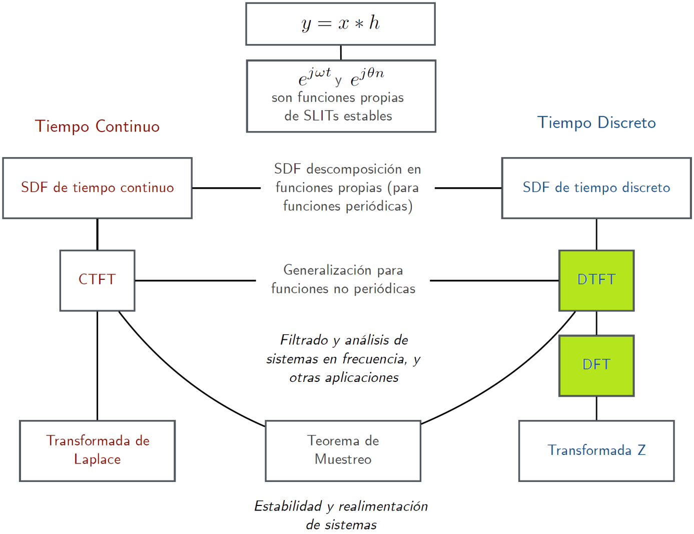
Instituto de Ingeniería Eléctrica

2 de abril de 2019

# Espectro de señales de tiempo discreto

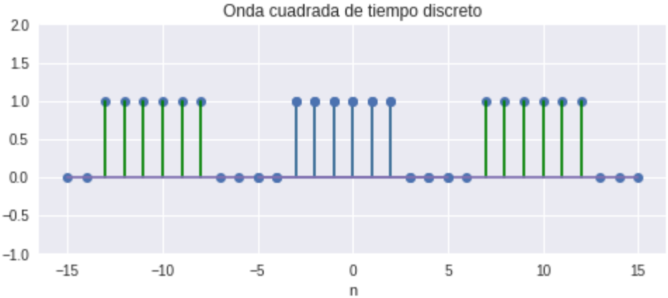
- Conocemos la Serie de Fourier de tiempo discreto
- Requiere que la señal sea periódica ($x[n+N]=x[n]$)
- La periodicidad es una hipótesis muy restrictiva
- Objetivo: Definir el espectro de una señal de tiempo discreto no periódica
- Respuesta: Transformada de Fourier de tiempo discreto (DTFT)

# En relación al curso



## Señal periódica asociada

- Sea $x[n]$ una señal no periódica tal que $x[n] = 0$ si $|n| \geq N/2$ [1]
- Definimos $\tilde{x}[n]$ de período $N$ tal que $\tilde{x}[n] = x[n]$ si $|n| \leq N/2$




- Recordar: Serie de Fourier de $\tilde{x}[n]$
  - Síntesis

$$x[n] = \sum_{k=-N/2}^{N/2} a_k e^{j\theta_k n}, \quad \theta_k = \frac{2\pi k}{N}, \ quad$$

  - Análisis

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2} x[n] e^{-j\theta_k n} n \in [-N/2, N/2]$$

[1] Si $x[n]$ tiene soporte infinito $\Rightarrow$ usamos $x_N[n] = x[n]$ para $n \in [-N/2, N/2]$ y cero fuera

# De la serie a la DTFT

- Hagamos crecer $N \to \infty$ con $\theta_k = 2\pi k/N \to \theta$

$$Na_k = \sum_{n=-N/2}^{N/2} x[n]e^{-j\theta_k n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\theta_k n} \to \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\theta n}$$

- Definimos

$$X(e^{j\theta}) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\theta n}, \quad \Rightarrow X(e^{j\theta_k}) = Na_k$$

- Para la síntesis

$$x[n] = \sum_{k=-N/2}^{N/2} \frac{X(e^{j\theta_k})}{N} e^{j\theta_k n} = \sum_{k=-N/2}^{N/2} \frac{X(e^{j\theta_k})}{2\pi} e^{j\theta_k n} \Delta\theta_k \to \int_{2\pi} \frac{X(e^{j\theta})}{2\pi} e^{j\theta n} d\theta$$

- Usamos $1/N = \Delta\theta_k/2\pi$ y $\sum_{k=-N/2}^{N/2} \Delta\theta_k = 2\pi$
  - Prueba $\Delta\theta_k = \theta_{k+1} - \theta_k = 2\pi(k+1)/N - 2\pi k/N = 2\pi/N$

# Definición de la DTFT

## Transformada de Fourier de Tiempo Discreto

$$X(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\theta n}$$

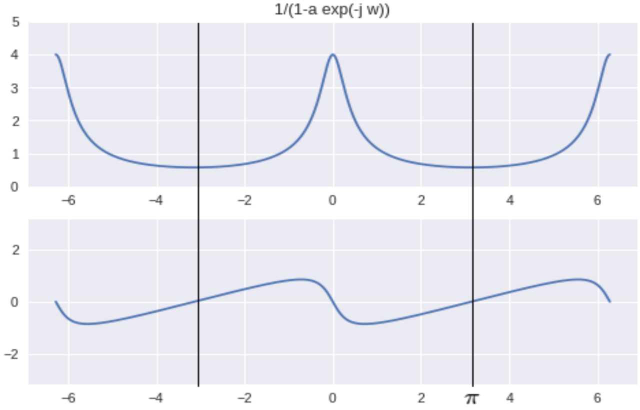
$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\theta})e^{j\theta n}d\theta$$

- Definiciones asociadas al análisis y síntesis de las Series de Fourier
- La frecuencia pasa a ser una variable continua $\omega \in \mathbb{R}$
- DTFT $X(e^{j\theta})$ es $2\pi$ periódica (ejercicio)
- Suma en período $k =< N > \Rightarrow$ integral en período $2\pi$

# Ejemplo

- Calcular la DTFT de $x[n] = u[n]a^n$

$$X(e^{j\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\theta n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\theta})^n = \frac{1}{1 - ae^{-j\theta}}$$

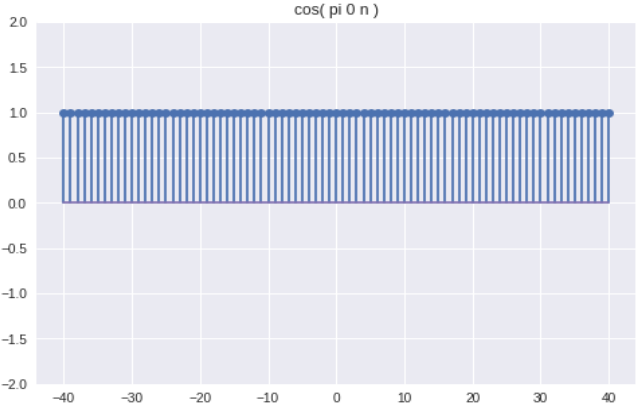


# Frecuencias de señales discretas

- Recordar: exponenciales de frecuencias $\theta$ y $\theta + 2\pi$ son idénticas

$$e^{j(\theta+2\pi)n} = e^{j\theta n}$$

- Componentes varían más rápido a frecuencias $\theta \simeq \pm\pi$

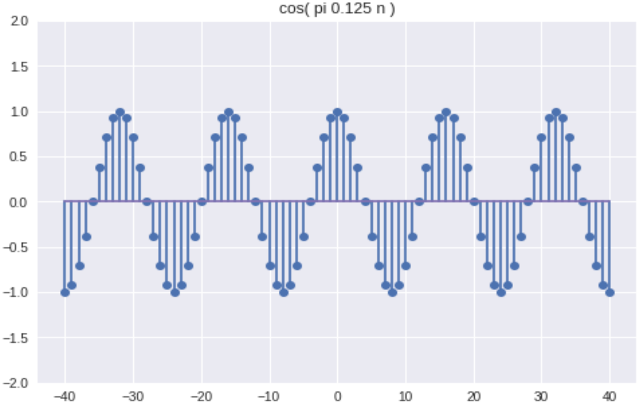


# Frecuencias de señales discretas

- Recordar: exponenciales de frecuencias $\theta$ y $\theta + 2\pi$ son idénticas

$$e^{j(\theta+2\pi)n} = e^{j\theta n}$$

- Componentes varían más rápido a frecuencias $\theta \simeq \pm\pi$

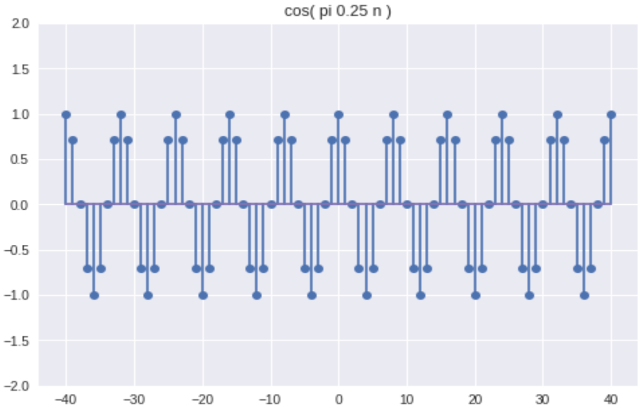


# Frecuencias de señales discretas

- Recordar: exponenciales de frecuencias $\theta$ y $\theta + 2\pi$ son idénticas

$$e^{j(\theta+2\pi)n} = e^{j\theta n}$$

- Componentes varían más rápido a frecuencias $\theta \simeq \pm\pi$

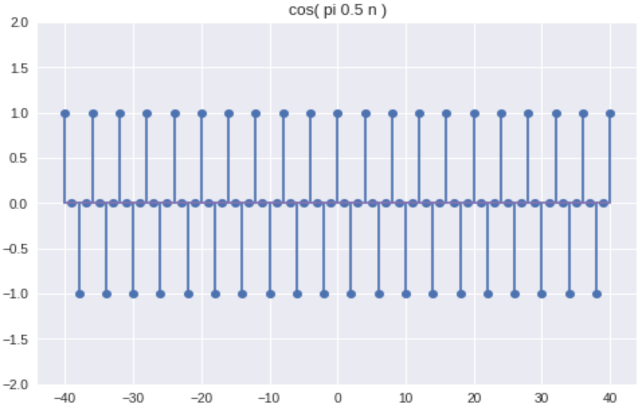


# Frecuencias de señales discretas

- Recordar: exponenciales de frecuencias $\theta$ y $\theta + 2\pi$ son idénticas

$$e^{j(\theta+2\pi)n} = e^{j\theta n}$$

- Componentes varían más rápido a frecuencias $\theta \simeq \pm\pi$

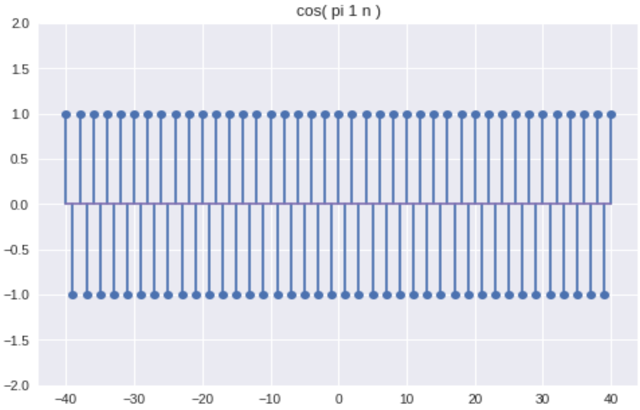


# Frecuencias de señales discretas

- Recordar: exponenciales de frecuencias $\theta$ y $\theta + 2\pi$ son idénticas

$$e^{j(\theta+2\pi)n} = e^{j\theta n}$$

- Componentes varían más rápido a frecuencias $\theta \simeq \pm\pi$

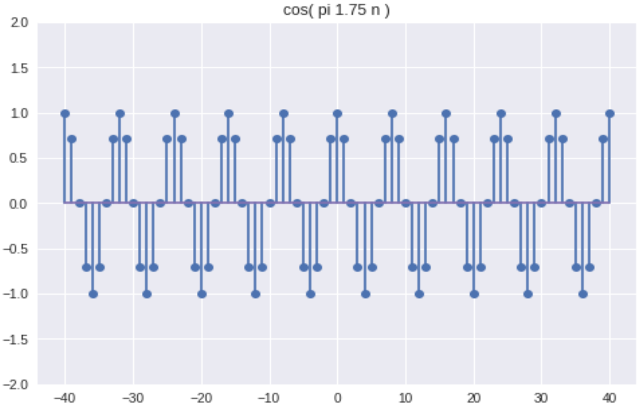


# Frecuencias de señales discretas

- Recordar: exponenciales de frecuencias $\theta$ y $\theta + 2\pi$ son idénticas

$$e^{j(\theta+2\pi)n} = e^{j\theta n}$$

- Componentes varían más rápido a frecuencias $\theta \simeq \pm\pi$

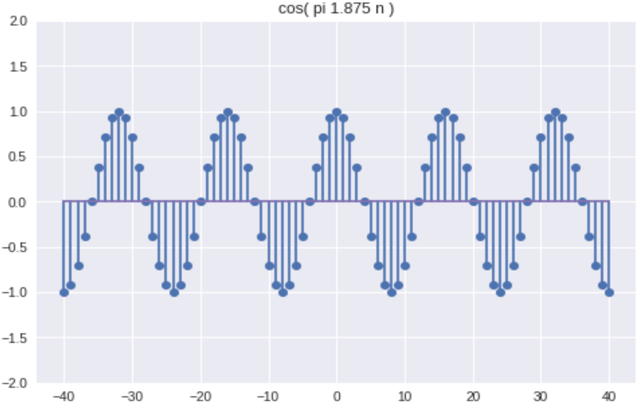


# Frecuencias de señales discretas

- Recordar: exponenciales de frecuencias $\theta$ y $\theta + 2\pi$ son idénticas

$$e^{j(\theta+2\pi)n} = e^{j\theta n}$$

- Componentes varían más rápido a frecuencias $\theta \simeq \pm\pi$

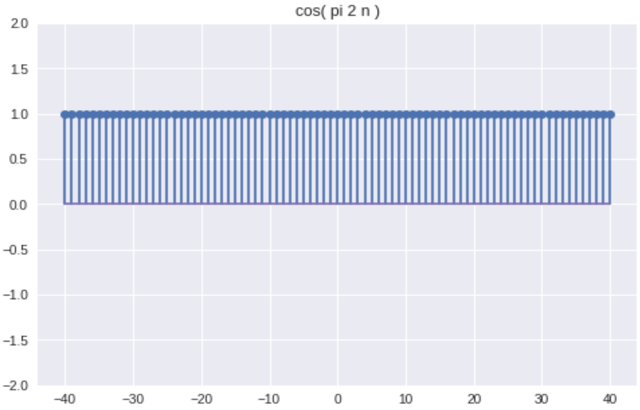


# Frecuencias de señales discretas

- Recordar: exponenciales de frecuencias $\theta$ y $\theta + 2\pi$ son idénticas

$$e^{j(\theta+2\pi)n} = e^{j\theta n}$$

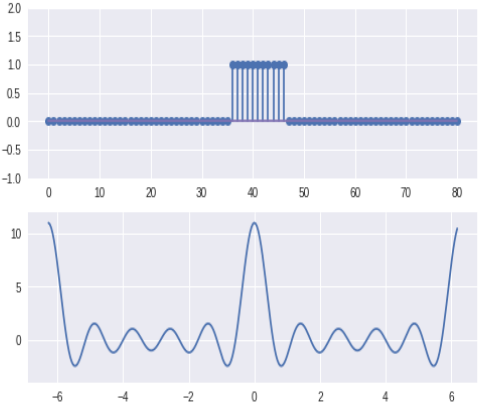
- Componentes varían más rápido a frecuencias $\theta \simeq \pm\pi$



# Ejemplo

- Calcular la DTFT de un pulso de ancho $2N_0 + 1$

$$X(e^{j\theta}) = \sum_{n=-N_0}^{N_0} e^{-j\theta n} = \sum_{m=0}^{2N_0} e^{-j\theta(m-N_0)} = e^{j\theta N_0} \sum_{m=0}^{2N_0} \left(e^{-j\theta}\right)^m = \frac{\sin(\theta(N_0+1/2))}{\sin(\theta/2)}$$




- ¿Relación con $\operatorname{sinc}$? $\rightarrow$ después del parcial

# Ejemplo

- Calcular la DTFT de la delta $x[n] = \delta[n]$

$$X(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] e^{-j\theta n} = e^{-j\theta n}|_{n=0} = 1$$

- Al igual que en tiempo continuo el espectro de la delta es constante
- La delta tiene igual potencia en todas las componentes de frecuencia
- $X(e^{j\theta})$ de fase nula

- Calcular la DTFT de la delta corrida $x[n] = \delta[n - n_0]$

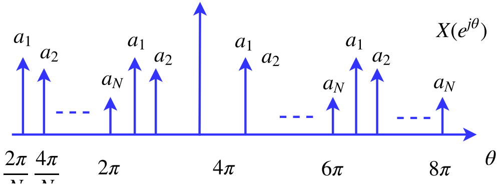
$$X(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n - n_0] e^{-j\theta n} = e^{-j\theta n_0}$$

- Al igual que la delta el espectro es constante en amplitud
- $X(e^{j\theta})$ de fase lineal $\Rightarrow$ no distorsiona en fase

# DTFT de señales periódicas

- La DTFT de una señal periódica $x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{j\theta_k n}$, con $\theta_k = 2\pi k/N$ es (prueba en próxima transparencia)

$$X(e^{j\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\theta - \theta_k)$$




- La DTFT de una señal periódica $x[n]$ corresponde a deltas de variable continua moduladas por los coeficientes de la Serie de Fourier $a_k$ de $x[n]$
- Los coeficientes $a_k$ son periódicos por lo que $X(e^{j\theta})$ también lo es en $(0, 2\pi)$

# DTFT de señales periódicas

- La DTFT de una señal periódica $x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{j\theta_k n}, \quad \theta_k = 2\pi k/N$ es

$$X(e^{j\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_l \delta(\theta - \theta_k)$$

- Prueba: confirmemos que la síntesis de este candidato $X(e^{j\theta})$ es $x[n]$

$$x[n] \stackrel{?}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \overbrace{2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\theta - \theta_k)}^{X(e^{j\theta})\ \text{candidato}} e^{j\theta n} d\theta = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{2\pi} a_k \delta(\theta - \theta_k) e^{j\theta n} d\theta$$

$$= \sum_{k=<N>} a_k \int_0^{2\pi} \delta(\theta - \theta_k) e^{j\theta n} d\theta = \sum_{k=<N>} a_k e^{j\theta n}|_{\theta=\theta_k} = \sum_{k=<N>} a_k e^{j\theta_k n}$$

- Utilizamos que solo hay $N$ frecuencias $\theta_k = 2\pi k/N$ en un intervalo de integración de largo $2\pi$.

# Ejemplo - señal sinusoidal

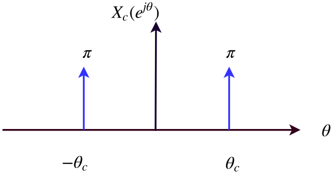
- DTFT del coseno

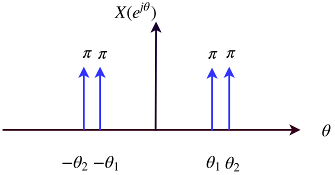
$$x_c[n] = \cos(\theta_c n) = \frac{1}{2}e^{j\theta_c t} + \frac{1}{2}e^{-j\theta_c t}$$

$$\Rightarrow \; a_{-1} = 1/2, \quad a_1 = 1/2$$

$$\Rightarrow \; X_c(e^{j\theta}) = 2\pi\left(\frac{1}{2}\delta(\theta+\theta_c) + \frac{1}{2}\delta(\theta-\theta_c)\right)$$

- $x[n] = \cos(\theta_1 n) + \cos(\theta_2 n) \; \Rightarrow \; X(e^{j\theta})$, aun sin ser periódicas




- $x_s[n] = \sin(\theta_s n) \; \Rightarrow \; X_s(e^{j\theta}) = \, ?$ (ejercicio)

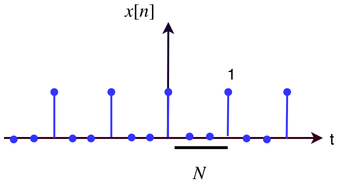
# Ejemplo - tren de deltas

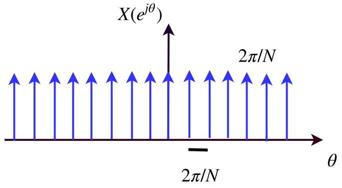
- DTFT del tren de deltas discretas

$$x[n] = \sum_{l=-\infty} \infty \delta(n - lN)$$

$$\Rightarrow \;\; a_k = \frac{1}{N}$$

$$\Rightarrow \;\; X(e^{j\theta}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty} \infty \delta\left(\theta - \frac{2\pi k}{N}\right)$$




- Pasamos de un peine discreto a un peine de Dirac con deltas

# Propiedades de la DTFT

## Propiedades

- Linealidad
- Convolución:

$$z[n] = x[n] * y[n] \;\Rightarrow\; Z(e^{j\theta}) = X(e^{j\theta})Y(e^{j\theta})$$

- Producto:

$$z[n] = x[n]y[n] \;\Rightarrow\; Z(e^{j\theta}) = \frac{1}{2\pi}X(e^{j\theta}) * Y(e^{j\theta})$$

- Diferencia:

$$z[n] = x[n] - x[n-1] \;\Rightarrow\; Z(e^{j\theta}) = \left(1 - e^{j\theta}\right) X(e^{j\theta})$$

- Parseval:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta=2\pi} \left|X(e^{j\theta})\right|^2$$

- Lista de propiedades complementarias en la página de seys

# Filtrado

- La salida $y[n] = h[n] * x[n]$ de un SLIT tiene DTFT $Y(e^{j\theta}) = X(e^{j\theta})H(e^{j\theta})$
- Idea: pensar los filtros en frecuencia
- Filtrado en directo en frecuencia:

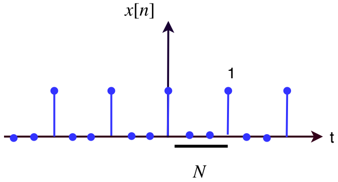
$$x[n] \rightarrow X(e^{j\theta}) \ \Rightarrow Y(e^{j\theta}) = X(e^{j\theta})H(e^{j\theta}) \Rightarrow Y(e^{j\theta}) \rightarrow y[n]$$

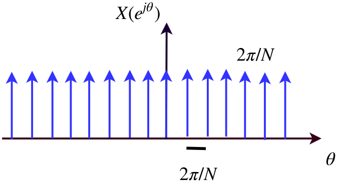
- Diseño de filtros:

$$H(e^{j\theta}) \rightarrow h[n] \Rightarrow y[n] = h[n] * x[n]$$

# Ejemplo

- Pasabajos ideal: $y = h * x$ de un SLIT tiene DTFT $Y(e^{j\theta}) = X(e^{j\theta})H(e^{j\theta})$




$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\theta_0}^{\theta_0} e^{j\theta n} d\theta = \frac{\theta_0}{\pi}\mathrm{sinc}\left(\frac{\theta_0 n}{\pi}\right)$$

- El pasabajos ideal no es causal $\Rightarrow$ no es realizable en SLITs de tiempo real

# Pasabajos relizablles en tiempo natural

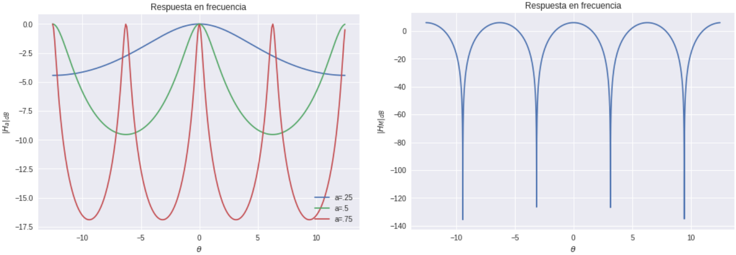
- Pasabajos no ideal

$$H_a(e^{j\theta}) = \frac{1-a}{1-ae^{-j\theta}}$$

- Luego $h_a[n] = u[n]a^n$ se implementa con un IIR $y[n] = ay[n-1] + x[n]$
- Filtro de media retardado

$$h_m[n] = \frac{1}{2}\delta[n-2] + \delta[n-1] + \frac{1}{2}\delta[n]$$

- Pasabajos $H_m(e^{j\theta}) = e^{-j\theta}(1 + 2\cos(\theta))$ admite implementación como filtro FIR



# Transformada Discreta de Fourier (DFT)

- Objetivo: procesar señal $x[n]$ de largo $N$ definida en $n = [0, 1, \ldots, N-1]$
- Respuesta: DFT - fundamental en procesamiento digital (arreglos finitos)

- Equivalente a $\tilde{x}[n]$ de período $N$ tal que $\tilde{x}[n] = x[n]$ para $n = [0, 1, \ldots, N-1]$
- Recordar: $a_k$ y $X(e^{j\theta_k}) = Na_k$ periódicas en $k$, de período $N$
- Con $X_k := X(e^{j\theta_k})$ en $\theta_k = \left[0, \frac{2\pi}{N}, \ldots, \frac{2\pi(N-1)}{N}\right]$ queda definida la serie $a_k$
- Alcanza con definir $N$ coeficientes $X_k, k \in [0, 1, \ldots, N-1]$ para describir $x[n]$
- Definición: DFT

$$X_k := \overbrace{\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}}^{X(e^{j\theta_k})}, \quad k \in [0, 1, \ldots, N-1]$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}, \quad n \in [0, 1, \ldots, N-1]$$

# DFT en forma matricial

- Dados los coeficientes de la DFT $X_k, k \in [0, 1, \ldots, N-1]$

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}$$

  defino vectores $\mathbf{x} = [x[0], x[1], \ldots x[N-1]]^T$ y $\mathbf{X} = [X_0, X_1, \ldots X_{N-1}]^T$
- Puedo ordenar las ecuaciones en una estructura matricial

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_k \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}} & \ldots & e^{-j\frac{2\pi n}{N}} & \ldots & e^{-j\frac{2\pi(N-1)}{N}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi k}{N}} & \ldots & e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} & \ldots & e^{-j\frac{2\pi k(N-1)}{N}} \\ \vdots & & & & & \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi(N-1)}{N}} & \ldots & e^{-j\frac{2\pi(N-1)n}{N}} & \ldots & e^{-j\frac{2\pi(N-1)^2}{N}} \end{bmatrix}}_{\text{matriz DFT}} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[n] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}$$

- DFT corresponde a una multiplicación matricial de $N \times N$

# Ortonormalidad de la DFT

- La siguiente matriz $\mathbf{W}_N$ es ortonormal

$$\mathbf{W}_N := \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}} & \dots & e^{-j\frac{2\pi n}{N}} & \dots & e^{-j\frac{2\pi(N-1)}{N}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi k}{N}} & \dots & e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} & \dots & e^{-j\frac{2\pi k(N-1)}{N}} \\ \vdots & & & & & \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi(N-1)}{N}} & \dots & e^{-j\frac{2\pi(N-1)n}{N}} & \dots & e^{-j\frac{2\pi(N-1)^2}{N}} \end{bmatrix}$$

- Luego $\mathbf{W}_N^{\star}\mathbf{W}_N = I \;\Rightarrow \mathbf{W}_N^{-1} = \mathbf{W}_N^{\star}$ (transpuesta conjugada)
- DFT inversa: $\mathbf{X} = \sqrt{N}\mathbf{W}_N\mathbf{x} \;\Rightarrow \mathbf{x} = \left(\sqrt{N}\mathbf{W}_N\right)^{-1}\mathbf{X} = \mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{W}_N^{\star}\mathbf{X}$

# DFT inversa

- La inversión matricial

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{W}_N^{\star}\mathbf{X}$$

  corresponde a

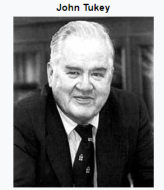
$$\begin{bmatrix} x[0] \\ X_1 \\ \vdots \\ X_k \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}} & \dots & e^{-j\frac{2\pi n}{N}} & \dots & e^{-j\frac{2\pi(N-1)}{N}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi k}{N}} & \dots & e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} & \dots & e^{-j\frac{2\pi k(N-1)}{N}} \\ \vdots & & & & & \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi(N-1)}{N}} & \dots & e^{-j\frac{2\pi(N-1)n}{N}} & \dots & e^{-j\frac{2\pi(N-1)^2}{N}} \end{bmatrix}}_{\text{matriz DFT}} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[n] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}$$

- Que forma las $N$ ecuaciones de síntesis para obtener $x[n]$ a partir de $X_k$

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}, \quad n \in [0, 1, \dots, N-1]$$

# Fast Fourier Tansform

- Multiplicación matricial insume $O(N^2)$ operaciones
- Problema: complejidad numérica no satisfactoria para aplicaciones de tiempo real
- Solución: Fast Fourier Transform (FFT)




- Devuelve los mismos coeficientes $X_k$ que la DFT con un algoritmo más eficiente
- Baja el número de operaciones a $O(n \log n)$
- Aprovecha la estructura de $W_N$
- Bajar los coeficientes de este orden aún es objeto de investigación

# Relación entre transformadas de Fourier

**TABLE 5.3** SUMMARY OF FOURIER SERIES AND TRANSFORM EXPRESSIONS

| | Continuous time | | Discrete time | |
|---|---|---|---|---|
| | **Time domain** | **Frequency domain** | **Time domain** | **Frequency domain** |
| Fourier Series | $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$<br>continuous time<br>periodic in time | $a_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}$<br>discrete frequency<br>aperiodic in frequency | $x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$<br>discrete time<br>periodic in time | $a_k = \frac{1}{N}\sum_{k=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk(2\pi/N)n}$<br>discrete frequency<br>periodic in frequency |
| Fourier Transform | $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$<br>continuous time<br>aperiodic in time | $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$<br>continuous frequency<br>aperiodic in frequency | $x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\theta})e^{j\theta n}$<br>discrete time<br>aperiodic in time | $X(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\theta n}$<br>continuous frequency<br>periodic in frequency |

duality

duality

duality

# Generalización de la Transformada de Fourier

- Vimos $5$ versiones alternativas del espectro
- Éstas nos permiten pensar una señal en el espacio de las frecuencias
- Según la aplicación usaremos la transformada de Fourier adecuada
  Diseño de filtros electrónicos analógicos $\Rightarrow$ CTFT
  Procesamiento digital por computadora $\Rightarrow$ DFT
  Análisis de la conversión A/D $\Rightarrow$ CTFT $\leftrightarrow$ DTFT
- Existen otras variantes como
  Discrete Cosine Transform (DCT) para compresión (.jpeg, .mpeg, .mp3, .mp4)
  Espectrograma o short-term Fourier transform (STFT)
  Graph Fourier transform (GFT) para sistemas interconectados (networks)
  Vuestra propia definición ...